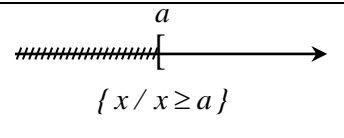
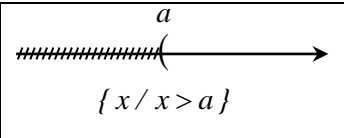
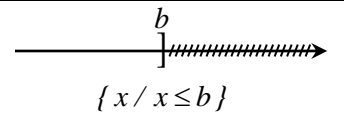
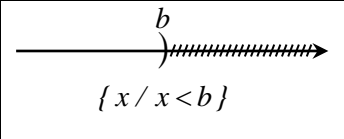
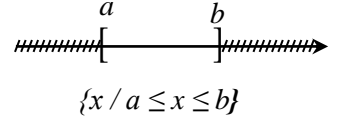
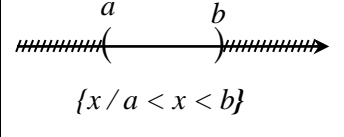
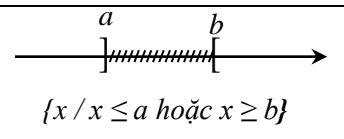
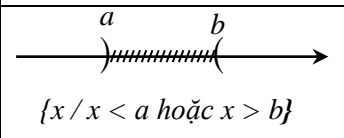
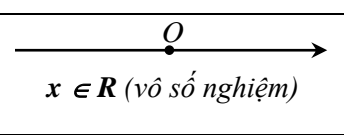
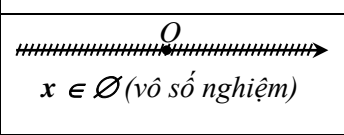


Phần 0. Ôn tập

Biểu diễn tập nghiệm BPT trên trục số

Thông thường một bất phương trình có vô số nghiệm nên không thể liệt kê hết được. Người ta chọn cách thể hiện tập nghiệm bằng cách biểu diễn trên trục số (phần không bị xóa). Sau đây là các trường hợp thường gặp:

(1)		(2)	
(3)		(4)	
(5)		(6)	
(7)		(8)	
(9)		(10)	

➤ **Chú ý:** Tại a , biểu diễn ngoặc vuông “[,]” tức trong tập nghiệm có $x = a$, còn ngược lại biểu diễn ngoặc đơn “(,)” khi $x = a$ không thuộc tập nghiệm.

O.1 Biểu diễn các tập nghiệm sau lên trục số:

- a) $S = \{x / x > 5\}$ b) $S = \{x / x \geq -2\}$ c) $S = \{x / x < 1\}$
 d) $S = \{x / x \leq -1\}$ e) $S = \{x / -1 < x \leq 2\}$
 f) $S = \{x / x \leq -2 \text{ hoặc } x > 1\}$

Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

❖ **Dạng 1:** $|A| = B$ (1) (với B là một số thực không chứa biến)

- Nếu $B < 0$: phương trình vô nghiệm
- Nếu $B > 0$: (1) $\Leftrightarrow A = B$ hoặc $A = -B$

❖ **Dạng 2:** $|A| = B$ (2) (với B là một biểu thức có chứa biến)

➤ Cách 1: Dùng định nghĩa bỏ dấu giá trị tuyệt đối:

- Nếu $A \geq 0 \Leftrightarrow x \dots$ (*)

(2) $\Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow x = \dots$ (đem nghiệm này so với điều kiện (*) nếu thỏa thì lấy)

Chú ý: Trường hợp phương trình $A = B$ có VSN thì phương trình (2) có nghiệm là (*).

- Nếu $A < 0 \Leftrightarrow x \dots$ (**)

(2) $\Leftrightarrow -A = B \Leftrightarrow x = \dots$ (đem nghiệm này so với điều kiện (**)) nếu thỏa thì lấy)

Chú ý: Trường hợp phương trình $-A = B$ có VSN thì phương trình (2) có nghiệm là (**).

Vậy nghiệm của phương trình là: (lấy nghiệm của hai trường hợp trên).

➤ Cách 2: Dùng công thức:

$$|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \\ A = -B \end{cases}$$

❖ **Dạng 3:** $|A| = |B|$

$$|A| = |B| \Leftrightarrow A = B \text{ hoặc } A = -B$$

(giải hai phương trình này tìm nghiệm nếu có).

❖ **Dạng 4:**

$$|A| + |B| + \dots + |N| = 0 \text{ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 & (a) \\ B = 0 & (b) \\ \dots \\ N = 0 & (n) \end{cases}$$

Nghiệm của (1) là nghiệm chung của các phương trình (a), (b),
... (n).

❖ **Dạng 5: Phương trình có chứa nhiều dấu giá trị tuyệt đối:**

- Tìm giá trị của ẩn để biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối bằng 0. Các giá trị này khi biểu diễn lên trục số sẽ chia trục số thành nhiều khoảng giá trị của ẩn.
- Cho ẩn lấy giá trị trên từng khoảng, trên từng khoảng đó dấu của biểu thức bên trong dấu giá trị tuyệt đối sẽ âm hoặc dương. Dựa vào đó mà bỏ dấu giá trị tuyệt đối.
- Giải phương trình, giá trị tìm được phải nằm trong khoảng đang xét mới nhận làm nghiệm.
- Nghiệm của phương trình là tất cả các nghiệm vừa tìm được trên từng khoảng.

O.2 Giải các phương trình sau:

- | | |
|-------------------|--------------------|
| a) $ x - 5 = 3$ | b) $ 2x - 5 = 4$ |
| c) $ x + 6 = 1$ | d) $ 3 - 7x = 0$ |
| e) $ x - 5 = -2$ | f) $ 8x - 5x = 2$ |
- | | |
|------------------------|-----------------------|
| a) $ x - 7 = 2x + 3$ | b) $ x + 4 = 2x - 5$ |
| c) $ x + 3 = 3x - 1$ | d) $ 9 + x = 2x$ |
| e) $ 3x - 1 = 3x + 2$ | f) $ x + 6 = 2x + 9$ |
- | | |
|-------------------------------------|--------------------------|
| a) $ 2x - 3 = 2x - 3$ | b) $ 5x - 4 = 4 - 5x$ |
| c) $ 2x + 3 = 2x + 2$ | d) $ 5x - 3 = 5x - 5$ |
| e) $ x^2 - 3x + 3 = -x^2 + 3x - 1$ | f) $ x^2 - 9 = x^2 - 9$ |
- | | |
|-----------------------------------|------------------------------------------|
| a) $ 5x - 3x - 2 = 0$ | b) $x - 5x + -2x - 3 = 0$ |
| e) $ 3 - x + x^2 - (4 + x)x = 0$ | f) $(x - 1)^2 + x + 21 - x^2 - 13 = 0$ |
- | | |
|---------------------------|------------------------------|
| a) $ 2 - x = 2x - 3 $ | b) $ x + 3 = 5 - x $ |
| c) $ 2x - 1 = 2 - 3x $ | d) $ 2x = x(x - 2) $ |
| e) $ x(x + 1) = 3 - x $ | f) $ 3x - 1 - 2x + 3 = 0$ |
- | | |
|------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $ x - 1 + 2 - x = 3$ | b) $ x + 3 + x - 5 = 3x - 1$ |
| c) $ x - 2 x - 1 + 3 x - 2 = 4$ | d) $ x - 1 + x + 2 + x - 3 = 14$ |

Bất phương trình tích, thương. Bất phương trình bậc hai. Bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

1. Bất phương trình tích

$$\text{Dạng 1. } A(x).B(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$$

$$A(x).B(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A(x) \leq 0 \\ B(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Dạng 2. } A(x).B(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) > 0 \end{cases}$$

$$A(x).B(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \leq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A(x) \leq 0 \\ B(x) \geq 0 \end{cases}$$

2. Bất phương trình thương

$$\text{Dạng 1. } \frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A(x) \leq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$$

$$\text{Dạng 2. } \frac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) > 0 \end{cases}$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A(x) \leq 0 \\ B(x) > 0 \end{cases}$$

3. Bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

$$\checkmark |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \quad (\text{với } a \geq 0)$$

$$\checkmark |x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ hoặc } x \geq a \quad (\text{với } a \geq 0)$$

✓ Một số bất phương trình đặc biệt:

$$\blacklozenge |a| \geq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \qquad \blacklozenge |a| > 0 \Leftrightarrow a \neq 0$$

$$\blacklozenge |a| \leq 0 \Leftrightarrow a = 0 \qquad \blacklozenge |a| < 0 \Leftrightarrow a \in \emptyset$$

4. Bất phương trình bậc hai

a) Bất phương trình bậc hai là bất phương trình có các dạng:

$$(1): ax^2 + bx + c > 0 \qquad (2): ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$(3): ax^2 + bx + c < 0 \qquad (4): ax^2 + bx + c \leq 0$$

(trong đó a, b, c là các số thực và $a \neq 0$)

❖ Một số bất phương trình đặc biệt:

$$\begin{aligned} \diamond a^2 \geq 0 &\Leftrightarrow a \in \mathbb{R} & \diamond a^2 > 0 &\Leftrightarrow a \neq 0 \\ \diamond a^2 \leq 0 &\Leftrightarrow a = 0 & \diamond a^2 < 0 &\Leftrightarrow a \in \emptyset \end{aligned}$$

b) Cách giải:

❖ **Cách 1:** Đưa về bất phương trình tích bằng cách phân tích về trái thành nhân tử.

❖ **Cách 2:** Đưa về bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối:

$$\begin{aligned} \bullet X^2 \leq A^2 &\Leftrightarrow |X| \leq |A| \Leftrightarrow -A \leq X \leq A \\ \bullet X^2 \geq A^2 &\Leftrightarrow |X| \geq |A| \Leftrightarrow X \leq -A \text{ hoặc } X \geq A \end{aligned}$$

❖ **Cách 3:** Xét dấu (Học ở lớp 10)

O.3 Giải các bất phương trình sau và biểu diễn nghiệm trên trục số:

$$\begin{aligned} \text{a) } x(x-1) < 0 & \quad \text{b) } (x-2)(x-5) > 0 & \quad \text{c) } (x+5)(7-2x) > 0 \\ \text{d) } (2x+1)(x-3) < 0 & \quad \text{e) } x^2 - 6x < 0 & \quad \text{f) } (2-x)(x+3) > 0 \\ \text{g) } \frac{x-2}{x-3} > 0 & \quad \text{h) } \frac{x+2}{x-5} < 0 & \quad \text{i) } \frac{x-1}{x+3} > 1 \\ \text{j) } \frac{2-x}{3x-1} > -1 & \quad \text{k) } \frac{x+1}{x-2} \geq 0 & \quad \text{l) } \frac{x^2+1}{x+3} < 0 \end{aligned}$$

O.4 Giải các bất phương trình sau và biểu diễn nghiệm trên trục số:

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 - 4 < 0 & \quad \text{b) } x^2 + x - 6 \leq 0 & \quad \text{c) } x^2 - x - 6 > 0 \\ \text{d) } x^2 - 3x - 10 \geq 0 & \quad \text{e) } x^2 - 6x < 0 & \quad \text{f) } -x^2 + 4x - 3 \leq 0 \\ \text{g) } x^2 - 10x + 16 \geq 0 & \quad \text{h) } -x^2 + 7x - 10 < 0 & \quad \text{i) } x^2 - 15x + 50 > 0 \\ \text{j) } -x^2 + 3x + 4 > 0 & \quad \text{k) } x^2 - 6x + 5 \geq 0 & \quad \text{l) } x^2 - x - 20 \leq 0 \\ \text{m) } x^2 - 6x + 8 < 0 & \quad \text{n) } -x^2 + 12x - 32 > 0 & \quad \text{o) } x^2 + 6x + 8 \leq 0 \end{aligned}$$

O.5 Giải các bất phương trình sau và biểu diễn nghiệm trên trục số:

$$\begin{aligned} \text{a) } |x| \leq 4 & \quad \text{b) } |x| \geq 7 & \quad \text{c) } |2x-1| > 3 \\ \text{d) } |x-1| \leq 2 & \quad \text{e) } 2|x+3| > x+6 & \quad \text{f) } |1-2x| \geq x-1 \end{aligned}$$

O.6 CMR: các bất phương trình sau đây vô nghiệm:

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 + 1 < 1 & \quad \text{b) } x^2 + 2x < 2x & \quad \text{c) } x^2 - 2x + 3 < -2x + 3 \\ \text{d) } x^2 + 2x + 2 \leq 0 & \quad \text{e) } 4x^2 - 4x + 5 \leq 0 & \quad \text{f) } x^2 + x + 1 \leq 0 \end{aligned}$$

O.7 CMR: mọi số thực x đều là nghiệm của các bất phương trình sau:

$$\text{a) } 2x^2 - 4x + 5 > 0 \quad \text{b) } 3x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad \text{c) } -x^2 + 6x - 10 < 0$$

d) $-x^2 + 3x - 3 < 0$ e) $\frac{x^2 + 4x + 5}{2} > 0$ f) $\frac{-6 + 2x - x^2}{x^2 + 1} < 0$

O.8 Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A = 2x^2 + 20x - 43$ b) $B = x^2 + 2x + 2$
 c) $C = x^2 - x + 1$ d) $D = 4x^2 + 4x + 3$
 e) $E = x^2 - 20x + 101$ f) $F = x^2 + xy + y^2 + 1$
 g) $G = (x - 3)(x + 5) + 40$ h) $H = (x - 2)(x + 4) - 10$

O.9 Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A = -2x^2 + 5x - 17$ b) $B = -x^2 + 4x - 5$
 c) $C = -4x^2 - 4x - 2$ d) $D = -6 - 8x - 16x^2$
 e) $E = -3x^2 + 12x - 11$ f) $F = -2x^2 + 5x - 17$

O.10 Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{6}{-2x^2 - 3}$ b) $B = \frac{1}{-x^2 - 2x - 6}$
 c) $C = \frac{7}{10x - x^2 + 3}$ d) $D = \frac{-24}{x^2 - 2x + 3}$
 e) $E = \frac{21}{-x^2 - 4x - 5}$ f) $F = \frac{2013}{x^2 - 6x + 11}$

O.11 Tìm giá trị nguyên của biến x để tại đó giá trị của mỗi biểu thức sau là một số nguyên:

a) $\frac{2}{x-3}$ b) $\frac{3}{x+2}$ c) $\frac{3x^3 - 4x^2 + x - 1}{x-4}$ d) $\frac{3x^2 - x + 1}{3x + 2}$

O.12 Chứng minh rằng:

a) $\frac{x+2}{x-1} \cdot \left(\frac{x^3}{2x+2} + 1 \right) - \frac{8x+7}{2x^2-2} > 0$ ($x \neq 1, x \neq -1$)
 b) $\frac{1-x^2}{x} \cdot \left(\frac{x^2}{x+3} - 1 \right) + \frac{3x^2 - 14x + 3}{x^2 + 3x} < 0$ ($x \neq 0, x \neq -3$)

O.13 Chứng minh rằng:

a) $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 : \left[\frac{x^2+1}{x^2} + \frac{2}{x+1}\left(\frac{1}{x}+1\right)\right] = 1 \quad (x \neq 0, x \neq -1)$

b) $\frac{x}{x-3} - \frac{x^2+3x}{2x+3} \cdot \left(\frac{x+3}{x^2-3x} - \frac{x}{x^2-9}\right) = 1 \quad (x \neq 0, x \neq \pm 3, x \neq -3/2)$

c) $\frac{1}{x-1} - \frac{x^2-x}{x^2+1} \cdot \left(\frac{x}{x^2-2x+1} - \frac{1}{x^2-1}\right) = -1 \quad (x \neq \pm 1)$

d) $\left(\frac{x}{x^2-36} - \frac{x-6}{x^2+6x}\right) : \frac{2x-6}{x^2+6x} + \frac{x}{6-x} = -1 \quad (x \neq 0 \text{ và } x \neq \pm 6)$

O.14 Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1) a) $x^2 + 4x - 12$ b) $6x^2 + 7x + 1$ c) $2x^2 + 4x - 6$

d) $2x^2 + 10x + 8$ e) $10x^2 + 4x - 6$ f) $x^2 + 2x - 15$

2. a) $2x^4 + x^2 - 6$ b) $x^4 - 6x^2 + 8$ c) $x^4 - 5x^2 - 14$

d) $4x^4 - 7x^2 + 3$ e) $6x^4 + 7x^2 + 2$ f) $x^4 - 8x^2 + 15$

3. a) $x - 5\sqrt{x} + 6$ b) $x + 9\sqrt{x} + 18$ c) $3x - 5\sqrt{x} - 8$

d) $-2x + 3\sqrt{x} + 5$ e) $-4x + \sqrt{x} + 3$ f) $x + 2\sqrt{x} - 3$

O.15 Cho biểu thức: $\left(\frac{x^2}{x^3-4x} + \frac{6}{6-3x} + \frac{1}{x+2}\right) : \left(x-2 + \frac{10-x^2}{x+2}\right)$

a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức. Rút gọn biểu thức.

b) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức có giá trị dương.

O.16 Cho biểu thức: $\left(\frac{x+2}{3x} + \frac{2}{x+1} - 3\right) : \frac{2-4x}{x+1} + \frac{x^2-3x-1}{3x}$

a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức. Rút gọn biểu thức.

b) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức có giá trị âm.

O.17 Cho biểu thức: $\left(\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x^2}{x^2+x+1}} - \frac{2x+1}{x^2+x}\right) \cdot \frac{x^2-1}{x-1}$

a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức. Rút gọn biểu thức.

b) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức có giá trị dương.

O.18 Cho biểu thức: $\left(\frac{1+2x}{4+2x} - \frac{x}{3x-6} + \frac{2x^2}{12-3x^2}\right) \cdot \frac{24-12x}{6+13x}$

a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức. Rút gọn biểu thức.

b) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức có giá trị dương.

O.19 Cho biểu thức: $\left(\frac{x+2}{3x} + \frac{2}{x+1} - 3\right) : \frac{2-4x}{x+1} + \frac{x^2-3x-1}{3x}$

- Tìm điều kiện xác định của biểu thức. Rút gọn biểu thức.
- Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức có giá trị âm.

O.20 Cho biểu thức: $\frac{4x^3 - 6x^2 + 8x}{2x - 1}$

- Tìm điều kiện xác định của biểu thức. Rút gọn biểu thức.
- Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức có giá trị không âm.

O.21 Cho biểu thức: $\frac{8-2x}{x^2+x-20}$

- Tìm điều kiện xác định của biểu thức. Rút gọn biểu thức.
- Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức có giá trị âm.

O.22 Cho biểu thức: $M = \frac{x^2}{x-2} \cdot \left(\frac{x^2+4}{x} - 4\right) + 3$

- Tìm điều kiện xác định của biểu thức M. Rút gọn M.
- Tìm x để biểu thức M đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

O.23 Cho biểu thức: $N = \frac{(x+2)^2}{x} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{x+2}\right) - \frac{x^2+6x+4}{x}$

- Tìm điều kiện xác định của biểu thức N. Rút gọn N.
- Tìm x để biểu thức N đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

- $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
- $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$
- $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
- $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
- $A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$
- $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$

Chương 1. CĂN BẬC HAI – CĂN BẬC BA

A - Căn bậc hai

1. **Định nghĩa:** Căn bậc hai của số a không âm là số x sao cho $x^2 = a$.
2. **Ký hiệu:**
 - ♦ $a > 0$: \sqrt{a} : Căn bậc hai của số a
 - $-\sqrt{a}$: Căn bậc hai âm của số a
 - ♦ $a = 0$: $\sqrt{0} = 0$
3. **Chú ý:** Với $a \geq 0$: $(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a$
4. **Căn bậc hai số học:**
 - ♦ Với $a \geq 0$: số \sqrt{a} được gọi là CBHSH của a
 - ♦ Phép khi phương là phép toán tìm CBHSH của số a không âm.
5. **So sánh các CBHSH:** Với $a \geq 0, b \geq 0$: $a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

1.1 Điền vào ô trống trong bảng sau:

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x ²										

1.2 Tìm căn bậc hai số học rồi suy ra căn bậc hai của các số sau:

- | | | | |
|---------|---------|---------|--------------------|
| a) 121 | b) 144 | c) 169 | d) 225 |
| e) 256 | f) 324 | g) 361 | h) 400 |
| i) 0,01 | j) 0,04 | k) 0,49 | l) 0,64 |
| m) | 0,25 | n) 0,81 | o) 0,09 p) 0,16 |

1.3 Tính:

- | | | | |
|--------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|------------------------------|
| a) $\sqrt{0,09}$ | b) $\sqrt{-16}$ | c) $\sqrt{0,25} \cdot \sqrt{0,16}$ | d) $\sqrt{(-4) \cdot (-25)}$ |
| e) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ | f) $\frac{6\sqrt{16}}{5\sqrt{0,04}}$ | g) $\sqrt{0,36} - \sqrt{0,49}$ | |

1.4 Trong các số sau, số nào có căn bậc hai:

- | | | | |
|---------------|--------|---------|----------------|
| a) $\sqrt{5}$ | b) 1,5 | c) -0,1 | d) $-\sqrt{9}$ |
|---------------|--------|---------|----------------|

1.5 Trong các biểu thức sau, biểu thức nào có căn bậc hai:

- | | |
|---------------------------------|-------------------------|
| a) $(x - 4)(x - 6) + 1$ | b) $(3 - x)(x - 5) - 4$ |
| c) $-x^2 + 6x - 9$ | d) $-5x^2 + 8x - 4$ |
| e) $x(x - 1)(x + 1)(x + 2) + 1$ | f) $x^2 + 20x + 101$ |

1.6 So sánh hai số sau (không dùng máy tính):

- a) 1 và $\sqrt{2}$ b) 2 và $\sqrt{3}$ c) 6 và $\sqrt{41}$
 d) 7 và $\sqrt{47}$ e) 2 và $\sqrt{2}+1$ f) 1 và $\sqrt{3}-1$
 g) $2\sqrt{31}$ và 10 h) $\sqrt{3}$ và -12 i) -5 và $-\sqrt{29}$
 j) $2\sqrt{5}$ và $\sqrt{19}$ k) $\sqrt{\sqrt{3}}$ và $\sqrt{2}$ l) $\sqrt{2\sqrt{3}}$ và $\sqrt{3\sqrt{2}}$
 m) $2 + \sqrt{6}$ và 5 n) $7 - 2\sqrt{2}$ và 4 o) $\sqrt{15} + \sqrt{8}$ và 7
 p) $\sqrt{37} - \sqrt{14}$ và $6 - \sqrt{15}$ q) $\sqrt{17} + \sqrt{26} + 1$ và $\sqrt{99}$

1.7 Dùng kí hiệu $\sqrt{\quad}$ viết nghiệm của các phương trình dưới đây, sau đó dùng máy tính để tính chính xác nghiệm với 3 chữ số thập phân.

- a) $x^2 = 2$ b) $x^2 = 3$ c) $x^2 = 3,5$ d) $x^2 = 4,12$
 e) $x^2 = 5$ f) $x^2 = 6$ g) $x^2 = 2,5$ h) $x^2 = \sqrt{5}$

1.8 Giải các phương trình sau:

- a) $x^2 = 25$ b) $x^2 = 30,25$ c) $x^2 = 5$
 d) $x^2 - \sqrt{3} = \sqrt{2}$ e) $x^2 - 5 = 0$ f) $x^2 + \sqrt{5} = 2$
 g) $x^2 = \sqrt{3}$ h) $2x^2 + 3\sqrt{2} = 2\sqrt{3}$ i) $(x-1)^2 = 1\frac{9}{16}$
 j) $x^2 = (1 - \sqrt{3})^2$ k) $x^2 = 27 - 10\sqrt{2}$ l) $x^2 + 2x = 3 - 2\sqrt{3}$

1.9 Giải phương trình:

- a) $\sqrt{x} = 3$ b) $\sqrt{x} = \sqrt{5}$ c) $\sqrt{x} = 0$ d) $\sqrt{x} = -2$

1.10 Trong các số: $\sqrt{(-7)^2}$, $\sqrt{(-7)^2}$, $-\sqrt{7^2}$, $-\sqrt{(-7)^2}$ thì số nào là căn bậc hai số học của 49 ?

1.11 Cho hai số dương a và b. Chứng minh rằng:

- a) Nếu $a > b$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ b) Nếu $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ thì $a > b$

1.12 Cho số dương a. Chứng minh rằng:

- a) Nếu $a > 1$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ b) Nếu $a < 1$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$

1.13 Cho số dương a. Chứng minh rằng:

- a) Nếu $a > 1$ thì $a > \sqrt{a}$ b) Nếu $a < 1$ thì $a < \sqrt{a}$

$$1. a \leq b \Leftrightarrow b \geq a$$

$$2. \left. \begin{array}{l} a \leq b \\ b \leq c \end{array} \right\} \Leftrightarrow a \leq c$$

$$3. a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c \text{ (cộng 2 vế với } c)$$

$$\rightarrow a + c \leq b \Leftrightarrow a \leq b - c \text{ (cộng 2 vế với } -c)$$

$$\rightarrow a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0 \text{ (cộng 2 vế với } -b)$$

$$\rightarrow a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0 \text{ (cộng 2 vế với } -b)$$

$$4. \left. \begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq d \end{array} \right\} \Leftrightarrow a + c \leq b + d$$

$$5. a \leq b \Leftrightarrow a.c \leq b.c \text{ (nếu } c > 0: \text{ giữ nguyên chiều)}$$

$$a \leq b \Leftrightarrow a.c \geq b.c \text{ (nếu } c < 0: \text{ đổi chiều)}$$

$$6. \left. \begin{array}{l} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow a.c > b.d$$

$$7. a > b > 0 \Leftrightarrow a^n > b^n \text{ (} n \in \mathbb{N}^* \text{)}$$

$$8. a > b > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

B - Căn thức bậc hai. Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

1. Căn thức bậc hai:

✓ Nếu A là một biểu thức đại số thì \sqrt{A} gọi là căn thức bậc hai của A .

A được gọi là **biểu thức lấy căn** hay **biểu thức dưới dấu căn**.

✓ \sqrt{A} các định (có nghĩa) khi $A \geq 0$

⊗ **Chú ý:**

a) Điều kiện có nghĩa của một số biểu thức:

▪ $A(x)$ là một đa thức $\Rightarrow A(x)$ luôn có nghĩa.

▪ $\frac{A(x)}{B(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow B(x) \neq 0$

▪ $\sqrt{A(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A(x) \geq 0$

▪ $\frac{1}{\sqrt{A(x)}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A(x) > 0$

b) Với $M > 0$, ta có:

▪ $X^2 \leq M^2 \Leftrightarrow |X| \leq |M| \Leftrightarrow -M \leq X \leq M$

▪ $X^2 \geq M^2 \Leftrightarrow |X| \geq |M| \Leftrightarrow X \leq -M$ hoặc $X \geq M$

2. Hằng đẳng thức $\sqrt{(A)^2} = |A|$

✓ **Định lí:** Với mọi số a , ta có: $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{khi } a \geq 0 \\ -a & \text{khi } a < 0 \end{cases}$

✓ **Chú ý:** Tổng quát, với A là một biểu thức đại số, ta cũng có:

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$$

1.14 Tìm x để biểu thức sau có nghĩa:

1. a) $\sqrt{-2x+3}$

b) $\sqrt{-5x}$

c) $\sqrt{-3x+7}$

d) $\sqrt{3x+7}$

e) $\sqrt{\frac{x}{3}}$

f) $\sqrt{-5x}$

g) $\sqrt{4-x}$

h) $\sqrt{1+x^2}$

i) $\sqrt{\frac{-5}{x^2+6}}$

j) $\sqrt{\frac{2}{x^2}}$

k) $\sqrt{\frac{1}{-1+x}}$

l) $\sqrt{\frac{4}{x+3}}$

m) $\sqrt{4x^2}$

n) $\sqrt{-3x^2}$

o) $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$

P) $\sqrt{-x^2 - 2x - 1}$

2. a) $\sqrt{-x^2 + 4x - 5}$

b) $\sqrt{x^2 + 2x + 2}$

c) $\frac{1}{\sqrt{4x^2 - 12x + 9}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 8x + 15}}$

f) $\frac{1}{\sqrt{3x^2 - 7x + 20}}$

3. a) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2 - 9}$

b) $\sqrt{x-2} + \frac{1}{x-5}$

c) $\frac{2}{x^2 - 9} - \sqrt{5 - 2x}$

d) $\sqrt{2x-4} + \sqrt{8-x}$

e) $\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{9-x^2}$

f) $\sqrt{x^2 - 4} + 2\sqrt{x-2}$

4. a) $\sqrt{(x-1)(x-3)}$

b) $\sqrt{\frac{4}{x+3}}$

c) $\sqrt{\frac{2+x}{5-x}}$

d) $\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

1.15 Tính

a) $5\sqrt{(-2)^4}$

b) $-4\sqrt{(-3)^6}$

c) $5\sqrt{\sqrt{(-5)^8}}$

d) $-0,4\sqrt{(-0,4)^2}$

e) $\sqrt{(0,1)^2}$

f) $\sqrt{(-0,3)^2}$

g) $-\sqrt{(-1,3)^2}$

h) $2\sqrt{(-2)^4} + 3\sqrt{(-2)^8}$

1.16 Chứng minh rằng:

a) $9 + 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 2)^2$

b) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = -2$

c) $23 - 8\sqrt{7} = (4 - \sqrt{7})^2$

d) $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = 3$

1.17 Rút gọn biểu thức:

1. a) $\sqrt{(4 - 3\sqrt{2})^2}$

b) $\sqrt{(2 + \sqrt{5})^2}$

c) $\sqrt{(4 + \sqrt{2})^2}$

d) $2\sqrt{3} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$

e) $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$

f) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}$

g) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

h) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$

2. a) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

b) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$

d) $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$

e) $\sqrt{22-12\sqrt{2}}$

f) $\sqrt{10-4\sqrt{6}}$

g) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$

h) $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}}$

3. a) $\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$

b) $\sqrt{11+6\sqrt{2}} - 3 + \sqrt{2}$

c) $\sqrt{11-6\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}}$

d) $\sqrt{11-6\sqrt{3}} + \sqrt{13-4\sqrt{3}}$

e) $(\sqrt{3}+4)\sqrt{19-8\sqrt{3}}$

f) $\sqrt{8+2\sqrt{7}} \sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{2}}$

g) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$

h) $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}}$

4. a) $\sqrt{6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$

b) $\sqrt{6-2\sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}$

c) $\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$

d) $\sqrt{23-6\sqrt{10+4\sqrt{3-2\sqrt{2}}}}$

5. a) $\frac{x^2-5}{x+\sqrt{5}}$

b) $\frac{x^2+2\sqrt{2}x+2}{x^2-2}$

1.18 Rút gọn biểu thức sau (loại bỏ dấu căn và dấu trị tuyệt đối):

1. a) $\sqrt{9x^2} - 2x$ với $x < 0$

b) $2\sqrt{x^2}$ với $x \geq 0$

c) $3\sqrt{(x-2)^2}$ với $x < 2$

d) $2\sqrt{x^2} - 5x$ với $x < 0$

e) $\sqrt{25x^2} + 3x$ với $x \geq 0$

f) $\sqrt{9x^4} + 3x^2$ với x bất kỳ

g) $x - 4 + \sqrt{16 - 8x + x^2}$ với $x > 4$

2. a) $A = \sqrt{1-4a+4a^2} - 2a$

b) $B = \sqrt{4x^2-12x+9} + 2x - 1$

c) $C = \frac{5-x}{\sqrt{x^2-10x+25}}$

d) $D = \sqrt{(x-1)^2} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$

e) $E = \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$

f) $F = x^2 - \sqrt{x^4+8x^2+16}$

1.19 Chứng tỏ: $x + 2\sqrt{2x-4} = (\sqrt{2} + \sqrt{x-2})^2$ với $x \geq 2$

Áp dụng rút gọn biểu thức sau: $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}$ với $x \geq 2$

1.20 Rút gọn biểu thức sau (loại bỏ dấu căn và dấu trị tuyệt đối):

a) $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$ với $x \geq 4$

b) $\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}$ với $x \geq 3$

c) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ với $x \geq 1$

d) $\sqrt{x-2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2\sqrt{x+1}}$ với $x \geq 0$

1.21 Với giá trị nào của a và b thì:

a) $\frac{1}{\sqrt{a^2-2ab+b^2}} = \frac{1}{b-a}$? b) $\sqrt{a^2(b^2-2b+1)} = a(1-b)$?

1.22 So sánh hai số sau (không dùng máy tính):

a) 9 và $6 + 2\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và 3

c) 16 và $9 + 4\sqrt{5}$ d) $\sqrt{11} - \sqrt{3}$ và 2

1.23 Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức:

a) $A = \sqrt{9x^2 - 12x + 4} + 1 - 3x$ tại $x = \frac{1}{3}$

b) $B = \sqrt{2x^2 - 6x\sqrt{2} + 9}$ tại $x = 3\sqrt{2}$

1.24 Giải phương trình:

a) $\sqrt{9x^2} = 2x + 1$ b) $\sqrt{x^4} = 7$

c) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3x - 1$ d) $\sqrt{x^2} = 7$

e) $\sqrt{x^2} = |-8|$ f) $\sqrt{1-4x+4x^2} = 5$

g) $\sqrt{x^4} = 9$ h) $\sqrt{(x+2)^2} = 2x+1$

i) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 5$ j) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = x - 3$

k) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ l) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = \sqrt{9x^2 - 24x + 16}$

1.25 Phân tích thành nhân tử:

a) $x^2 - 7$ b) $x^2 - 3$ c) $x^2 - 2\sqrt{13}x + 13$

d) $x^2 - \sqrt{3}$ e) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$ f) $x^2 + 2\sqrt{5}x + 5$

1.26 Với n là số tự nhiên, chứng minh:

$$\sqrt{(n+1)^2} + \sqrt{n^2} = (n+1)^2 - n^2$$

Viết đẳng thức trên khi n là 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.

1.27 Cho ba số a, b, c khác 0 và $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$

1.28 Tính: $\sqrt{1+2013^2 + \frac{2013^2}{2014^2} + \frac{2013}{2014}}$.

1.29 Chứng minh bất đẳng thức Côsi (Cauchy):

$$x + y \geq 2 \sqrt{xy}$$

Dấu “=” xảy ra khi nào ?

Áp dụng: Chứng minh rằng với x, y, z là các số dương, ta có:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}$$

Chuyện vui Toán học: Câu chuyện số 1

Một chủ doanh nghiệp đi về quê chơi cùng 1 người bạn là dân toán. Họ thấy một đàn bò rất lớn trên một đồng cỏ.

Anh doanh nghiệp nói:

- *Nhiều bò quá, tôi chưa bao giờ thấy nhiều thế này, có lẽ phải hàng nghìn con.*

Anh bạn toán học trả lời :

- *Đúng đấy, có cả thấy 2428 con.*
- *'Trời, làm sao mà anh lại đếm được nhanh thế? - Anh chủ DN hỏi.*

Anh toán học trả lời:

- *À, tôi đếm tất cả chân rồi chia cho 4 là xong!*

C - Khai phương một tích. Nhân các căn thức bậc hai.

D - Khai phương một thương. Chia các căn thức bậc hai

$$1. \text{ Với } A \geq 0, B \geq 0: \sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$$

$$2. \text{ Với } A \geq 0, B > 0: \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$$

1.30 Tính:

1. a) $\sqrt{0,09.64}$ b) $\sqrt{2^4 \cdot (-7)^2}$ c) $\sqrt{12.1.360}$
d) $\sqrt{2^2.3^4}$ e) $\sqrt{45.80}$ f) $\sqrt{75.48}$
g) $\sqrt{90.6,4}$ h) $\sqrt{2,5.14,4}$
2. a) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{63}$ b) $\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{30} \cdot \sqrt{48}$ c) $\sqrt{0,4} \cdot \sqrt{6,4}$
d) $\sqrt{2,7} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{1,5}$ e) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{40}$ f) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$
g) $\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}$ h) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{162}$
3. a) $\sqrt{13^2 - 12^2}$ b) $\sqrt{17^2 - 8^2}$ c) $\sqrt{117^2 - 108^2}$
d) $\sqrt{313^2 - 312^2}$ e) $\sqrt{6,8^2 - 3,2^2}$ f) $\sqrt{21,8^2 - 18,2^2}$
g) $\sqrt{146,5^2 - 109,5^2 + 27.256}$
4. a) $\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ b) $\sqrt{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}$
c) $(\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}})^2$ d) $(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot (1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})$
5. a) $\sqrt{\frac{9}{169}}$ b) $\sqrt{\frac{25}{144}}$ c) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$
d) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$ e) $\sqrt{0,0025}$ f) $\sqrt{3,6.16,9}$
6. a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ b) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$ c) $\frac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}}$
d) $\frac{\sqrt{6^5}}{\sqrt{2^3 \cdot 3^5}}$ e) $\frac{\sqrt{2300}}{\sqrt{23}}$ f) $\frac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{0,5}}$
7. a) $\sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{9} \cdot 0,01}$ b) $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}$
c) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$ d) $\sqrt{1,44.1,21 - 1,44.0,4}$
8. a) $\frac{2\sqrt{12} - 3\sqrt{27} + 5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

1.31 Tính:

Với $m, n > 0$ thỏa $m + n = A$ và $m \cdot n = B$
ta có: $A \pm 2\sqrt{B} = m + n \pm 2\sqrt{m \cdot n} = (\sqrt{m} \pm \sqrt{n})^2$

1. a) $\sqrt{8+2\sqrt{15}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}$ b) $\sqrt{17-2\sqrt{72}} + \sqrt{19+2\sqrt{18}}$

c) $\sqrt{12-2\sqrt{32}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{29-2\sqrt{180}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}$

e) $\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{2}$ f) $\sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{6-\sqrt{11}} + 3\sqrt{2}$

g) $\sqrt{8-2\sqrt{15}} - \sqrt{7-2\sqrt{10}}$ h) $\sqrt{10-2\sqrt{21}} - \sqrt{9-2\sqrt{14}}$

i) $\sqrt{8-3\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}$ j) $\sqrt{5+\sqrt{21}} - \sqrt{5-\sqrt{21}}$

k) $\sqrt{9-3\sqrt{5}} - \sqrt{9+3\sqrt{5}}$ l) $(\sqrt{10}-\sqrt{2})\sqrt{4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

2. a) $\sqrt{(4-2\sqrt{3})(13+4\sqrt{3})}$ b) $(\sqrt{3}-2)(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{3}+2}$

c) $(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})\sqrt{3-\sqrt{5}}$ d) $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$

e) $\sqrt{4-\sqrt{15}} + \sqrt{4+\sqrt{15}} - 2\sqrt{3-\sqrt{5}}$

f) $\sqrt{4+\sqrt{8}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

g) $(5+4\sqrt{2}) \cdot (3+2\sqrt{1+\sqrt{2}}) \cdot (3-2\sqrt{1-\sqrt{2}})$

h) $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

3*. A = $\sqrt{\sqrt{7}+5} - 2\sqrt{\sqrt{7}+4} + 1$ ĐS: $A = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{7}+1)}{2}$

B = $\sqrt{4+\sqrt{3}+\sqrt{6\sqrt{3}+15}} - \sqrt{\sqrt{3}+\frac{5}{2}}$ ĐS: $B = \frac{\sqrt{6}}{2}$

C = $\sqrt{1+2\sqrt{5\sqrt{5}-11}} - \sqrt{\sqrt{5}-2}$ ĐS: $C = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{2}$

D = $\frac{\sqrt{1+2\sqrt{27\sqrt{2}-38}} - \sqrt{5-3\sqrt{2}}}{\sqrt{3\sqrt{2}-4}}$ ĐS: $D = 1$

E = $\left(\sqrt{5-2\sqrt{2\sqrt{2}-2}} + \sqrt{2}-1\right)\sqrt{\sqrt{2}-1}$ ĐS: $E = \sqrt{2}$

1.32 Phân tích thành tích số:

a) $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ b) $\sqrt{6} + \sqrt{55} - \sqrt{10} - \sqrt{33}$

1.33 Rút gọn biểu thức sau (loại bỏ dấu căn và dấu trị tuyệt đối):

1. a) $\sqrt{0,36x^2}$ với $x < 0$ b) $\sqrt{x^4(3-x)^2}$ với $x \geq 3$

c) $\sqrt{27.48(1-x)^2}$ với $x > 1$ d) $\frac{1}{x-y} \cdot \sqrt{x^4(x-y)^2}$ $a, b > 0$

e) $\sqrt{4.(x-3)^2}$ với $x \geq 3$ f) $\sqrt{9.(x-2)^2}$ với $x < 2$

g) $\sqrt{x^2.(x+1)^2}$ với $x > 0$ h) $\sqrt{x^2(x-1)^2}$ với $x < 0$

i) $\sqrt{\frac{2x}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3x}{8}}$ với $x \geq 0$ j) $\sqrt{13x} \sqrt{\frac{52}{x}}$ với $x > 0$

k) $\sqrt{5x} \cdot \sqrt{45x} - 3x$ với x bất kỳ l) $(3-x)^2 - \sqrt{0,2} \cdot \sqrt{180x^2}$, $\forall x$

2. a) $\frac{\sqrt{63y^3}}{\sqrt{7y}}$ với $y > 0$ b) $\frac{\sqrt{48x^3}}{\sqrt{3x^5}}$ với $x > 0$

c) $\frac{\sqrt{45mn^2}}{\sqrt{20m}}$ với $m > 0, n > 0$ d) $\frac{\sqrt{16x^4y^6}}{\sqrt{128x^6y^6}}$ với $x < 0$ và $y \neq 0$

e) $\frac{x}{y} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y^4}}$ với $x > 0, y \neq 0$ f) $2y^2 \cdot \sqrt{\frac{x^4}{4y^2}}$ với $y < 0$

g) $5xy \cdot \sqrt{\frac{25x^2}{y^6}}$ với $x < 0, y > 0$ h) $0,2x^3y^3 \cdot \sqrt{\frac{16}{x^4y^8}}$ với $x \neq 0, y \neq 0$

i) $xy^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{x^2y^4}}$ với $x < 0, y \neq 0$ j) $\sqrt{\frac{27(x-3)^2}{48}}$ với $x > 3$

k) $(x-y) \cdot \sqrt{\frac{xy}{(x-y)^2}}$ với $x < y, y < 0$

l) $\sqrt{\frac{9+12x+4x^2}{y^2}}$ với $x > -1,5$ và $y < 0$

1.34 Chứng minh:

a) $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$ b) $\sqrt{9-\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9+\sqrt{17}}=8$

c) $(\sqrt{2014}-\sqrt{2013}) \cdot (\sqrt{2014}+\sqrt{2013})=1$

d) $2\sqrt{2}(\sqrt{3}-2)+(1+2\sqrt{2})^2-2\sqrt{6}=9$

1.35 Rút gọn các biểu thức sau:

1. a) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2\sqrt{3}+\sqrt{28}}$ b) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

2. a) $\sqrt{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}}$ với $x \geq 0$ b) $\frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \sqrt{\frac{(y-2\sqrt{y}+1)^2}{(x-1)^4}}$, $x \neq 1, y \neq 1, y > 0$

1.36 Rút gọn rồi tính giá trị của các biểu thức sau:

1. a) $\sqrt{4(1+6x+9x^2)^2}$ tại $x = -\sqrt{2}$
 b) $\sqrt{9a^2(b^2+4-4b)}$ tại $a = 2, b = -\sqrt{3}$
2. a) $4x-8+\frac{\sqrt{x^3+2x^2}}{\sqrt{x+2}}$ tại $x = -\sqrt{2}$
 b) $\sqrt{\frac{(x-2)^4}{(3-x)^2} + \frac{x^2-1}{x-3}}$ (với $x < 3$) tại $x = 0,5$

1.37 So sánh hai số sau (không dùng máy tính):

- a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{3} + 2$ và $\sqrt{2} + \sqrt{6}$
 c) 16 và $\sqrt{15} \cdot \sqrt{17}$ d) 8 và $\sqrt{15} + \sqrt{17}$

1.38 So sánh $\sqrt{2012} + \sqrt{2014}$ và $2 \cdot \sqrt{2013}$

1.39 Giải phương trình:

1. a) $\sqrt{16x} = 8$ b) $\sqrt{4x} = \sqrt{5}$
 c) $\sqrt{4(x^2-2x+1)} - 6 = 0$ d) $\sqrt{9(x-1)x} = 21$
 e) $\sqrt{x-5} = 3$ f) $\sqrt{x-10} = -2$
 g) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{5}$ h) $\sqrt{4-5x} = 12$
2. a) $\sqrt{4x^2} = x+5$ b) $\sqrt{(x-3)^2} = 2x-1$
 c) $\sqrt{3x} = \sqrt{6}$ d) $\sqrt{7(x-1)} = \sqrt{21}$
3. a) $\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{50} = 0$ b) $\sqrt{2} + x - \sqrt{8} = 0$

1.40 Giải các phương trình:

- a) $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2$ và $\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$ b) $\sqrt{\frac{4x+3}{x+1}} = 3$ và $\frac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+1}} = 3$

1.41 Cho hai biểu thức: $A = \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-3}$ và $B = \sqrt{(x+2)(x-3)}$

- a) Tìm x để A có nghĩa. Tìm x để B có nghĩa.
 b) Với giá trị nào của x thì B có nghĩa còn A không có nghĩa.
 c) Với giá trị nào của x thì $A = B$.

1.42 Cho hai biểu thức: và $A = \sqrt{\frac{2x+3}{x-3}}$ $B = \frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x-3}}$.

- a) Tìm x để A có nghĩa. Tìm x để B có nghĩa.
 b) Với giá trị nào của x thì B có nghĩa còn A không có nghĩa.
 c) Với giá trị nào của x thì $A = B$.

Có 2 người bạn đang đi chơi trên khinh khí cầu (KKC), họ bị lạc hướng nên phải hạ thấp xuống để hỏi đường.

Khi thấy một anh ở dưới, một người hỏi :

- "*Chúng tôi đang ở đâu đấy?*".

Anh chàng dưới đất trả lời:

- "*Các anh đang ở trên một cái KKC*".

Người trên KKC hỏi tiếp:

- "*Anh là dân Toán à?*".
- "*Đúng rồi*".

Người bạn kia ngạc nhiên hỏi:

- "*Sao anh biết người ta là dân toán?*".

Anh bạn này bảo:

- "*Thì đấy, họ trả lời bao giờ cũng rất chính xác, nhưng lại không giúp được gì cả!*"

E - Biến đổi đơn giản căn thức bậc hai

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

$$\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B} = \begin{cases} A\sqrt{B} & \text{khi } A \geq 0 \\ -A\sqrt{B} & \text{khi } A < 0 \end{cases} \quad (B \geq 0)$$

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

- Với $A \geq 0$, ta có: $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$ ($B \geq 0$)

- Với $A < 0$, ta có: $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$ ($B \geq 0$)

3. Khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn:

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{A \cdot B}{B^2}} = \frac{\sqrt{A \cdot B}}{|B|} \quad \text{với } A \cdot B \geq 0, B \neq 0$$

4. Trục căn thức ở mẫu:

- Phân tích tử và mẫu thành nhân tử tối rút gọn cho nhân tử chung chứa căn thức (nếu có).

- Trường hợp mẫu là biểu thức dạng tích các căn thức và các số:

$$\frac{A}{B\sqrt{C}} = \frac{A\sqrt{C}}{B \cdot C} \quad (B \neq 0; C > 0)$$

- Nếu mẫu là một biểu thức dạng tổng có chứa căn, nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp của mẫu:

$$\Rightarrow \frac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2} \quad \text{với } A \geq 0, A \neq B^2$$

$$\Rightarrow \frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B} \quad \text{với } A \geq 0, B \geq 0, A \neq B^2$$

1.53 Đưa nhân tử ra ngoài dấu căn:

1. a) $\sqrt{54}$

b) $\sqrt{108}$

c) $0,1\sqrt{20000}$

d) $-0,05\sqrt{28800}$

2. a) $\sqrt{7x^2}$ với $x > 0$

b) $\sqrt{48y^4}$

c) $\sqrt{25x^3}$ với $x > 0$

d) $\sqrt{8y^2}$ với $y > 0$

1.58 Rút gọn các biểu thức sau:

a) $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{5}$

b) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5}$

c) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$

d) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$

e) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$

f) $\sqrt{72} - \sqrt{5\frac{1}{3}} + 4,5\sqrt{2\frac{2}{3}} + 2\sqrt{27}$

g) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84}$

h) $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \sqrt{54} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$

1.59 Rút gọn các biểu thức sau (biết $a > 0$, $b > 0$):

a) $5\sqrt{a} - 3\sqrt{25a^3} + 2\sqrt{36ab^2} - 2\sqrt{9a}$

b) $\sqrt{64ab^3} - 3\sqrt{12a^3b^3} + 2ab\sqrt{9ab} - 5b\sqrt{81a^3b}$

c) $2\sqrt{3a} - \sqrt{75a} + a\sqrt{\frac{13,5}{2a}} - \frac{2}{5}\sqrt{300a^3}$

1.60 Thực hiện các phép tính sau:

1. a) $\frac{13\sqrt{2} - 4\sqrt{6}}{24 - 4\sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}$

c) $\frac{9\sqrt{6} - 12\sqrt{3}}{3\sqrt{6} - 3\sqrt{3}}$

d) $\frac{\sqrt{45} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

e) $\frac{\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{2}}}{\sqrt{3\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}}$

f) $\frac{3 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{5}}$

2. a) $A = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

b) $B = \frac{\sqrt{6+\sqrt{35}}}{\sqrt{2}}$

c) $C = \frac{\sqrt{8-\sqrt{15}}}{\sqrt{30}-\sqrt{2}}$

3. a) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1} - \frac{5-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-4}$

b) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

c) $\frac{2\sqrt{8}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}-\sqrt{48}} - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{27}}{\sqrt{30}-\sqrt{2}}$

d) $\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1} + \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}$

e) $\frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{2}{\sqrt{3}+1}$

f) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$

g) $\frac{2\sqrt{3}-4}{\sqrt{3}-1} + \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

h) $\frac{5}{12(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})} - \frac{5}{12(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})}$

4. a) $\frac{1}{\sqrt{11-4\sqrt{7}}} - \frac{6}{\sqrt{32-10\sqrt{7}}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{12-\sqrt{140}}} - \frac{1}{\sqrt{8-\sqrt{60}}} - \frac{1}{\sqrt{10+\sqrt{84}}}$

$$c) \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}} + \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{21}}}$$

1.61 Chứng minh các số sau đây là số nguyên:

$$a) A = \frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}+6}{\sqrt{6}+1}$$

$$b) B = \left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}} \right) (\sqrt{6}+11)$$

$$c) C = \frac{2\sqrt{3+2\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}{\sqrt{3}-1} - 2\sqrt{3}$$

1.62 Chứng minh các số sau đây là số dương:

$$a) A = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} \quad C = \frac{\sqrt{1+\frac{2\sqrt{2}}{3}} + \sqrt{1-\frac{2\sqrt{2}}{3}}}{\sqrt{1+\frac{2\sqrt{2}}{3}} - \sqrt{1-\frac{2\sqrt{2}}{3}}}$$

$$b) B = \frac{23\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{14+5\sqrt{3}}} + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{14-5\sqrt{3}}}$$

1.63 Chứng tỏ rằng các số sau là số hữu tỉ:

$$a) \frac{2}{\sqrt{7}-5} - \frac{2}{\sqrt{7}+5} \quad b) \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$$

1.64 Các số sau đây có căn bậc hai không ?

$$a) A = \left(1 - \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) : \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + 2 \right)$$

$$b) B = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{5}} \right) : \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$c) C = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{5}{12} - \frac{1}{\sqrt{6}}}$$

1.65 Tìm x biết:

$$a) \sqrt{25x} = 35 \quad b) 3\sqrt{x} = \sqrt{12}$$

$$c) \sqrt{4x} \leq 162 \quad d) 2\sqrt{x} \geq \sqrt{10}$$

1.66 Giải các phương trình sau:

$$1. a) 2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} = 27 - 3\sqrt{3x} \quad b) 3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} = 28$$

$$2. a) \sqrt{x^2-9} - 3\sqrt{x-3} = 0 \quad b) \sqrt{x^2-4} - 2\sqrt{x+2} = 0$$

1.67 Khử mẫu của các biểu thức dưới dấu căn (giả thiết rằng các biểu thức đã cho có nghĩa):

$$a) \sqrt{\frac{1}{600}}; \quad \sqrt{\frac{11}{540}}; \quad \sqrt{\frac{3}{50}}; \quad \sqrt{\frac{5}{98}}; \quad \sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{27}}$$

b) $ab\sqrt{\frac{a}{b}}$; $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$; $\sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}}$; $\sqrt{\frac{9a^3}{36b}}$; $3xy\sqrt{\frac{2}{xy}}$

c) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{\frac{x^2}{5}}$; $\sqrt{\frac{3}{x}}$; $\sqrt{x^2 - \frac{x^2}{7}}$; $3xy\sqrt{\frac{2}{xy}}$

1.68 Trục căn thức ở mẫu của các biểu thức sau (giả thiết rằng các biểu thức đã cho có nghĩa):

a) $\frac{5}{\sqrt{10}}$; $\frac{1}{3\sqrt{3}}$; $\frac{5}{2\sqrt{5}}$; $\frac{2\sqrt{2}+2}{5\sqrt{2}}$; $\frac{y+b\sqrt{y}}{b\sqrt{y}}$

b) $\frac{3}{\sqrt{3}+1}$; $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$; $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$; $\frac{b}{3+\sqrt{b}}$; $\frac{p}{2\sqrt{p}-1}$

c) $\frac{3}{\sqrt{3}+1}$; $\frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}$; $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; $\frac{2ab}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

d) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; $\frac{26}{5-2\sqrt{3}}$; $\frac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}}$; $\frac{9-2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$.

e) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$; $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+2}$.

1.69 Phân tích thành nhân tử:

a) $ab + b\sqrt{a} + \sqrt{a} + 1$ b) $\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3} + \sqrt{x^2y} - \sqrt{xy^2}$

1.70 Giải phương trình:

a) $\sqrt{2x+3} = 1 + \sqrt{2}$ b) $\sqrt{x+1} = \sqrt{5} + 3$ c) $\sqrt{3x-2} = 2 - \sqrt{3}$

1.71 Giải các bất phương trình sau và biểu diễn nghiệm trên trục số:

a) $\sqrt{x-2} \geq \sqrt{3}$ b) $\sqrt{x-2} \geq \sqrt{3}$

1.72 Với n là số tự nhiên, chứng minh: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

Áp dụng tính: $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$

1.73 Cho các biểu thức :

$$A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}; \quad B = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{24}}$$

a) Tính giá trị của A. b) Chứng minh rằng $B > 8$.

1.74 Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$

b) $B = \frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{24}-\sqrt{25}}$

F - Rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai

Cho $x \geq 0, y \geq 0$. Ta có các công thức biến đổi sau:

$$1. x = (\sqrt{x})^2; x\sqrt{x} = (\sqrt{x})^3$$

$$2. x \pm \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} \pm 1)$$

$$3. x\sqrt{y} \pm y\sqrt{x} = \sqrt{xy}(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})$$

$$4. x - y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

$$5. x \pm 2\sqrt{xy} + y = (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2$$

$$6. x\sqrt{x} \pm y\sqrt{y} = (\sqrt{x})^3 \pm (\sqrt{y})^3 = (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})(x \mp \sqrt{xy} + y)$$

1.75 Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \frac{\sqrt{x^3} - 1}{\sqrt{x} - 1} = x + \sqrt{x} + 1 \text{ với } x > 0, x \neq 1$$

$$b) \frac{(x\sqrt{y} + y\sqrt{x})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{xy}} = x - y \text{ với } x, y > 0$$

1.76 Rút gọn:

$$a) A = \frac{x + 2\sqrt{3x} + 3}{x\sqrt{x} + 3\sqrt{3}} \text{ với } x \geq 0$$

$$b) B = \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \text{ với } x \geq 0, y \geq 0 \text{ và } x \neq y$$

$$c) C = \frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \text{ (với } a \geq 0, b \geq 0, a \neq b)$$

$$d) D = \frac{(\sqrt{a} + 1)(a - \sqrt{ab})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(a - b)(a\sqrt{a} + a)} \text{ (với } a > 0, b \geq 0, a \neq b)$$

$$e) E = \frac{\sqrt{a} - 1}{a\sqrt{a} - a + \sqrt{a}} : \frac{1}{a^2 + \sqrt{a}} \text{ (với } a > 0)$$

$$f) F = \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} + \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) : \frac{\sqrt{xy} + 1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \text{ (với } x \geq 0, y \geq 0, x \neq y)$$

$$g) G = \frac{x}{\sqrt{xy} + y} + \frac{y}{\sqrt{xy} - x} - \frac{x + y}{\sqrt{xy}} \text{ (với } xy \geq 0, x \neq y)$$

$$h) H = \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}}{a - b} \text{ (với } a \geq 0, b \geq 0, a \neq b)$$

$$i) I = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \text{ (với } x \geq 0, y \geq 0, x \neq y)$$

j) $J = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right)$ (với $x > 0, x \neq 1$)

k) $K = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{x}} + \frac{2}{x-1} \right)$ (với $x > 0, x \neq 1$)

l) $L = \left(\frac{\sqrt{a}-2}{a-1} - \frac{\sqrt{a}+2}{a+2\sqrt{a}+1} \right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$ (với $a > 0, a \neq 1$)

m) $M = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$
(với $x \geq 0, x \neq 4$)

n) $N = \left(\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right) \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y} \right)^2$ (với $x \geq 0, y \geq 0, x \neq y$)

o) $O = \left(\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right) : \left(\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right)^2$ (với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$)

p) $P = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \sqrt{x} \right)$ (với $x \geq 0, x \neq 1$)

q) $Q = \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1-\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}} \right) : \frac{x+xy}{1-xy}$ (với $x > 0, y > 0, xy \neq 1$)

r) $R = \left(\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \right) : (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ (với $x \geq 0, y \geq 0, x \neq y$)

s) $S = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-4} - \frac{\sqrt{x}-1}{x+4\sqrt{x}+4} \right) \cdot \frac{x\sqrt{x}+2x-4\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$ (với $x > 0, x \neq 4$)

t) $T = \frac{x\sqrt{x}-2x+28}{x-3\sqrt{x}-4} - \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+8}{4-\sqrt{x}}$ (với $x \geq 0, x \neq 16$)

1.77 Cho $\sqrt{16-2x+x^2} - \sqrt{9-2x+x^2} = 1$.

Tính $A = \sqrt{16-2x+x^2} + \sqrt{9-2x+x^2}$

1.78 Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}$ với $a > 0$ và $b > 0$

b) $\sqrt{\frac{m}{1-2x+x^2}} + \sqrt{\frac{4m+8mx+4mx^2}{81}}$ với $m > 0$ và $x > 1$

1.79 Rút gọn rồi so sánh giá trị của biểu thức sau với 1:

$$M = \left(\frac{1}{a - \sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a} - 1} \right) : \frac{\sqrt{a} + 1}{a - 2\sqrt{a} + 1} \text{ với } a > 0 \text{ và } a \neq 1$$

1.80 Giải các phương trình sau:

1. a) $\sqrt{4x+20} - 3\sqrt{5+x} + \frac{4}{3}\sqrt{9x+45} = 6$

b) $\sqrt{25x-25} - \frac{15}{2}\sqrt{\frac{x-1}{9}} = 6 + \sqrt{x-1}$

c) $\sqrt{4x-20} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} + \sqrt{x-5} = 4$

d) $\sqrt{16x+16} - \sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} = 16 - \sqrt{x+1}$.

2. a) $\sqrt{1-x^2} = x-1$

b) $\sqrt{x^2+4x+4} = x-2$

c) $\sqrt{2x^2+7} = 2-x$

d) $\sqrt{x^2+4x+3} = x-2$

e) $\sqrt{x^2-4} + 2 - x = 0$

f) $\sqrt{x^2-4x+4} = 2x-1$

g) $\sqrt{(2x+4)(x-1)} = x+1$

h) $\sqrt{2x^2+4x-1} = x-2$.

3. a) $\sqrt{2x+9} = \sqrt{5-4x}$

b) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1}$

c) $\sqrt{x+3} = \sqrt{x+3}$

d) $\sqrt{x^2-x} = \sqrt{3-x}$

e) $\sqrt{x^2+3x+1} = \sqrt{x+1}$

f) $\sqrt{2x^2-3} = \sqrt{4x-3}$

g) $\sqrt{x^2-x-6} = \sqrt{x-3}$

h) $\sqrt{9x^2-4x} = \sqrt{2x-3}$.

4. a) $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} = 5$

b) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$

c) $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}} = 1$

d) $\sqrt{x+2-3\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 2\sqrt{2}$.

5. a) $\sqrt{x^2-3x+5} + x^2 - 3x = 7$

b) $5\sqrt{x^2+5x+28} = x^2 + 5x + 4$

c) $2\sqrt{2x^2-3x+5} = 2x^2 - 3x - 6$

d) $\sqrt{2x^2+3x+9} + 2x^2 + 3x = 33$

1.81 Chứng minh đẳng thức sau:

2. a) $\left(x \cdot \sqrt{\frac{6}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{3} + \sqrt{6x}} \right) : \sqrt{6x} = 2\frac{1}{3}$ với $x > 0$

b) $\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2 = 1$ với $a > 0$ và $a \neq 1$

c) $\frac{a+b}{b^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = |a|$ với $a+b > 0$ và $b \neq 0$

1.82 Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$

a) Rút gọn P nếu $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

b) Tìm x để $P = 2$.

1.83 Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1}\right)$

a) Chứng tỏ rằng Q xác định với $a > 0$, $a \neq 4$ và $a \neq 1$.

b) Tìm giá trị của a để Q dương.

1.84 Cho biểu thức: $Q = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - 3 \frac{\sqrt{x}-1}{x-5\sqrt{x}+6}$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn Q.

b) Tìm các giá trị của x để $Q < -1$.

c) Tìm các giá trị của $x \in \mathbb{Z}$ sao cho $2Q \in \mathbb{Z}$.

1.85 Với 3 số a, b, c không âm. Chứng minh:

$$a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$$

Hãy mở rộng kết quả trên cho trường hợp 4 số, 5 số không âm.

G - Căn bậc ba

1. Định nghĩa:

Căn bậc ba của một số a là số x sao cho $x^3 = a$

2. Tính chất:

a) $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$

b) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$

c) Với $b \neq 0$, ta có $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

1.86 Tính:

a) $\sqrt[3]{512}$; $\sqrt[3]{-729}$; $\sqrt[3]{0,064}$; $\sqrt[3]{0,216}$; $\sqrt[3]{-0,008}$.

b) $\sqrt[3]{-343}$; $\sqrt[3]{0,027}$; $\sqrt[3]{1,331}$; $\sqrt[3]{-0,512}$; $\sqrt[3]{125}$.

1.87 So sánh:

a) 5 và $\sqrt[3]{123}$

b) $5\sqrt[3]{6}$ và $6\sqrt[3]{5}$

c) $2\sqrt[3]{3}$ và $\sqrt[3]{23}$

d) 33 và $3\sqrt[3]{1333}$

1.88 Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{x} = -1,5$

b) $\sqrt[3]{x-5} = 0,9$

1.89 Giải các bất phương trình sau và biểu diễn nghiệm trên trục số:

a) $\sqrt[3]{x} \geq 2$

b) $\sqrt[3]{x} \leq -1,5$

1.90 Chứng minh rằng với a, b bất kỳ thì:

a) $\sqrt[3]{a^3} = a$

b) $(\sqrt[3]{a})^3 = a$

c) $\sqrt[3]{a^3b} = a\sqrt[3]{b}$

H - Ôn tập chương 1

1.91 Tính giá trị của các biểu thức sau bằng cách biến đổi, rút gọn thích hợp:

a) $\sqrt{\frac{25}{81} \cdot \frac{16}{49} \cdot \frac{196}{9}}$

b) $\sqrt{3 \frac{1}{16} \cdot 2 \frac{14}{25} \cdot 2 \frac{34}{81}}$

c) $\frac{\sqrt{640} \cdot \sqrt{34,3}}{\sqrt{567}}$

d) $\sqrt{21,6} \cdot \sqrt{810} \cdot \sqrt{11^2 - 5^2}$

1.92 Rút gọn các biểu thức sau:

a) $(\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10})(\sqrt{2} - 3\sqrt{0,4})$

b) $0,2\sqrt{(-10)^2} \cdot 3 + 2\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2}$

c) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{4}{5}\sqrt{\frac{4}{5}}\right) : \frac{8}{15}\sqrt{\frac{1}{8}}$

d) $2\sqrt{(\sqrt{2} - 3)^2} + \sqrt{2(-3)^2} - 5\sqrt{(-1)^4}$

e) $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

f) $\sqrt{15 - 6\sqrt{6}} + \sqrt{33 - 12\sqrt{6}}$

g) $(5\sqrt{200} - 3\sqrt{450} + 2\sqrt{50}) : \sqrt{10}$

h) $\sqrt{6 - 2\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{18 - \sqrt{128}}}}$

i) $\frac{2\sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$

j) $\left(\frac{1}{\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10} + 2} + 1\right) : (\sqrt{2} + 1)^2$

k) $\sqrt{5}(\sqrt{6} + 1) : \frac{\sqrt{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}}$

l) $\sqrt{\frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}} : \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$

m) $\frac{(5 + 2\sqrt{6})(49 - 20\sqrt{6}) - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}}$

n) $\sqrt{8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

o) $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$

p) $(\sqrt{5} + 3)(\sqrt{10} - \sqrt{2})\sqrt{3 - \sqrt{5}}$

1.93 Phân tích thành nhân tử (với x, y, a, b dương và $a > b$)

a) $3 + \sqrt{x} + 9 - x$ b) $xy + y\sqrt{x} + \sqrt{x} + 1$

c) $\sqrt{xa} - \sqrt{by} + \sqrt{bx} - \sqrt{ay}$ d) $\sqrt{a+b} + \sqrt{a^2 - b^2}$

1.94 Rút gọn rồi tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt{-9a} - \sqrt{9 + 12a + 4a^2}$ với $a = -9$

b) $1 + \frac{3m}{m-2} \sqrt{m^2 - 4m - 4}$ với $m < 0$

c) $\sqrt{1 - 10a + 25a^2} - 4a$ với $a = \sqrt{2}$

d) $4x - \sqrt{9x^2 + 6x + 1}$ với $x = -\sqrt{3}$

1.95 Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{2}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) : \left(\sqrt{x} - 2 + \frac{10-x}{\sqrt{x}+2} \right)$

b) $B = \left(\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right) : (x-y) + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

c) $C = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right)$

d) $D = \sqrt{\frac{a+x^2}{x} - 2\sqrt{a}} - \sqrt{\frac{a+x^2}{x} + 2\sqrt{a}}$ với $a > 0, x > 0$.

1.96 Giải các phương trình sau:

a) $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \sqrt{15x} + 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$ b) $\frac{3\sqrt{x}+1}{7\sqrt{x}-5} = \frac{8}{15}$

c) $\sqrt{(2x-1)^2} = 3$ d) $\sqrt{2-x} + \sqrt{8-4x} = 3$

1.97 Chứng minh các đẳng thức sau:

1. a) $\left(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2} - \frac{\sqrt{216}}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = -1,5$

b) $\left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = -2$

c) $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6}$

$$d) \sqrt{\frac{4}{(2-\sqrt{5})^2}} - \sqrt{\frac{4}{(2+\sqrt{5})^2}} = 8$$

$$e) \left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{6} + 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} - 4 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{6} + 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} + 4 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \right) = -\sqrt{2}$$

$$2. a) \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = a - b \quad (\text{với } a, b > 0 \text{ và } a \neq b)$$

$$b) \left(1 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1} \right) \cdot \left(1 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} \right) = 1 - a \quad (\text{với } a > 0 \text{ và } a \neq 1)$$

$$c) \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2\sqrt{a} - 2\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{a} + 2\sqrt{b}} - \frac{2b}{b - a} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \quad (\text{với } a, b > 0 \text{ và } a \neq b)$$

$$d) \left(1 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1} \right) \cdot \left(1 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} \right) = 1 - a \quad (\text{với } a, b > 0 \text{ và } a \neq b)$$

1.98 Tìm x nguyên để $\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3}$ nhận giá trị nguyên.

1.99 a) Chứng tỏ: $x - 4\sqrt{x-4} = (\sqrt{x-4} - 2)^2$

b) Tìm điều kiện xác định và rút gọn:

$$A = \sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}}$$

1.100 Cho các biểu thức: $A = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ và $B = \sqrt{x+4} + \sqrt{x-1}$

a) Tìm điều kiện xác định của A và B.

b) Chứng tỏ $A \geq 1$ và $B \geq \sqrt{5}$

c) Tìm x để $A = 1, B = 2$.

1.101 Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$a) A = \frac{1}{x - \sqrt{x} + 1} \quad b) B = \sqrt{4x - x^2} + 21$$

$$c) C = 1 + \sqrt{-9x^2 + 6x} \quad d) D = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$$

1.102 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$a) A = \sqrt{4x^2 + 4x + 2} \quad b) B = \sqrt{2x^2 - 4x + 5}$$

$$c) P = \frac{x-3}{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}} \quad d) Q = x - 2\sqrt{x+2}$$

1.103 Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{4x^2 - 4x + 1}}{4x - 2}$. Chứng tỏ $|A| = 0,5$ với $x \neq 0,5$.

1.104 Cho $Q = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right) : \frac{b}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$ với $a > b > 0$

- a) Rút gọn Q
- b) Tìm giá trị của Q khi $a = 3b$.

1.105 Cho biểu thức: $A = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$

- a) Tìm điều kiện để A có nghĩa.
- b) Khi A có nghĩa, chứng tỏ giá trị A không phụ thuộc vào a.

1.106 Cho biểu thức:

$$Q = -\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3-1}} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\right) \left(\frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1$$

- a) Rút gọn Q.
- b) Tìm giá trị của x để $Q = 3$.

1.107 Cho biểu thức:

$$C = \left(\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{x+9}{9-x}\right) : \left(\frac{3\sqrt{x}+1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 9.$$

- a) Rút gọn C
- b) Tìm giá trị của x để $C < -1$.

1.108 Cho biểu thức: $A = 6x^2 - 5x\sqrt{y} + y$.

- a) Phân tích biểu thức A thành nhân tử.
- b) Tính giá trị của A khi $x = -\frac{2}{3}$, $y = \frac{b}{4+\sqrt{7}}$.

1.109 Cho biểu thức: $B = \frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}$.

- a) Tìm điều kiện xác định của B.
- b) Rút gọn B.
- c) Tính giá trị của B khi $x = 10 - \sqrt{56}$
- d) Tìm giá trị nhỏ nhất của B.

1.110 Cho biểu thức: $C = \frac{6-x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$.

- a) Tìm điều kiện xác định của C.
- b) Rút gọn B.

c) Tìm giá trị lớn nhất của C.

1.111 Cho biểu thức: $P = \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x^3-x}}{\sqrt{x-1}}$.

a) Tìm điều kiện xác định của P.

b) Rút gọn P.

c) Tính giá trị của P khi $x = \frac{53}{9-2\sqrt{7}}$

d) Giải phương trình : $P = 16$.

1.112 Cho biểu thức: $Q = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x-x-1}}\right)$.

a) Tìm điều kiện xác định của Q.

b) Rút gọn Q.

c) Tính giá trị của Q khi $x = 4 + 2\sqrt{3}$

d) Giải bất phương trình : $Q > 1$.

1.113 Cho biểu thức: $A = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$.

a) Rút gọn A.

b) Biết $a > 0$, hãy so sánh A với $|A|$

c) Tìm a để $A = 2$

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

1.114 Cho biểu thức: $B = \left(\frac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a}\right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1\right)$.

a) Tìm điều kiện xác định của B.

b) Rút gọn B.

c) Tính giá trị của B khi $a = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$

d) Tìm giá trị của a để : $\sqrt{B} > B$.

1.115 Cho biểu thức: $M = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} - \left(\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} + 1\right) : \frac{b}{a - \sqrt{a^2-b^2}}$.

a) Rút gọn M.

b) Tìm giá trị của M nếu $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$

c) Tìm điều kiện của a, b để $M < 1$.

1.116 Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{(1-x)^2}{2}$.

a) Tìm điều kiện xác định của P.

b) Rút gọn P.

c) Tính giá trị lớn nhất của P.

d) Chứng minh: nếu $0 < x < 1$ thì $P > 0$.

1.117 Cho biểu thức: $Q = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$.

a) Tìm điều kiện xác định của Q.

b) Rút gọn Q.

c) Tìm các giá trị của x để $Q < 1$

d) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ sao cho $Q \in \mathbb{Z}$.

1.118 Cho biểu thức:

$$Q = \left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{y-x} \right) : \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

a) Tìm điều kiện xác định của Q. b) Rút gọn Q.

c) So sánh Q với \sqrt{Q} d) Chứng minh $Q \geq 0$.

1.119 Cho biểu thức: $M = \frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$.

a) Tìm ĐKXD và rút gọn M b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ sao cho $M \in \mathbb{Z}$.

1.120 Cho biểu thức: $P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{3+\sqrt{x}}$.

a) Tìm điều kiện xác định của P b) Rút gọn P.

c) Giải phương trình $P = \frac{1}{2}$ d) So sánh P với $\frac{2}{3}$.

1.121 Cho biểu thức:

$$Q = \left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-9} - 1 \right) : \left(\frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} \right)$$

a) Tìm ĐKXD và rút gọn Q b) Tìm x để $Q < 1$.

1.122 Cho biểu thức: $M = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{x\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}+1}$.

a) Rút gọn M.

b) Chứng minh: $M \leq 1$.

1.123 Cho biểu thức: $N = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$.

Hãy rút gọn $A = 1 - \sqrt{N + x + 1}$.

Chương 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

A - Nhắc lại và bổ sung các khái niệm về hàm số

- Hàm số f từ tập hợp số X đến tập hợp số Y là một qui tắc cho tương ứng mỗi giá trị $x \in X$ với một và chỉ một giá trị $y \in Y$ mà ta kí hiệu $f(x)$, x là biến số, $y = f(x)$ là giá trị của hàm số tại x .
- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi x thuộc \mathbf{R} .
Xét hai giá trị bất kì $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$:
 - $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$: hàm số đồng biến trên \mathbf{R} .
 - $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$: hàm số nghịch biến trên \mathbf{R} .
- Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp các điểm $M(x ; y)$ trên mặt phẳng tọa độ thỏa $y = f(x)$.
Gọi (C) là đồ thị của hàm số f , ta có:
 - $A(x_A ; y_A) \in (C) \Leftrightarrow y_A = f(x_A)$.
 - $B(x_B ; y_B) \notin (C) \Leftrightarrow y_B \neq f(x_B)$.

2.1 Hãy biểu diễn các điểm sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ:

$A(0 ; -3)$ $B(2 ; 0)$ $C(1 ; 3)$ $D(-2 ; 4)$ $F(-3 ; -2)$
 $G(2 ; -4)$ $H(0 ; \sqrt{2})$ $I(-\sqrt{3} ; 0)$ $J(-\sqrt{2} ; \sqrt{3})$ $K(-\sqrt{2} ; -\sqrt{3})$.

2.2 Trong các bảng sau ghi các giá trị tương ứng của x và y . Bảng nào xác định y là hàm số của x ? Vì sao ?

x	1	2	4	5	7	8
y	3	5	9	1	1	1
				1	5	7

x	3	4	3	5	8
y	6	8	4	8	1
					6

2.3 a) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2}{5}x$.

Tính: $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$

b) Cho hàm số $y = g(x) = \frac{2}{5}x + 3$

Tính: $g(-2)$; $g(-1)$; $g(0)$; $g\left(\frac{1}{2}\right)$; $g(1)$; $g(2)$; $g(3)$

c) Có nhận xét gì về giá trị của hai hàm số đã cho ở trên khi biến x lấy cùng một giá trị ?

2.4 Cho hàm số $y = f(x) = \frac{3}{4}x$.

Tính : $f(-3)$; $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(a)$; $f(a + 1)$

2.5 Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2}{5}x + 3$.

a) Tính giá trị tương ứng của y theo các giá trị của x rồi điền vào bảng:

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$y = \frac{2}{5}x + 3$									

b) Hàm số đã cho là hàm đồng biến hay nghịch biến? Vì sao?

2.6 Cho hai hàm số $y = 3x$ và $y = -3x$.

a) Vẽ trên cùng một mặt phẳng tọa độ đồ thị của hai hàm số đã cho.

b) Trong hai hàm số trên, hàm số nào đồng biến? Hàm số nào nghịch biến? Vì sao?

2.7 Cho hai hàm số $y = x$ và $y = 0,25x$.

a) Vẽ trên cùng một mặt phẳng tọa độ đồ thị của hai hàm số đã cho.

b) Đường thẳng song song với trục Ox và cắt trục Oy tại điểm có tung độ là 4 lần lượt cắt các đường thẳng $y = x$ và $y = 0,25x$ tại A và B . Tìm tọa độ của các điểm A , B và tính chu vi, diện tích của ΔOAB theo đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimet.

2.8 Cho hai hàm số $y = 2x$ và $y = 2x + 3$.

a) Tính giá trị y tương ứng của mỗi hàm số theo giá trị của biến x rồi điền vào bảng sau:

x	-2,25	-1,5	-1	0	1	1,5	2,25
$y = 2x$							
$y = 2x + 3$							

b) Có nhận xét gì về các giá trị tương ứng của hai hàm số khi biến x lấy cùng một giá trị?

2.9 Cho hàm số $y = f(x) = 5x$.

Cho x hai giá trị bất kì x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$. Hãy chứng minh $f(x_1) < f(x_2)$ rồi rút ra kết luận hàm số đã cho đồng biến trên \mathbf{R} .

2.10 Cho hàm số $y = f(x) = -2x$.

Cho x hai giá trị bất kì x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$. Hãy chứng minh $f(x_1) > f(x_2)$ rồi rút ra kết luận hàm số đã cho nghịch biến trên \mathbf{R} .

2.11 Cho hàm số $y = f(x) = -\frac{2}{5}x + 3$ với $x \in \mathbf{R}$. Chứng minh rằng hàm số nghịch biến trên

\mathbf{R} .

2.12 Chứng minh hàm số $y = 2x - 1$ đồng biến trên \mathbf{R} .

2.13 Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{x}$.

B - Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

C - Hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

1. Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$, trong đó a, b là các số cho trước và $a \neq 0$.
2. Hàm số bậc nhất xác định với mọi $x \in \mathbf{R}$ và có tính chất sau:
 - Đồng biến trên \mathbf{R} khi $a > 0$.
 - Nghịch biến trên \mathbf{R} khi $a < 0$.
3. Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng:
 - Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b . (b gọi là tung độ gốc của đường thẳng)
 - Song song với đường thẳng $y = ax$, nếu $b \neq 0$, trùng với đường thẳng $y = ax$ nếu $b = 0$.
4. Để vẽ đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ta chỉ cần xác định được hai điểm phân biệt nào đó thuộc đồ thị rồi vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó. Ta thường xác định hai điểm đặc biệt là giao điểm của đồ thị với hai trục tọa độ.
5. **Hệ số a** của đường thẳng $y = ax + b$ gọi là **hệ số góc** của đường thẳng. Còn **b** được gọi là **tung độ gốc** của đường thẳng.
6. Cho 2 đường thẳng: $(d) : y = ax + b$ và $(d') : y = a'x + b'$ (với $a, a' \neq 0$):
 - $(d) \equiv (d') \iff a = a' \quad \text{và} \quad b = b'$
 - $(d) // (d') \iff a = a' \quad \text{và} \quad b \neq b'$
 - (d) cắt (d') $\iff a \neq a'$
 - $(d) \perp (d') \iff a \cdot a' = -1$
 - (d) cắt (d') tại một điểm trên trục tung $\iff a \neq a' \quad \text{và} \quad b = b'$

2.19 Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất? Hãy xác định các hệ số a, b của chúng và xét xem hàm số bậc nhất đó đồng biến hay nghịch biến?

- | | |
|--------------------------------------|------------------------|
| a) $y = 1 - 5x$ | b) $y = -0,5x$ |
| c) $y = \sqrt{2}(x - 1) + \sqrt{3}$ | d) $y = 2x^2 + 3$ |
| e) $y = \sqrt{3}x - \sqrt{2}(2 - x)$ | f) $y = 3 - 0,5x$ |
| g) $y = -1,5x$ | h) $y = 5 - 2x^2$ |
| i) $y + \sqrt{2} = x - \sqrt{3}$ | j) $y = \frac{1}{x}$ |
| k) $y = \frac{2x - 1}{3}$ | l) $y = 5\sqrt{x} + 2$ |

2.20 Cho các hàm số $y = (m - 2)x + 3$ và $y = (m + 1)x + 5$. Tìm các giá trị của m để mỗi hàm số:

- a) Là hàm số bậc nhất
- b) Là hàm số nghịch biến
- c) Là hàm số đồng biến.

- 2.21** Một hình chữ nhật có các kích thước là 15cm và 25cm. Người ta tăng thêm mỗi kích thước của hình đó thêm x (cm) được hình chữ nhật mới có chu vi là y (cm). Hãy lập công thức tính y theo x .
- 2.22** Một hình chữ nhật có các kích thước là 30cm và 40cm. Người ta giảm bớt mỗi kích thước của hình đó x (cm). Gọi S và P thứ tự là diện tích và chu vi của hình chữ nhật mới theo x .
- a) Hỏi rằng các đại lượng S và P có phải là hàm số bậc nhất của x không? Vì sao ?
- b) Tính giá trị tương ứng của P khi x nhận các giá trị (tính theo đơn vị cm) sau: 0; 1; 1,5; 2,5; 3,5.
- 2.23** Chứng minh rằng hàm số bậc nhất $y = ax + b$ đồng biến khi $a > 0$ và nghịch biến khi $a < 0$.
- 2.24** Cho hàm số $y = ax + 5$. Tìm hệ số a , biết rằng khi $x = 1$ thì $y = 2$.
- 2.25** Với giá trị nào của m thì hàm số sau là hàm số bậc nhất ?
- a) $y = \sqrt{5-m}(x-1)$ b) $y = \frac{m+1}{m-1}x + 3,5$ c) $y = \frac{1}{m+2}x - \frac{3}{4}$
- 2.26** Cho hàm số $y = (1 - \sqrt{5})x - 1$.
- a) Hàm số trên là đồng biến hay nghịch biến trên \mathbf{R} ? Vì sao ?
- b) Tính giá trị của y khi $x = 1 + \sqrt{5}$
- c) Tính giá trị của x khi $y = \sqrt{5}$.
- 2.27** Cho hàm số $y = (3 - \sqrt{2})x + 1$.
- a) Hàm số trên là đồng biến hay nghịch biến trên \mathbf{R} ? Vì sao ?
- b) Tính giá trị của y khi x nhận các giá trị: 0; 1; $\sqrt{2}$; $3 + \sqrt{2}$; $3 - \sqrt{2}$
- c) Tính giá trị của x khi y nhận các giá trị: 0; 1; 8; $2 + \sqrt{2}$; $2 - \sqrt{2}$.
- 2.28** Tìm trên mặt phẳng tọa độ tất cả các điểm :
- a) Có tung độ bằng 6; b) Có hoành độ bằng -3 ;
- c) Có tung độ bằng 0 ; d) Có hoành độ bằng 0 ;
- e) Có hoành độ và tung độ bằng nhau ;
- f) Có hoành độ và tung độ đối nhau.
- 2.29** Cho hai điểm $A(x_A ; y_A)$ và $B(x_B ; y_B)$. Chứng minh công thức tính khoảng cách giữa hai điểm A và B là : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- Áp dụng : Tính khoảng cách giữa hai điểm, biết rằng:
- a) $A(1 ; 1)$ và $B(5 ; 4)$ b. $M(-2 ; 2)$ và $B(3 ; 5)$

2.30 a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = x + \sqrt{3}$ và $y = 2x + \sqrt{3}$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Gọi giao điểm của đường thẳng $y = x + \sqrt{3}$ với trục Oy, Ox theo thứ tự là A, B và giao điểm của đường thẳng $y = 2x + \sqrt{3}$ với các trục Oy, Ox theo thứ tự là C, D. Tính các góc của ΔABC (dùng máy tính bỏ túi)

2.31 a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = x + 1$ và $y = -x + 3$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Hai đường thẳng trên cắt nhau tại C và cắt trục Ox theo thứ tự tại A và B. Tìm tọa độ các điểm A, B, C.

c) Tính chu vi và diện tích ΔABC (đơn vị các trục là xentimét)

2.32 a) Vẽ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy đồ thị của các hàm số sau:

$$y = 2x ; y = 2x + 5 ; y = -\frac{2}{3}x \text{ và } y = -\frac{2}{3}x + 5$$

b) Bốn đường thẳng trên cắt nhau tạo thành tứ giác OABC (O là gốc tọa độ). Tứ giác OABC có phải là hình bình hành không? Vì sao?

2.33 Cho hàm số $y = (m - 3)x$

a) Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến? Nghịch biến?

b) Xác định giá trị của m để đồ thị của hàm số đi qua điểm A(1 ; 2).

c) Xác định giá trị của m để đồ thị của hàm số đi qua điểm B(1 ; -2).

d) Vẽ đồ thị của hàm số ứng với giá trị của m tìm được ở các câu b và c.

2.34 Cho hàm số $y = ax + 3$ có đồ thị (d) cắt trục hoành tại điểm A có hoành độ bằng 3.

a) Tìm giá trị của a.

b) Xét tính biến thiên (đồng biến hay nghịch biến) của hàm số.

c) Gọi B là giao điểm của (d) với trục tung. Tính khoảng cách từ O đến AB.

2.35 Cho hàm số $y = (a - 1)x + a$.

a) Xác định giá trị của a để đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\sqrt{2} + 1$

b) Xác định giá trị của a để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $-\sqrt{3}$

c) Vẽ đồ thị của hàm số ứng với a tìm được ở câu a). Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng đó.

2.36 Cho hàm số $y = (m^2 - 5m)x + 3$.

a) Với giá trị nào của m thì hàm số là hàm số bậc nhất?

b) Với giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến?

c) Xác định m khi đồ thị của hàm số qua điểm $A(1 ; -3)$.

2.37 Cho hàm số $y = (a - 1)x + a$.

- Xác định giá trị của a để đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.
- Xác định giá trị của a để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -3.
- Vẽ đồ thị của hai hàm số ứng với giá trị của a vừa tìm được ở các câu a và b trên cùng hệ trục tọa độ Oxy và tìm giao điểm của hai đường thẳng vừa vẽ được.

2.38 a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = x$ và $y = 2x + 2$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

- Gọi A là giao điểm của hai đồ thị của hàm số nói trên, tìm tọa độ của điểm A.
- Vẽ qua điểm $B(0 ; 2)$ một đường thẳng song song với Ox, cắt đường thẳng $y = x$ tại C. Tìm tọa độ của điểm C rồi tính diện tích ΔABC (đơn vị các trục là xentimét)

2.39 a) Biết rằng với $x = 4$ thì hàm số $y = 3x + b$ có giá trị là 11. Tìm b. Vẽ đồ thị của hàm số với giá trị của b vừa tìm được.

- Biết rằng đồ thị của hàm số của hàm số $y = ax + 5$ đi qua điểm $A(-1 ; 3)$. Tìm a. Vẽ đồ thị của hàm số với giá trị của a vừa tìm được.

2.40 Vẽ đồ thị của hàm số $y = \sqrt{5}x + \sqrt{5}$ bằng thước thẳng và compa.

2.41 a) Vẽ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy đồ thị của các hàm số sau:

$(d_1) : y = x$ $(d_2) : y = 2x$ $(d_3) : y = -x + 3$

- Đường thẳng (d_3) cắt các đường thẳng (d_1) , (d_2) theo thứ tự tại A, B. Tìm tọa độ các điểm A, B và tính diện tích ΔOAB .

2.42 Hãy chỉ ra ba cặp đường thẳng cắt nhau và các cặp đường thẳng song song với nhau :

- $y = -2x + 3$; b) $y = x + 2$; c) $y = 0,5x - 3$
- $y = x - 3$; e) $y = 1,5x - 1$; f) $y = 0,5x + 3$

2.43 Trong các đường thẳng sau, đường nào song song với nhau, đường nào vuông góc với nhau ?

- $y = 1,5x + 2$; b) $y = \frac{1}{2}x - 3$; c) $y = 5 - x$
- $y = \frac{x+1}{2}$; e) $y = -x + 4$; f) $y = 2x - 1$.

2.44 Cho hai hàm số bậc nhất $y = mx + 3$ và $y = (2m + 1)x - 5$. Tìm m để đồ thị của các hàm số là:

- Hai đường thẳng song song với nhau.
- Hai đường thẳng cắt nhau.

c) Hai đường thẳng vuông góc với nhau.

2.45 Cho hai hàm số bậc nhất $y = 2x + 3k$ và $y = (2m + 1)x + 2k - 3$. Tìm giá trị của m và k để đồ thị của các hàm số là:

a) Hai đường thẳng song song với nhau.

b) Hai đường thẳng cắt nhau.

c) Hai đường thẳng trùng nhau.

2.46 Cho hai hàm số bậc nhất $(d_1) : y = (2 - m^2)x + m - 5$ và $(d_2) : y = mx + 3m - 7$. Tìm giá trị của m để đồ thị của các hàm số là:

a) Hai đường thẳng song song với nhau.

b) Hai đường thẳng cắt nhau.

c) Hai đường thẳng vuông góc với nhau.

2.47 Cho hàm số $y = ax - 3$. Hãy xác định hệ số a trong mỗi trường hợp sau :

a) Đồ thị của hàm số song song với đường thẳng $y = -2x$.

b) Khi $x = 2$ thì hàm số có giá trị $y = 7$.

c) Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1 .

d) Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $3 - 1$.

e) Đồ thị của hàm số cắt đường thẳng $y = 2x - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 2 .

f) Đồ thị của hàm số cắt đường thẳng $y = -3x + 2$ tại điểm có tung độ bằng 5 .

2.48 Cho hàm số $y = 2x + b$. Hãy xác định hệ số b trong mỗi trường hợp sau :

a) Đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 .

b) Đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm $A(1 ; 5)$.

2.49 a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = \frac{2}{3}x + 2$ và $y = -\frac{3}{2}x + 2$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Một đường thẳng song song với trục hoành Ox , cắt trục tung Oy tại điểm có tung độ bằng 1 , cắt các đường thẳng trên theo thứ tự tại M và N . Tìm tọa độ hai điểm M và N .

2.50 Tìm hệ số a của hàm số $y = ax + 1$, biết khi $x = 1 + \sqrt{2}$ thì $y = 3 + \sqrt{2}$.

2.51 Xác định hàm số $y = ax + b$ biết đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2 .

2.52 Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1 ; 2)$, $B(3 ; 4)$.

a) Tìm hệ số a của đường thẳng đi qua A và B .

b) Xác định hàm số biết đồ thị của nó là đường thẳng đi qua A và B .

2.53 Cho đường thẳng (d) : $y = (k + 1)x + k$. Tìm k để đường thẳng (d):

- a) Đi qua gốc tọa độ.
- b) Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $1 - \sqrt{2}$.
- c) Song song với đường thẳng $y = (\sqrt{3} + 1)x + 3$

2.54 Xét đường thẳng (d) : $y = (2m - 1)x - m + 3$. Định m để đường thẳng (d):

- a) Đi qua gốc tọa độ.
- b) Đi qua A(2 ; 3)
- c) Cắt đường thẳng $y = 3x + 7$ tại một điểm trên trục tung
- d) Song song với đường thẳng $y = 5x + 3$
- e) Vuông góc với đường thẳng $y = 2x - 1$.

2.55 Cho các đường thẳng: $(d_1) : y = 3x + 1$ và $(d_2) : y = -\frac{1}{4}x - 2$

- a) Viết phương trình đường thẳng (d_3) qua M(4 ; -5) và song song với đường thẳng (d_1)
- b) Viết phương trình đường thẳng (d_4) qua N(3 ; 2) và vuông góc với đường thẳng (d_2) .
- c) Viết phương trình đường thẳng (d_5) qua hai điểm M và N.

2.56 Đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm A có hoành độ là -4 và cắt trục tung tại điểm B có tung độ là -3.

- a) Xác định phương trình đường thẳng (d).
- b) Viết phương trình đường cao CH của ΔABC với C(-1 ; -1)

2.57 Cho hai điểm A(5 ; 1) và B(-1 ; 5) trong hệ tọa độ vuông góc Oxy. Chứng minh ΔAOB vuông cân. Tính chu vi và diện tích của ΔAOB .

2.58 Chứng minh rằng khi m thay đổi, đồ thị của hàm số sau luôn đi qua một điểm cố định. Hãy xác định tọa độ của điểm cố định đó.

- a) $y = (m - 2)x + 3$
- b) $y = mx + (2m + 1)$

2.59 Cho hai đường thẳng $(d_1): y = mx - 2m - 1$, $(d_2): y = (m + 2)x + 1 - 2m$

- a) Khi $(d_1) \perp (d_2)$, hãy xác định tọa độ giao điểm của mỗi đường thẳng với các trục tọa độ.
- b) Chứng minh rằng khi m thay đổi, mỗi đường thẳng nói trên luôn đi qua một điểm cố định.

2.60 Xác định hàm số trong mỗi trường hợp sau, biết đồ thị của hàm số là đường thẳng đi qua gốc tọa độ :

- a) Đi qua điểm A(3 ; 2);

b) Có hệ số góc bằng $\sqrt{3}$;

c) Song song với đường thẳng $y = 3x + 1$.

2.61 Cho hàm số bậc nhất $y = ax + 3$.

a) Xác định hệ số góc a , biết rằng đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(2 ; 6)$.

b) Vẽ đồ thị của hàm số ứng với giá trị của a vừa tìm được.

2.62 Cho hàm số $y = -2x + 3$ (d).

a) Vẽ đồ thị của hàm số.

b) Tính góc tạo bởi đường thẳng (d) và trục Ox (làm tròn đến phút).

2.63 Xác định hàm số bậc nhất $y = ax + b$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $a = 2$ và đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1,5.

b) $a = 3$ và đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(2 ; 2)$

c) Đồ thị của hàm số song song với đường thẳng $y = \sqrt{3}x$ và đi qua điểm $B(1 ; \sqrt{3} + 5)$.

2.64 a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = \frac{1}{2}x + 2$ và $y = -x + 2$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Gọi giao điểm của hai đường thẳng trên với trục hoành theo thứ tự là A, B và gọi giao điểm của hai đường thẳng đó là C . Tính các góc của ΔABC (làm tròn đến độ).

c) Tính chu vi và diện tích của ΔABC (đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimét)

2.65 a) Vẽ đồ thị của các hàm số: $y = x + 1$; $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3}$; $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$.

b) Gọi α, β, γ lần lượt là các góc tạo bởi các đường thẳng trên và trục Ox . CMR: $\tan \alpha = 1$, $\tan \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan \gamma = \sqrt{3}$. Tính số đo các góc α, β, γ .

2.66 a) Tìm hệ số góc của đường thẳng đi qua gốc tọa độ và qua điểm $A(2 ; 1)$

b) Tìm hệ số góc của đường thẳng đi qua gốc tọa độ và điểm $B(1 ; -2)$

c) Vẽ đồ thị của các hàm số với hệ số góc vừa tìm được ở các câu a và b trên cùng một mặt phẳng tọa độ và chứng tỏ rằng hai đường thẳng đó vuông góc với nhau.

2.67 Cho hai đường thẳng (d) : $y = ax + b$ và (d') $y = a'x + b'$.

Chứng minh rằng: *Trên cùng một mặt phẳng tọa độ, hai đường thẳng (d) và (d') vuông góc với nhau khi và chỉ khi $a \cdot a' = -1$.*

2.68 a) Vẽ đồ thị của các hàm số (d₁) : $y = x$ và (d₂) : $y = 0,5x$.

b) Vẽ đường thẳng (d) song song với Ox và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2, và cắt các đường thẳng trên theo thứ tự tại D và E . Tìm tọa độ của các điểm D và E . Tính chu vi và diện tích của ΔODE .

2.69 a) Vẽ đồ thị của các hàm số $(d_1) : y = -2x$ và $(d_2) : y = 0,5x$.

b) Qua điểm $K(0 ; 2)$ vẽ đường thẳng (d) song song với Ox . Đường thẳng (d) cắt đường thẳng (d_1) và (d_2) lần lượt tại A và B . Tìm tọa độ của các điểm A và B .

c) Hãy chứng tỏ rằng $\widehat{AOB} = 90^\circ$.

D - Ôn tập chương 2

2.70 Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{2-x} + 2\sqrt{1-x}$

- Tìm điều kiện xác định của hàm số.
- Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung và trục hoành.
- So sánh $f(-\sqrt{2})$ và $f(-1,5)$.

2.71 Với giá trị nào của m thì hàm số bậc nhất sau đồng biến ?

- $y = (m - 1)x + 3$
- $y = (m + 6)x - 7$

2.72 Với những giá trị nào của k thì các hàm số bậc nhất nghịch biến ?

- $y = (5 - k)x + 1$
- $y = (-k + 9)x + 100$.

2.73 Với giá trị nào của m thì đồ thị của các hàm số cắt nhau tại một điểm trên trục tung ?

- $y = 2x + (3 + m)$ và $y = 3x + (5 - m)$
- $y = 12x + (5 - m)$ và $y = 3x + (3 + m)$

2.74 Tìm các giá trị của a để hai đường thẳng sau $y = (a - 1)x + 2$ ($a \neq 1$) và $y = (3 - a)x + 1$ ($a \neq 3$) song song với nhau.

2.75 Xác định k để hai đường thẳng sau đây trùng nhau:

$$y = kx + (m - 2) \quad (k \neq 0) \quad \text{và} \quad y = (5 - k)x + (4 - m) \quad (k \neq 5)$$

2.76 Cho hai hàm số bậc nhất $y = (k + 1)x + 3$ và $y = (3 - 2k)x + 1$.

- Với giá trị nào của k thì đồ thị của hai hàm số của hai hàm số là hai đường thẳng song song với nhau ?
- Với giá trị nào của k thì đồ thị của hai hàm số là hai đường thẳng cắt nhau ?
- Hai đường thẳng nói trên có thể trùng nhau được không ? Vì sao ?

2.77 Cho hàm số $y = (2m - 1)x$ với $m \neq \frac{1}{2}$.

- Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến ? Nghịch biến ?
- Tìm giá trị của m để đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(-0,5; 1,5)$.
- Vẽ đồ thị của hàm số với giá trị m vừa tìm được ở câu b).
- Đồ thị vừa vẽ có quan hệ như thế nào với các đường thẳng sau:
(d_1): $3x + y = 1$; (d_2): $3y - x - 12 = 0$.

2.78 Cho đường thẳng (d) : $y = (1 - 4m)x + m - 2$. Tìm giá trị của m để đường thẳng (d):

- Đi qua gốc tọa độ.
- Tạo với trục Ox một góc nhọn ? Góc tù ?
- Cắt trục tung tại một điểm có tung độ bằng 1,5.

d) Cắt trục hoành tại một điểm có hoành độ bằng 0,5.

2.79 Cho đường thẳng (d) : $y = (m - 2)x + n$ ($m \neq 2$). Tìm giá trị của m và n để đường thẳng (d):

a) Đi qua hai điểm A(-1 ; 2), B(3 ; -4).

b) Cắt trục tung tại một điểm có tung độ bằng $1 - \sqrt{2}$ và cắt trục hoành tại một điểm có hoành độ bằng $2 + \sqrt{2}$.

c) Cắt đường thẳng : $-2y + x - 3 = 0$.

d) Song song với đường thẳng : $3x + 2y = 1$.

e) Trùng với đường thẳng : $y - 2x + 3 = 0$.

2.80 Cho hai đường thẳng :

(d₁) : $y = (m^2 - 1)x + m + 2$ và (d₂) : $y = (5 - m)x + 2m + 5$.

Tìm m để hai đường thẳng trên song song với nhau.

2.81 Cho đường thẳng: (d) : $y = (2m - 1)x + m - 2$. Tìm m để đường thẳng (d):

a) Đi qua điểm A(1 ; 6).

b) Song song với đường thẳng $2x + 3y - 5 = 0$.

c) Vuông góc với đường thẳng $x + 2y + 1 = 0$.

d) Không đi qua điểm B($-\frac{1}{2}$; 1)

e) Luôn đi qua một điểm cố định.

2.82 Tìm m để ba đường thẳng sau đồng qui:

a) (d₁) : $y = 2x - 1$, (d₂) : $3x + 5y = 8$, (d₃) : $(m + 8)x - 2my = 3m$

b) (d₁) : $y = -x + 1$, (d₂) : $y = x - 1$, (d₃) : $(m + 1)x - (m - 1)y = m + 1$

c) (d₁) : $y = 2x - m$, (d₂) : $y = -x + 2m$, (d₃) : $mx - (m - 1)y = 2m - 1$

2.83 Trên hệ trục tọa độ vuông góc Oxy cho ΔABC mà ba cạnh AB, BC, CA của nó lần lượt nằm trên ba đường thẳng sau:

(d₁) : $y = x + 3$, (d₂) : $x - 5y = -7$ (d₃) : $y = 5 - x$.

a) Vẽ các đường thẳng AB, BC, CA trên cùng hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ ba đỉnh của ΔABC .

c) ΔABC là tam giác gì ?

d) Tìm tọa độ hình chiếu của A trên BC.

2.84 Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm A(-5 ; -1), B(-1 ; 4) và C(3 ; 2).

a) Vẽ ΔABC .

b) Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác.

c) Qua A kẻ đường thẳng song song với BC. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với BC.

Xác định tọa độ giao điểm D của hai đường thẳng đó.

2.85 a) Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ :

$$(d_1): y = 3x + 6 \quad (d_2): y = 2x + 4 \quad (d_3): y = x + 2 \quad (d_4): y = 0,5x + 1$$

b) Tính góc giữa các đường thẳng trên với trục Ox.

c) Có nhận xét gì về độ dốc của các đường thẳng trên.

2.86 a) Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ :

$$(d_1) : y = 2x - 2 \quad (d_2) : y = -\frac{4}{3}x - 2 \quad (d_3) : y = \frac{1}{3}x + 3$$

b) Gọi giao điểm các đường thẳng (d_3) với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) lần lượt tại A và B. Tìm tọa độ của các điểm A và B.

c) Tính khoảng cách giữa hai điểm A và B.

2.87 a) Vẽ đồ thị của các hàm số $(d_1) : y = 0,5x + 2$ và $(d_2) : y = 5 - 2x$.

b) Gọi giao điểm các đường thẳng (d_1) và (d_2) với trục hoành lần lượt tại A và B. gọi giao điểm của hai đường thẳng đó là C. Tìm tọa độ của các điểm A, B và C.

c) Tính độ dài các đoạn thẳng AB, AC và BC (đơn vị trên các trục là cm) (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

d) Tính các góc tạo bởi các đường thẳng trên với trục Ox (làm tròn đến phút).

2.88 a) Vẽ đồ thị của các hàm số $(d_1) : y = 2x$, $(d_2) : y = 0,5x$ và $(d_3) : y = -x + 6$.

b) Gọi giao điểm các đường thẳng (d_3) với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) lần lượt tại A và B. Tìm tọa độ của các điểm A và B.

c) Tính các góc của ΔOAB .

2.89 a) Cho các điểm $M(-1; -2)$, $N(-2; -4)$, $P(2; -3)$, $Q(3; -4,5)$. Tìm tọa độ của các điểm M' , N' , P' và Q' lần lượt là các điểm đối xứng với các điểm M, N, P và Q qua trục Ox.

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = |x|$; và $y = |x + 1|$.

c) Tìm tọa độ giao điểm của các hàm số trên. Từ đó suy ra phương trình $|x| = |x + 1|$ có một nghiệm duy nhất.

2.90 Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = |x - 1|$ b) $y = |1 - x| + |2x + 3|$ c) $y = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

Phần 2. Hình học

Chương 1. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

A - Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông

1) $BC^2 = AB^2 + AC^2$	1) $a^2 = b^2 + c^2$	
2) $AC^2 = CH.BC$	2) $b^2 = a.b'$	
3) $AB^2 = BH.BC$	3) $c^2 = a.c'$	
4) $AH^2 = HB.HC$	4) $h^2 = b'.c'$	
5) $AH.BC = AB.AC$	5) $h.a = b.c$	
6) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AB^2}$	6) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$	

- 1.1** Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Trong các đoạn thẳng sau: AB, AC, BC, AH, BH, CH hãy tính độ dài các đoạn thẳng còn lại nếu biết:
- a) AB = 15cm; BC = 25 cm b) BH = 18 cm; CH = 32 cm
 c) AB = 6 cm; BH = 3,6 cm d) AC = 12 cm; AH = 7,2 cm
 e) AH = 7,2 cm; CH = 9,6 cm f) BC = 25cm; AH = 12cm (AB < AC)
- 1.2** Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH và đường phân giác AD (D ∈ BC). Biết DB = 15 cm, CD = 20 cm. Tính AH, AD (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).
- 1.3** Cạnh huyền của một tam giác vuông lớn hơn một cạnh góc vuông là 1cm, còn tổng của hai cạnh góc vuông lớn hơn cạnh huyền 4cm. Hãy tính các cạnh của tam giác vuông này.
- 1.4** Đường cao của một tam giác vuông chia cạnh huyền thành hai đoạn thẳng có độ dài là 1 và 2. Hãy tính các cạnh của Δ vuông này.
- 1.5** Một tam giác vuông có cạnh huyền là 5, còn đường cao ứng với cạnh huyền là 2. Hãy tính cạnh nhỏ nhất của tam giác vuông này.
- 1.6** Cho một tam giác vuông. Biết tỉ số hai cạnh góc vuông là 3 : 4 và cạnh huyền là 125cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác vuông và hình chiếu của cạnh góc vuông trên cạnh huyền.
- 1.7** Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{6}$, đường cao AH = 30 cm. Tính BH, HC.
- 1.8** Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{7}$, đường cao AH = 42 cm. Tính BH, HC.
- 1.9** Cho h.vuông ABCD có độ dài cạnh là a. Tính độ dài đường chéo theo a.
- 1.10** Hãy tính đường cao của tam giác đều cạnh a.

- 1.11** Cho ΔABC cân tại A. Gọi H là hình chiếu của B trên cạnh AC. Tính cạnh đáy BC của tam giác, biết rằng $AH = 7$, $HC = 2$.
- 1.12** Hãy tìm tam giác vuông trong các tam giác có độ dài 3 cạnh sau:
- a) $IJ = 6$ $JK = 10$ $KI = 8$;
b) $RS = 7$ $ST = 24$ $TR = 25$;
c) $AB = \frac{1}{3}$ $BC = \frac{1}{4}$ $AC = \frac{1}{5}$;
d) $MN = 6,5$ $ML = 3,3$ $LN = 5,6$.
- 1.13** Cho tam giác có độ dài các cạnh là 5, 12, 13. Tìm góc của tam giác đối diện với cạnh có độ dài 13.
- 1.14** Trong tam giác ABC, biết $AB = 10\text{cm}$, $BC = 17\text{cm}$. Vẽ đường cao BD với D thuộc cạnh AC và $BD = 8\text{cm}$. Tính AC.
- 1.15** Cho ΔABC , đường cao AH.
- a) Cho $AH = 16$, $BH = 25$. Tính AB, AC, BC, CH.
b) Cho $AB = 12$, $BH = 6$. Tính AH, AC, BC, CH.
- 1.16** Cho hình chữ nhật ABCD. Đường phân giác của B cắt đường chéo AC thành hai đoạn $4\frac{2}{7}\text{m}$ và $5\frac{5}{7}\text{m}$. Tính các kích thước của hình chữ nhật.
- 1.17** Cho ΔABC vuông tại A, vẽ đường cao AH. Chu vi của ΔABH là 30cm và ΔACH là 40cm. Tính chu vi của ΔABC .
- 1.18** Cho ΔABC vuông tại A có cạnh $AB = 6\text{cm}$ và $AC = 8\text{cm}$. Các đường phân giác trong và ngoài của góc B cắt đường thẳng AC lần lượt tại M và N. Tính các đoạn thẳng AM và AN.
- 1.19** Cho ΔABC vuông ở A, $AB = 30\text{cm}$, $AC = 40\text{cm}$, đường cao AH, trung tuyến AM.
- a) Tính BH, HM, MC. b) Tính AH.
- 1.20** Cho ΔABC vuông ở A, đường cao AH. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Biết $HM = 15\text{cm}$, $HN = 20\text{cm}$. Tính HB, HC, AH.
- 1.21** Cho ΔABC cân ở A, đường cao BK. Biết $AK = 7\text{cm}$, $KC = 2\text{cm}$. Tính BC.
- 1.22** Cho ΔABC vuông ở A có $AC = 20\text{cm}$, chiều cao $AH = 12\text{cm}$. Tính diện tích ΔABC .
- 1.23** Cho hình vuông ABCD, gọi I là một điểm nằm giữa A và B. Tia DI và tia cắt CB cắt nhau ở K. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với DI để đường thẳng BC tại M.
-
-

a) Chứng minh: $\triangle IDM$ cân.

b) Chứng minh: $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2}$ không đổi khi I di chuyển trên cạnh AB.

1.24 Cho hình thang vuông ABCD ($A = D = 90^\circ$) có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại H. Biết $HD = 18$ cm, $HB = 8$ cm. tính diện tích hình thang ABCD.

1.25 Cho $\triangle ABC$ cân tại A, kẻ đường cao AH và CK. Biết $AH = 7,5$ cm; $CK = 12$ cm. Tính BC, AB.

1.26 Cho $\triangle ABC$ có đường cao AH (H nằm giữa B và C). $AH = 12$ cm, $HB = 9$ cm, $BC = 25$ cm.

a) Chứng minh: $\triangle ABC$ vuông tại A.

b) Kẻ $Bx \parallel AC$ cắt AH ở D. Tính HD và c/m: $AB^2 = AC \cdot BD$.

c) Kẻ $DE \perp AC$ ($E \in AC$), DE cắt BC ở F. C/m: $BH^2 = HF \cdot HC$

d) Chứng minh: $S_{\triangle ABH} = S_{\triangle CDH}$. (Không cần tính diện tích)

1.27 Cho $\triangle ABC$ vuông ở A có $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm.

a) Tính độ dài trung tuyến AM.

b) Kẻ đường cao AH. Tính chu vi $\triangle ABH$.

c) Tia phân giác của góc AMB và góc AMC cắt AB, AC lần lượt ở D và E. Chứng minh: $\triangle ABC$ và $\triangle ADE$ đồng dạng.

d) Tính: S_{BDEC} và S_{DME} .

1.28 Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AD. Đặt $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$, $AD = h$.

a) Chứng minh rằng số đo độ dài h ; $b + c$; $a + h$ là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

b) Chứng minh: $EA \cdot EB + FE \cdot FB = DB \cdot DC$

c) C/m: hệ thức trên đúng với mọi vị trí của D bất kì trên cạnh BC.

d) Kẻ $DE \perp AB$ tại E, $DF \perp AC$ tại F. Chứng minh rằng:

$$AE = \frac{b^2 c}{b^2 + c^2} \quad \text{và} \quad AF = \frac{bc^2}{b^2 + c^2}$$

e) Chứng minh rằng: $\frac{BF}{CF} = \frac{c^3}{b^3}$

1.29 Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AB = 4$ cm, $CD = 9$ cm, $BD = 5$ cm, $AC = 12$ cm.

a) Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, cắt DC ở E. Tính DBE.

b) Tính diện tích hình thang ABCD.

1.30 Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Kẻ $HD \perp AB$, $HE \perp AC$, $AK \perp DE$ ($D \in AB$, $E \in AC$, $K \in DE$). Gọi I là giao điểm của AH và DE. Biết $AI^2 = AD \cdot AE$.

a) Chứng minh: $AI^2 = DE \cdot AK$.

b) Tính $\angle AIK$. Tính các góc của $\triangle ABC$.

c) AK cắt BC ở N. Chứng minh: N là trung điểm của BC.

1.31 Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$) với đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Chứng minh:

a) $AB \cdot AD = AC \cdot AE$ b) $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH}$ c) $\frac{AB^3}{AC^3} = \frac{BD}{CE}$

d) $AH^3 = BC \cdot BD \cdot CE$

e) Biết $BC = 10$ cm, $AH = 4$ cm. Tính HB, HC và S_{ADHE} , S_{BDEC} .

1.32 Cho hình vuông ABCD, M là điểm nằm giữa B và C. Đường thẳng AM cắt đường thẳng DB, DC lần lượt tại I và N. Chứng minh:

a) $IB^2 + ID^2 = 2IA^2$. b) $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$

1.33 Cho $\triangle ABC$. Từ một điểm M bất kỳ trong tam giác kẻ $MD \perp BC$, $ME \perp AC$, $MF \perp AB$.

Chứng minh rằng: $BD^2 + CE^2 + AF^2 = DC^2 + EA^2 + FB^2$.

Giải bài toán như thế nào? –
Phần 1



B - Tỷ số lượng giác của góc nhọn

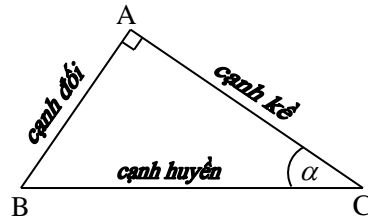
1. Định nghĩa:

$$1. \sin \alpha = \frac{\text{đổi}}{\text{huyền}} = \frac{AB}{BC}$$

$$2. \cos \alpha = \frac{\text{ke}}{\text{huyền}} = \frac{AC}{BC}$$

$$3. \tan \alpha = \frac{\text{đổi}}{\text{ke}} = \frac{AB}{AC}$$

$$4. \cot \alpha = \frac{\text{ke}}{\text{đổi}} = \frac{AC}{AB}$$



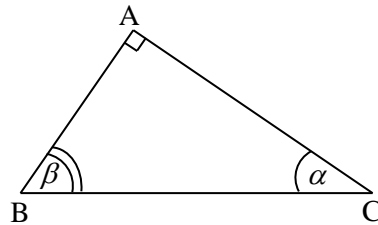
2. Tỷ số lượng giác của hai góc phụ nhau (có tổng số đo bằng 90°):

$$1) \sin \alpha = \cos \beta$$

$$2) \cos \alpha = \sin \beta$$

$$3) \tan \alpha = \cot \beta$$

$$4) \cot \alpha = \tan \beta$$



3. Bảng tỷ số lượng giác của các góc đặc biệt:

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. Một số hệ thức giữa các tỷ số lượng giác của một góc nhọn:

Cho góc nhọn α , ta có:

$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$2) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$3) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$4) \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

5. So sánh các tỷ số lượng giác:

- Khi góc nhọn α tăng dần thì $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$ tăng, còn $\cos \alpha$ và $\cot \alpha$ giảm
- Với cùng một góc nhọn α thì: $\sin \alpha < \tan \alpha$; $\cos \alpha < \cot \alpha$.

1.34 Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Tính các tỉ số lượng giác của các góc B từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc C, nếu biết:

- a) $AB = 16\text{cm}$; $BC = 12\text{ cm}$ b) $AB = 13\text{ cm}$; $BH = 5\text{ cm}$
 c) $BH = 16\text{ cm}$; $CH = 9\text{ cm}$ d) $AB = 6\text{ cm}$; $AC = 8\text{ cm}$

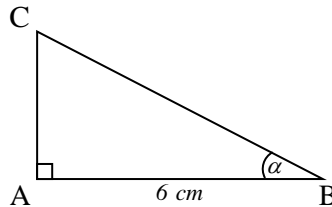
1.35 Lập tỉ số lượng giác của góc 34° bằng cách vẽ một tam giác vuông có một góc nhọn 34° .

1.36 Cho ΔABC vuông tại C, trong đó $AC = 0,90\text{m}$, $BC = 1,20\text{m}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A.

1.37 Cho hình bên:

Biết $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. Hãy tính:

- a) Cạnh AC.
 b) Cạnh BC.



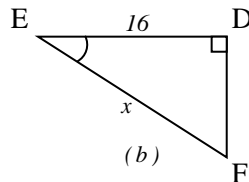
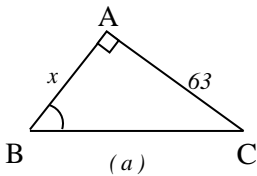
1.38 Cho ΔABC vuông tại A, $B = 30^\circ$, $BC = 8\text{cm}$. Hãy tính cạnh AB (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba). Biết $\cos 30^\circ \approx 0,866$.

1.39 Cho ΔABC vuông tại A, Chứng minh rằng: $\frac{AC}{AB} = \frac{\sin B}{\sin C}$.

1.40 Cho ΔABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH. Tính $\sin B$, $\sin C$, biết:

- a) $AB = 13\text{cm}$, $BH = 5\text{cm}$. b) $BH = 3\text{cm}$, $CH = 4\text{cm}$.

1.41 Tính giá trị của x (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 3) trong mỗi trường hợp sau. Biết $\tan B \approx 1,072$; $\cos E \approx 0,188$.



1.42 Cho ΔMNP vuông ở M, đường cao MQ chia cạnh huyền NP thành hai đoạn $NQ = 3$, $PQ = 6$. Hãy so sánh $\cot N$ và $\cot P$. Tỉ số nào lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu lần.

1.43 Biến đổi tỉ số lượng giác của các góc sau đây thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45° :

- $\sin 60^\circ$, $\cos 75^\circ$, $\sin 52^\circ 30'$, $\cot 82^\circ$, $\tan 80^\circ$.

1.44 Dựng góc nhọn α , biết:

a) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ b) $\cos \alpha = 0,5$ c) $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ d) $\cot \alpha = \frac{3}{2}$

1.45 Sử dụng định nghĩa các tỉ số lượng giác của một góc nhọn để chứng minh rằng: Với góc nhọn α tùy ý, ta có:

a) $\sin \alpha < 1, \cos \alpha < 1$

b) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

c) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

1.46 Cạnh huyền của một tam giác vuông có một góc bằng 60° là 8. Hãy tìm độ dài của cạnh đối diện với góc 60° .

1.47 Cạnh góc vuông kề với góc 60° của một tam giác vuông bằng 3. Hãy tìm cạnh huyền và cạnh góc vuông còn lại (sử dụng bảng lượng giác của các góc đặc biệt).

1.48 Đường cao BD của tam giác nhọn ABC bằng 6, đoạn thẳng AD bằng 5.

a) Tính diện tích $\triangle ABD$.

b) Tính AC, dùng các thông tin sau đây nếu cần: $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos C = \frac{4}{5}$.

1.49 Cho $\triangle ABC$ có đường cao AH. Biết $HB = 20\text{cm}, HC = 21\text{cm}, B = 45^\circ$. Tính AC.

1.50 a) Cho $\cos \alpha = 0,8$. Hãy tìm $\sin \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$.

b) Cho $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. Hãy tìm $\sin \alpha, \cos \alpha, \cot \alpha$.

c) Cho $\cot \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Hãy tìm $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$.

1.51 Biết $\tan B = 2$. Tính :

$$A = \frac{\sin B + \cos B}{\sin B - \cos B}$$

$$B = \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 4 \cos \alpha}$$

$$C = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 3 \cos^2 \alpha \quad D = \frac{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

1.52 Biết $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Tính $M = \frac{2 \tan \alpha - 10 \cos \alpha}{5 \cos \alpha + 4 \cot \alpha}$

1.53 Hãy tìm $\cos \alpha$ và $\tan \alpha$, nếu:

a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

b) $\sin \alpha = \frac{40}{41}$

1.54 Hãy tìm $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$, nếu: a) $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ b) $\cot \alpha = \frac{3}{4}$

D - Hệ thức giữa các cạnh và các góc trong một tam giác vuông

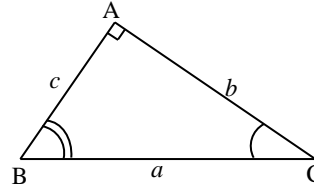
1. Các hệ thức:

$$1) b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C$$

$$2) c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B$$

$$3) b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C$$

$$4) c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B$$



2. Giải tam giác vuông:

Giải tam giác vuông là tìm tất cả các yếu tố còn lại của một tam giác vuông khi biết trước hai yếu tố (trong đó có ít nhất một yếu tố về cạnh và không kể góc vuông).

1.61 Giải tam giác vuông ABC biết rằng $\hat{A} = 90^\circ$ và :

- a) $b = 10 \text{ cm}$, $C = 30^\circ$; b) $c = 10 \text{ cm}$, $C = 45^\circ$;
 c) $a = 20 \text{ cm}$, $B = 35^\circ$; d) $c = 21 \text{ cm}$, $b = 18 \text{ cm}$;

1.62 Cho ΔABC nhọn có đường cao AH và đường trung tuyến AM. Biết $B = 57^\circ$, $AB = 9 \text{ cm}$, $AC = 12 \text{ cm}$. Giải tam giác ABC và tính AM.

1.63 Một cây cột đèn cao 7m có bóng trên mặt đất dài 4m. Hãy tính góc của tia sáng mặt trời tạo với mặt đất.

1.64 Cho ΔABC có đường cao AH. Biết $AB = 25 \text{ cm}$, $B = 70^\circ$, $C = 50^\circ$. Tính độ dài AH và BC (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

1.65 Một khúc sông rộng khoảng 250m. Một chiếc đò chèo qua sông bị dòng nước đẩy xiên nên phải chèo khoảng 320m mới sang được bờ bên kia. Hỏi dòng nước đã đẩy chiếc đò lệch đi một góc bằng bao nhiêu ?

1.66 Cho ΔABC , trong đó $AB = 11 \text{ cm}$, $\angle B = 38^\circ$, $\angle C = 30^\circ$. Gọi điểm N là chân của đường vuông góc kẻ từ A đến cạnh BC. Hãy tính: AN và AC.

1.67 Cho ΔABC vuông tại B, dựng tam giác ACD (B và D nằm khác phía đối với AC). Biết $\angle ACB = 54^\circ$, $\angle ACD = 74^\circ$, $AC = 8 \text{ cm}$, $AD = 9,6 \text{ cm}$. Hãy tính: AB và ADC.

1.68 Cho ΔABC vuông ở A, đường cao AH. Biết $HB = 2 \text{ cm}$, $HC = 64 \text{ cm}$. Tính B, C.

1.69 Cho ΔABC có $BC = 12 \text{ cm}$, $B = 60^\circ$, $C = 40^\circ$.

- a) Tính chiều cao CH và AC. b) Tính $S_{\Delta ABC}$.

1.70 Một con thuyền với vận tốc thực 2km/h vượt qua một khúc sông nước chảy mạnh mất 5 phút. Biết rằng đường đi của con thuyền tạo với bờ một góc 70° . Từ đó đã có thể tính được chiều rộng của khúc sông ? Nếu có thể hãy tính chính xác đến mét.

E - Ôn tập chương 1

1.71 Cho ΔABD có $AB = 15\text{cm}$, $AD = 20\text{cm}$, $BD = 25\text{cm}$. Vẽ $AM \perp BD$.

- Chứng minh : ΔABD vuông. Tính AM , BM , MD .
- Kẻ tia $Bx \parallel AD$, vẽ $AM \perp BD$ cắt Bx tại C . C/m : $AB^2 = AD \cdot BC$
- Kẻ $CE \perp AD$ cắt BD tại I . Chứng minh : $BM^2 = MI \cdot MD$.
- Chứng minh : $S_{\Delta AMB} = S_{\Delta MCD}$.

1.72 Cho ΔABC vuông tại A , đường cao AH . Kẻ $HD \perp AB$, $HE \perp AC$, $AK \perp DE$. Gọi I là giao điểm của AH và DE , biết $AI^2 = AD \cdot AE$.

Chứng minh : $AI^2 = DE \cdot AK$.

1.73 Cho ΔABC , một đường thẳng song song BC cắt AB tại D , cắt AC tại E thỏa điều kiện $DC^2 = BC \cdot DE$.

- Chứng minh : $\Delta DEC \sim \Delta CDB$.
- Chứng minh : $AD^2 = AC \cdot AE$ và $AC^2 = AB \cdot AD$

1.74 Cho ΔABC có 3 góc nhọn. Các đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H . Chứng minh :

- $AF \cdot AB = AH \cdot AD = AE \cdot AC$
- $DH \cdot DA = DB \cdot DC$
- $BF \cdot BA = BH \cdot BE = BD \cdot BC$
- $HB \cdot HE = HC \cdot HF = HA \cdot HD$
- $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$
- $DB \cdot DC = DH \cdot DA$

1.75 Cho ΔABC . Gọi M là trung điểm của BC , N là trung điểm của AC . Các đường trung trực của cạnh BC và AC cắt nhau tại O . Gọi H là trực tâm và G là trọng tâm của ΔABC .

Chứng minh:

- $\Delta AHB \sim \Delta MON$.
- $\Delta AHG \sim \Delta MOG$.
- Ba điểm H , G , O thẳng hàng. (đường thẳng Euler)

1.76 Cho ΔABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $BC = 5\text{cm}$; $BH = 1,8\text{cm}$. Gọi M là trung điểm của BC , đường trung trực của BC cắt AC tại D .

- Tính AB , AH .
- Tính tỉ số diện tích của ΔDMC và ΔABC .
- Chứng minh : $AC \cdot DC = \frac{1}{2} BC^2$.
- Tính diện tích tứ giác $ADMB$.

1.77 Cho ΔABC có $A = 90^\circ$, $AB = 15\text{cm}$, $AC = 20\text{cm}$, đường cao AH .

- a) Tính độ dài BC, AH, BH.
- b) Gọi D là điểm đối xứng của B qua H. Vẽ hình bình hành ADCE. Chứng minh: ABCE là hình thang cân.
- c) Tính diện tích hình thang cân ABCE.

1.78 Cho ΔABC có đường cao AH. Từ H vẽ $HM \perp AB$ tại M, $HN \perp AC$ tại N. Biết $HA = 15\text{cm}$, $HC = 36\text{cm}$, $BC = 56\text{cm}$.

- a) Tính AB, AC.
- b) Chứng minh: $AB \cdot AM = AC \cdot AN$ và $\Delta ABC \sim \Delta ANM$.
- c) Chứng minh: $AB \cdot AM = AC \cdot BN$
- d) Chứng minh: $\Delta ABN \sim \Delta ACM$.

1.79 Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH.

- a) Biết $3AB = 2AC$. Tính $\sin ACB$, $\tan ACB$.
- b) Vẽ đường phân giác CK của ΔAHC . Biết $AH = 2,4\text{ cm}$; $BH = 1,8\text{ cm}$. Tính CH, AC, CK, $\cos HCK$.
- c) Lấy $M \in BC$. Kẻ $ME \perp AB$ tại E và $MF \perp AC$ tại F. Chứng minh $MB \cdot MC = EA \cdot EB + FE \cdot FC$

1.80 Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Đường thẳng vuông góc với AC tại C cắt tia AH tại D.

- a) Chứng minh: $BC \cdot CH = AD \cdot AH = AB \cdot CD$.
- b) Chứng minh: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta CAD} \cdot \tan^2 ACB$
- c) Kẻ $HE \perp AB$ tại E. Chứng minh $BE = BC \cdot \cos^3 B$.
- d) Chứng minh: $EH = \frac{AB^2 \cdot AC}{BC^2}$.
- e) Gọi F là hình chiếu của H lên AC. C/m: $S_{BEFC} = S_{\Delta ABC} \cdot (1 - \tan^2 ACE)$
- f) Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ và $AH = 12\text{ cm}$. Tính AB, AC, BH, KH.

1.81 Cho tam giác nhọn ABC có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh:

- a) $EF = AH \cdot \sin A$
- b) $\frac{S_{HBC}}{\tan A} = \frac{S_{HAC}}{\tan B} = \frac{S_{HAB}}{\tan C}$
- c) $S_{DEF} = (1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C) \cdot S_{ABC}$

1.82 Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ $HE \perp AB$ tại E và $HF \perp AC$ tại F. Chứng minh:

a) $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC}$ và $\frac{AB^3}{AC^3} = \frac{BE}{CF}$. b) $BC = AB \cdot \sin C + AC \cdot \cos B$.

c) $AH^3 = BC \cdot BE \cdot CF = BC \cdot AE \cdot AF$. d) $AH^2 = AB \cdot AC \cdot \sin B \cdot \cos B$.

e) $AH = BC \cdot \sin B \cdot \cos B$. f) $BE\sqrt{CH} + CF\sqrt{BH} = AH\sqrt{BC}$

g) Cho $AH = 4$ cm; $BC = 10$ cm. Tính S_{BEFC} .

1.83 Cho ΔABC nhọn ($AB > AC$) có đường cao AH và đường trung tuyến AM. Chứng minh:

a) $\tan MAH = \frac{\cot B - \cot C}{2}$ b) $\tan \frac{HAC}{2} = \frac{HC}{AH + AC}$

1.84 Cho ΔABC cân tại A, đường cao AH. Biết $AB = 10$ cm, $AH = 8$ cm.

a) Tính BC và diện tích ΔABC .

b) Gọi I là trung điểm của AC. Qua A vẽ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng HI tại K. Chứng minh: AKCH là hình chữ nhật.

c) Đường thẳng BI cắt AH tại G và cắt CK tại M. Chứng minh :

i. $\Delta BGH \sim \Delta BMC$ ii. $BG \cdot BC = BM \cdot BH$

d) Chứng minh : $BG^2 + AH^2 = AC^2 + GH^2$.

1.85 Cho hình thang ABCD ($A = D = 90^\circ$). Gọi M là trung điểm của AD. Kẻ $MK \perp BC$ tại K. Biết $AB = 9$ cm, $BC = 25$ cm, $CD = 16$ cm.

a) Tính AD, MB, MC.

b) Chứng minh : ΔMBC vuông tại M.

c) Tính MK và diện tích ΔMKC .

1.86 Các đường cao của ΔABC có ba góc nhọn cắt nhau tại H. Trên các đoạn HB, HC lấy điểm M và N sao cho $\angle AMC = \angle ANB = 90^\circ$.

Chứng minh : $AM = AN$.

1.87 Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh:

a) $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$

b) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$

c) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$

1.88 Cho ΔABC đều, gọi O là trung điểm của cạnh BC, $\angle xOy = 60^\circ$ có cạnh Ox, Oy luôn cắt AB, AC tại M và N. Chứng minh :

a) $\triangle OBM \sim \triangle NOC$ suy ra $OB^2 = BM \cdot CN$

b) $\triangle OBM \sim \triangle ONM$ suy ra MO, NO lần lượt là tia phân giác $\angle BMN$ và $\angle CNM$.

c) $BM \cdot CN = \frac{1}{4} BC^2$.

1.89 Cho $\triangle ABC$ cân tại A có H là trung điểm của BC . Gọi I là hình chiếu của H lên cạnh AC và O là trung điểm của HI . Chứng minh :

a) $\triangle BIC \sim \triangle AOH$

b) $AO \perp BI$

1.90 Cho $\triangle ABC$ cân tại A có đường cao AH, BK . Chứng minh : $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}$.

Chương 2. ĐƯỜNG TRÒN

A - Sự xác định đường tròn. Tính chất đối xứng của đường tròn

1. Tập hợp các điểm M cách đều điểm O cho trước một khoảng không đổi bằng R là đường tròn tâm O bán kính R . Kí hiệu $(O ; R)$ hoặc (O) .

$$OM = R \Leftrightarrow M \in (O ; R)$$

2.
 - a. Qua 3 điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.
 - b. Đường tròn qua 3 đỉnh của một tam giác gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Khi đó tam giác được gọi là nội tiếp đường tròn. Tâm của đường tròn này là giao điểm của hai hay ba đường trung trực của tam giác đó.
3.
 - a. Tâm của đường tròn ngoại tiếp Δ vuông là trung điểm cạnh huyền.
 - b. Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông.
4. Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Đó là tâm của đường tròn đó.
5. Đường tròn có vô số trục đối xứng, đó là bất kì đường kính nào của đường tròn.

2.1 Cho hình chữ nhật ABCD.

- a) Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C và D cùng thuộc một đường tròn.
- b) Cho $AB = 10\text{cm}$ và $BC = 6\text{cm}$. Tính bán kính của đường tròn trên.

2.2 Cho hình thang cân ABCD. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C và D nằm trên một đường tròn.

2.3 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy xác định vị trí của mỗi điểm $A(1 ; -1)$, $B(2 ; 1)$ và $C(-\sqrt{3} ; \sqrt{3})$ với đường tròn tâm O bán kính 2 (với O là gốc tọa độ).

2.4 Chứng minh định lí sau:

- a) Tâm của đường tròn ngoại tiếp Δ vuông là trung điểm của cạnh huyền.
- b) Nếu một Δ có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì Δ đó là Δ vuông.

2.5 Cho hình vuông ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo, $OA = \sqrt{2}\text{ cm}$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính 2cm. Hãy xác định vị trí của năm điểm A, B, C, D, O so với đường tròn

2.6 Cho ΔABC nhọn. Vẽ (O) có đường kính BC, nó cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự ở D và E.

- a) Chứng minh: $CD \perp AB$ và $BE \perp AC$.
- b) Gọi K là giao điểm của BE và CD. Chứng minh: $AK \perp BC$.

- 2.7** Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD và DA. C/m: bốn điểm M, N, P và Q cùng nằm trên một đường tròn.
- 2.8** Cho ΔABC đều. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, P và M cùng nằm trên một đường tròn.
- 2.9** Cho ΔABC đều có độ dài cạnh là a (cm). Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC .
- 2.10** Cho (O ; 4cm) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Dây AM của (O) cắt bán kính OC tại I. Cho biết $OI = 3\text{cm}$. Tính AM và đường cao MH của ΔAMB .
- 2.11** Cho hình vuông ABCD cạnh a.
- Chứng minh: bốn đỉnh A, B, C và D của hình vuông trên cùng nằm trên một đường tròn.
 - Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.
- 2.12** Cho ΔABC cân tại A, $BC = 12\text{cm}$, đường cao $AH = 4\text{cm}$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC .
- 2.13** Cho ΔABC cân tại A, đường cao BE. Gọi D, F lần lượt là trung điểm của BC và AB.
- Chứng minh: 4 điểm A, B, D và E cùng nằm trên một đường tròn.
 - Chứng minh: C không thuộc đường tròn trên.
- 2.14** Cho ΔABC cân tại A, nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH cắt đường tròn (O) ở D.
- Chứng minh: AD là đường kính của đường tròn (O).
 - Tính $\angle ACD$.
 - Cho $BC = 24\text{cm}$, $AC = 20\text{cm}$. Tính AH và bán kính của (O).
- 2.15** Cho ΔABC có đường cao AH. Từ một điểm M bất kỳ trên cạnh BC, kẻ $MD \perp AB$ và $ME \perp AC$. Chứng minh: năm điểm A, D, H, M và E cùng nằm trên một đường tròn.
- 2.16** Cho ΔABC . Điểm I di động trên cạnh BC. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của I trên AB và AC. Lấy M đối xứng với A qua D, lấy N đối xứng với A qua E. Chứng minh:
- I là tâm đường tròn đi qua ba điểm A, M, N.
 - Đường tròn (I) nói trên đi qua một điểm cố định khác A.
- 2.17** Cho ΔABC nhọn có ba đỉnh thuộc đường tròn (O ; R). Gọi H là trực tâm của ΔABC . Vẽ đường kính AD.
- Tứ giác BHCD là hình gì ? Vì sao ?
 - Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh: $AH = 2OI$.
-

- c) Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Chứng minh: O, H, G thẳng hàng.
 d) So sánh diện tích của hai tam giác AHG và AOG .

2.18 Ba đường cao AD, BE, CF của $\triangle ABC$ gặp nhau tại H . Gọi I, K, L lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA và M, N, P lần lượt là trung điểm của HA, HB, HC . Chứng minh:

- a) Các tứ giác $INPL$ và $MLKN$ là các hình chữ nhật.
 b) 9 điểm D, E, F, L, I, K, M, N và P cùng nằm trên một đường tròn. (*đường tròn Euler*)

B - Đường kính và dây cung của đường tròn

1. Trong các dây của một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính. Từ đó suy ra nếu AB là một dây cung bất kì của $(O; R)$ thì $AB \leq 2R$.
2. a. Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.
 b. Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

2.19 Cho đường tròn (O) có bán kính $OA = 3\text{cm}$. Dây BC của đường tròn vuông góc với OA tại trung điểm của OA . Tính BC .

2.20 Cho $\triangle ABC$, các đường cao BD và CE . Chứng minh:

- a) Bốn điểm B, E, D và C cùng nằm trên một đường tròn.
 b) $DE < BC$.

2.21 a) Cho đường tròn (O) đường kính AB , dây CD không cắt đường kính AB . Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A và B trên CD . Chứng minh: $CH = DK$.

b) Cho đường tròn (O) đường kính AB , dây CD cắt đường kính AB tại I . Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A và B trên CD . Chứng minh: $CH = DK$.

2.22 Tứ giác $ABCD$ có $B = D = 90^\circ$.

- a) Chứng minh: bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.
 b) So sánh AC và BD . Nếu $AB = CD$ thì tứ giác $ABCD$ là hình gì ?

2.23 Cho đường tròn (O) có đường kính $AD = 2R$. Vẽ cung tròn tâm D bán kính R , cung này cắt đường tròn (O) ở B và C .

- a) Tứ giác $OBDC$ là hình gì ? Vì sao ?
 b) Tính các góc CBD, CBO, OBA .
 c) Chứng minh: $\triangle ABC$ đều.

2.24 a) Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính AB , dây CD . Các đường vuông góc với CD tại C và D tương ứng cắt AB ở M và N .

Chứng minh: $AM = BN$.

b) Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính AB . Trên AB lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Qua M và N kẻ các đường thẳng song song với nhau, chúng cắt nửa đường tròn lần lượt tại C và D .

Chứng minh: $MC \perp CD$ và $ND \perp CD$.

2.25 Cho đường tròn $(O ; R)$ và điểm M nằm bên trong đường tròn.

a) Hãy nêu cách dựng AB nhận M làm trung điểm.

b) Tính AB , biết $R = 5\text{cm}$, $OM = 1,4\text{cm}$.

2.26 Cho đường tròn (O) , điểm A nằm bên trong đường tròn, điểm B nằm bên ngoài đường tròn sao cho trung điểm I của AB nằm bên trong đường tròn. Vẽ dây $CD \perp OI$ tại I . Tứ giác $ACBD$ là hình gì ? Vì sao ?

C - Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

1. Trong một đường tròn:
 - a. Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.
 - b. Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.
2. Trong hai dây của một đường tròn:
 - a. Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.
 - b. Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

2.27 Cho đường tròn tâm O bán kính 5cm, dây $AB = 8\text{cm}$.

a) Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB.

b) Gọi I là điểm thuộc dây AB sao cho $AI = 1\text{cm}$. Kẻ dây CD đi qua I và vuông góc với AB. Chứng minh $CD = AB$.

2.28 Cho đường tròn tâm O bán kính 25cm, dây $AB = 40\text{cm}$. Vẽ dây CD song song với AB và có khoảng cách đến AB bằng 22cm. Tính độ dài dây CD.

2.29 Cho đường tròn (O), điểm A nằm bên trong đường tròn. Vẽ dây $BC \perp OA$ tại A. Vẽ dây EF bất kỳ đi qua A và không vuông góc với OA. So sánh BC và EF.

2.30 Cho đường tròn tâm O có các dây cung AB và CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I. Biết $IC = 2\text{cm}$, $ID = 14\text{cm}$. Tính khoảng cách từ O đến mỗi dây.

2.31 Cho (O) có các dây cung AB và CD bằng nhau, các tia AB và CD cắt nhau tại E nằm bên ngoài đường tròn. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh:

a) $EH = EK$

b) $EA = EC$.

2.32 Cho đường tròn (O), dây AB và CD ($AB < CD$) cắt nhau tại K nằm bên ngoài đường tròn. Đường tròn (O ; OK) cắt KA và BC lần lượt tạo M và N. So sánh KM và KN.

2.33 Cho đường tròn (O), dây AB và CD ($AB > CD$) cắt nhau tại M. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và CD. So sánh MH và MK (*Chú ý: xét 2 trường hợp của điểm M*).

2.34 Cho đường tròn (O), hai dây AB và CD ($AB = CD$) cắt nhau tại I nằm bên trong đường tròn. Chứng minh:

a) OI là tia phân giác của một trong hai góc tạo bởi hai dây AB và CD.

b) I chia AB, CD thành các đoạn thẳng bằng nhau từng đôi một.

2.35 Cho đường tròn (O), dây AB bất kỳ không đi qua tâm. Trên cung nhỏ AB lấy hai điểm phân biệt C, D sao cho D nằm trên cung nhỏ AC và $AD = BC$. Chứng minh: $CD \parallel AB$.

2.36 Cho đường tròn (O; 5cm), hai dây AB, CD ($AB \parallel CD$), biết $AB = 8\text{cm}$, $CD = 6\text{cm}$. Tính khoảng cách giữa hai dây.

- 2.37** Cho đường tròn (O) và điểm I nằm bên trong đường tròn. Vẽ dây $AB \perp OI$ tại I . Chứng minh rằng AB là dây cung ngắn hơn mọi dây cung khác đi qua I .
- 2.38** Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O) có $A > B > C$. Gọi OH, OI, OK lần lượt là khoảng cách từ O đến BC, AC và AB . So sánh các độ dài OH, OI, OK .
- 2.39** Cho đường tròn (O) , các bán kính OA, OB . Trên cung nhỏ AB lấy các điểm M và N sao cho $AM = BN$. Gọi C là giao điểm của các đường thẳng AM và BN . Chứng minh rằng:
 a) OC là tia phân giác của AOB . b) $OC \perp AB$.
- 2.40** Cho $(O; R)$ và một điểm A cố định với $OA = R/2$. Một dây cung MN quay quanh A .
 a) Chứng minh: trung điểm của MN thuộc một đường tròn cố định.
 b) Xác định vị trí của MN để độ dài MN ngắn nhất? Dài nhất? Tính độ dài ngắn nhất, dài nhất đó của MN .
- 2.41** Cho ΔABC vuông tại A , M là điểm di động trên cạnh huyền BC . Gọi (O) là đường tròn đường kính AM .
 a) Chứng minh: (O) luôn đi qua hai điểm cố định.
 b) (O) cắt AB, AC lần lượt tại E và F . Định vị trí của M sao cho độ dài EF nhỏ nhất.
- 2.42** Cho đường tròn (O) và dây AB cố định. M và N là hai điểm di động lần lượt trên cung lớn và cung nhỏ AB .
 a) Chứng minh: $S_{AMB} \leq \frac{1}{2} AB \cdot MN$
 b) Định vị trí của MN để diện tích tứ giác AMB lớn nhất.
- 2.43** Cho đường tròn (O) và dây BC cố định. Điểm A di chuyển trên cung lớn BC . Gọi M là trung điểm của AC và H là hình chiếu của M trên AB . Kẻ $CD \perp BC$. Chứng minh:
 a) B, O, D thẳng hàng. b) MH luôn đi qua một điểm cố định.
- 2.44** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi M là trung điểm của OB , N là trung điểm của CD .
 a) Xác định tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABN .
 b) Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAON và E là trung điểm của ON . Chứng minh: ΔKIE và ΔAND đồng dạng.
 c) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAON .
 d) Chứng minh $\angle AMN = 90^\circ$ và $AN > MD$.

2.45 Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B nằm bên trong đường tròn và không cùng thuộc một đường kính. Dựng hai dây song song và bằng nhau sao cho điểm A nằm trên một dây, điểm B nằm trên dây còn lại.

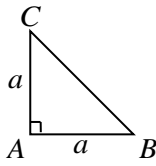
D - Các công thức về tam giác vuông cân tam giác đều và nửa tam giác đều

1. Tam giác vuông cân:

Cho ΔABC vuông cân tại A:

$$BC = AB \cdot \sqrt{2} = a \cdot \sqrt{2}$$

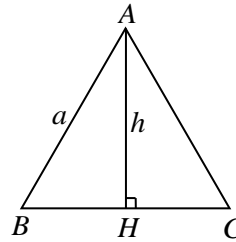
$$AB = AC = \frac{BC}{\sqrt{2}}$$



2. Tam giác đều:

Cho ΔABC đều cạnh a, chiều cao h, diện tích S.

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad a = \frac{2h\sqrt{3}}{3}; \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

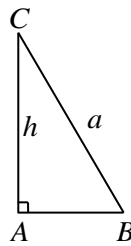


3. Nửa tam giác đều:

ΔABC : $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 30^\circ$

$$AB = \frac{BC}{2}; \quad AC = \frac{BC\sqrt{3}}{2};$$

$$AC = AB \cdot \sqrt{3}; \quad S = \frac{BC^2\sqrt{3}}{8}$$



2.46 Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp:

- Tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a.
- Tam giác đều cạnh bằng a.

2.47 Cho đường tròn (O ; R) có hai bán kính OA, OB với góc $\hat{AOB} = 120^\circ$. Đường cao OI của ΔAOB cắt (O) tại C.

- Chứng tỏ tứ giác OACB là hình thoi.
- Kẻ đường kính CD của (O). Chứng tỏ ΔABD đều.

2.48 Cho đường tròn (O ; R) có hai bán kính OA, OB vuông góc với nhau. Tia phân giác của \hat{AOB} cắt (O) ở C. Lấy điểm bất kì trên cung BC và hạ đường vuông góc DH xuống OA, đường này cắt OC ở E.

- Tính theo R khoảng cách từ C đến OA.
- Chứng minh: $HD^2 + HE^2$ không đổi khi D thay đổi.

E - Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

1. Cho đường tròn (O ; R), đường thẳng cách O một khoảng d.
 $d > R \Leftrightarrow a$ và (O) không có điểm chung
 $d = R \Leftrightarrow a$ và (O) tiếp xúc nhau (có một điểm chung)
 $d < R \Leftrightarrow a$ và (O) cắt nhau (có hai điểm chung)
2. Tiếp tuyến của đường tròn là đường thẳng có điểm chung duy nhất với đường tròn (điểm chung đó gọi là tiếp điểm)
 - a. Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.
 - b. Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.
3. Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:
 - a. Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
 - b. Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
 - c. Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua tiếp điểm.

- 2.49** Trên mặt phẳng tọa độ cho điểm I(-3 ; 2). Nếu vẽ đường tròn tâm I bán kính bằng 2 thì đường tròn đó có vị trí tương đối như thế nào đối với các trục tọa độ ?
- 2.50** Cho đường thẳng a. Tâm I của tất cả các đường tròn có bán kính 5cm và tiếp xúc với đường thẳng a nằm trên đường nào ?
- 2.51** Cho điểm A cách đường thẳng xy là 12cm. Vẽ đường tròn (A ; 13cm).
 a) Chứng minh đường tròn (A) có hai giao điểm với đường thẳng xy.
 b) Gọi hai giao điểm nói trên là B và C. Tính độ dài BC.
- 2.52** Cho đường tròn (O; 2cm). Một đường thẳng đi qua điểm A nằm bên ngoài đường tròn và cắt đường tròn tại B và C, trong đó $AB = BC$. Kẻ đường kính COD. Tính AD.
- 2.53** Cho hình thang ABCD ($A = D = 90^\circ$), $AB = 4\text{cm}$, $BC = 13\text{cm}$, $CD = 9\text{cm}$.
 a) Tính độ dài AD.
 b) Chứng minh rằng AD tiếp xúc với đường tròn có đường kính là BC.
- 2.54** Cho (O; R), bán kính OA, dây CD là đường trung trực của OA.
 a) Tứ giác OCAD là hình gì ? Vì sao ?
 b) Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại C, tiếp tuyến này cắt đường thẳng OA tại I. Tính CI.
- 2.55** Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Qu điểm C thuộc nửa đường tròn, kẻ tiếp tuyến d của đường tròn. Gọi E và F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến d. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C đến AB. Chứng minh rằng:
 a) $CE = CF$. b) AC là tia phân giác của BAE. c) $CH^2 = AE \cdot BF$

2.56 Cho đường tròn $(O ; R)$ có đường kính AB và hai tiếp tuyến Ax, By . Một tiếp tuyến khác tại điểm M cắt Ax ở C và cắt By ở D .

a) Chứng minh: $CD = AC + BD$.

b) Chứng minh: $\triangle COD$ vuông.

c) Chứng minh: $AB^2 = 4AC \cdot BD$.

d) AM cắt OC tại I , BM cắt OD tại K . Tứ giác $OIMK$ là hình gì ? Định vị trí của M để $OIMK$ là hình vuông.

e) AM cắt By tại F , BM cắt Ax tại E . Chứng minh:

i) C là trung điểm của AE ii) $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle EFM}$.

2.57 Cho đường tròn $(O ; R)$ và đoạn thẳng $OA = 2R$. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O) .

a) Chứng minh: OA là đường trung trực của đoạn thẳng BC .

b) Chứng minh: $\triangle ABC$ đều.

c) Tính theo R độ dài BC và diện tích $\triangle ABC$.

d) Đoạn OA cắt (O) tại D . Tứ giác $OBDI$ là hình gì ? Vì sao ?

e) BO cắt AC kéo dài tại I . Tính theo R độ dài các cạnh của $\triangle ABI$.

f) Từ O kẻ đường vuông góc với OC cắt AB tại K . Tính khoảng cách từ K đến OA .

2.58 Cho $\triangle ABC$ cân tại A , có O là trung điểm của BC và $BC = 2a$. Đường tròn (O) tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại H và K . Qua D trên cung nhỏ HK , kẻ tiếp tuyến với (O) cắt AB và AC ở M và N .

a) Chứng minh: A, H, O, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh: $M\hat{O}N = \angle A$.

c) Tính tích $BM \cdot CN$ theo a .

d) Định vị trí của MN sao cho $BM + CN$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2.59 Cho đường tròn (O) , điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Dùng thước và compa, hãy dựng các điểm B và C thuộc đường tròn (O) sao cho AB và AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) .

2.60 Cho điểm A nằm trên đường thẳng d , điểm B nằm ngoài đường thẳng d . Dựng đường tròn (O) đi qua A và B , nhận đường thẳng d làm tiếp tuyến.

2.61 Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Vẽ đường tròn $(B ; BA)$ và đường tròn $(C ; CA)$, chúng cắt nhau tại điểm D (khác A). Chứng minh CD là tiếp tuyến của (B) .

- 2.62** Cho ΔABC cân tại A, các đường cao AD và BE cắt nhau tại H. Vẽ đường tròn (O) có đường kính AH. Chứng minh:
- Điểm E nằm trên đường tròn (O).
 - DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).
- 2.63** Cho điểm M trên (O; R) đường kính AB. Gọi H là trung điểm của BM, OH cắt (O) tại I và cắt tiếp tuyến tại B của (O) ở điểm D. Gọi N là hình chiếu của I trên AM. Chứng minh: NI và DM là các tiếp tuyến của (O).
- 2.64** Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Một tiếp tuyến tại M của (O) cắt hai tiếp tuyến Ax, By theo thứ tự tại C và D. Chứng minh: đường tròn đường kính CD tiếp xúc với AB.
- 2.65** Trên tiếp tuyến tại A của (O; R) lấy điểm B với $AB = R$. Từ A kẻ đường vuông góc với OB tại H, cắt (O) tại C. OB cắt cung nhỏ AC tại I.
- Chứng minh: AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).
 - Tính theo R độ dài BH, IH và AI.
- 2.66** Từ điểm I bên ngoài (O; R) vẽ hai cát tuyến IAB và ICD (không qua tâm O). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai dây AB và CD.
- Chứng minh: O, I, M, N cùng thuộc một đường tròn.
 - Đường tròn (OIMN) cắt (O) tại E và F. Chứng minh: IE, IF là hai tiếp tuyến của (O).
 - EF cắt OM tại K và cắt OI tại H. Chứng minh: $OM \cdot OK = OH \cdot OI = R^2$.
- 2.67** Cho ΔABC vuông tại A ($AB < AC$) có đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm B, bán kính BA, đường tròn này cắt AH tại điểm thứ hai là D.
- Chứng minh: CD tiếp xúc với đường tròn (B; BA).
 - Gọi I là đối xứng của B qua AH, đường thẳng AI cắt CD tại E. Chứng minh: A, H, E, C cùng thuộc một đường tròn. Suy ra AB là tiếp tuyến của đường tròn này.
- 2.68** Cho đường tròn đường kính AB. Gọi C là điểm bất kì trên đường tròn và H là hình chiếu của C trên AB. Từ A và B kẻ các tiếp tuyến AD và BE đến đường tròn (C; CH). Chứng minh:
- D, C, E thẳng hàng.
 - DE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BC.
 - Xác định vị trí của điểm C để diện tích tứ giác ABED lớn nhất.
- 2.69** Cho góc xOy, điểm A thuộc tia Ox. Dựng (I) tiếp xúc với Ox tại A và có tâm I nằm trên Oy.
-

- 2.70** Cho đường tròn (O) và đường thẳng d không giao nhau. Dụng tiếp tuyến của đường tròn (O) sao cho tiếp tuyến đó song song với d.
- 2.71** Cho đường tròn (O), điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là hai tiếp điểm).
- Chứng minh: $OA \perp MN$.
 - Vẽ đường kính NOC. Chứng minh: $MC \parallel AO$.
 - Tính độ dài các cạnh của $\triangle AMN$ biết $OM = 3\text{cm}$, $OA = 5\text{cm}$.
- 2.72** Cho đường tròn tâm O đường kính AB và một điểm C nằm trên đường tròn (C khác A và B). Gọi D là trung điểm của AC.
- Tính số đo $\angle ODA$ và chứng tỏ rằng OD song song với BC.
 - Tiếp tuyến tại A của (O) cắt tia OD tại E. Chứng minh: EC là tiếp tuyến của (O).
 - Đường thẳng BC cắt tiếp tuyến tại A của (O) tại điểm M.
 - Chứng minh rằng OE là trung tuyến của $\triangle AOM$.
- 2.73** Cho đường tròn (O), điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B và C là hai tiếp điểm). Qua điểm M thuộc cung nhỏ BC, kẻ tiếp tuyến với đường tròn, tiếp tuyến này cắt AB và AC lần lượt tại D và E. Chứng minh rằng
- Chu vi $\triangle MPQ$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M.
 - $\angle BOC = 2\angle DOE$.
 - $DE < \frac{1}{2}(AB + AC)$
- 2.74** Cho đường tròn (O; 5cm) có đường kính AB và dây cung CD. Kéo dài AB và CD cắt nhau tại M. Gọi N là trung điểm của dây cung CD.
- Chứng minh: $\triangle MNO$ là tam giác vuông.
 - Tiếp tuyến tại B của (O) cắt đường thẳng CD tại Q.
Chứng minh: $MN \cdot MQ = MO \cdot MB$
 - Tia ON cắt (O) tại E. Tính độ dài dây cung EC nếu độ dài dây cung $CD = 6\text{ cm}$
- 2.75** Cho nửa đường tròn (O ; R) đường kính AB. Gọi Ax, By là các tia vuông góc với AB (Ax, By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Gọi D là điểm bất kì thuộc nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại D cắt Ax và By theo thứ tự tại M và N.
- Tứ giác AMNB là hình gì ? Vì sao ?
 - Tính số đo góc MÔN.
 - Chứng minh: $MN = AM + BN$.
 - Chứng minh: $AM \cdot BN = R^2$.

e) Đường tròn đường kính MN tiếp xúc với AB tại O.

f) AN và BM cắt nhau tại Q, DQ cắt AB tại H.

Chứng minh: $DQ \perp AB$ và $QH = QD$.

g) Tìm vị trí của D để tứ giác AMNB có chu vi nhỏ nhất.

h) Cho $R = 2\text{cm}$. Tìm vị trí của M và N để chu vi tứ giác AMNB có chu vi bằng 14cm.

2.76 Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB và 1 là điểm C nằm trên đường tròn. Đường thẳng song song với AC kẻ từ O cắt tiếp tuyến tại C của (O) tại D. Chứng minh:

a) $CO = DO$. b) DB cũng là tiếp tuyến tại B của (O) .

c) $AC \cdot OD = 2R^2$.

2.77 Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A nằm ngoài (O) . Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM, AN của (O) (M, N là hai tiếp điểm).

a) $\triangle AMN$ là \triangle gì? Vì sao?

b) Đường thẳng vuông góc với OM tại O cắt đường thẳng AN tại P. Chứng minh: $AP = PO$.

c) Gọi H là giao điểm của AO và MN. Chứng minh: $OH \cdot OA = R^2$.

2.78 Cho đường tròn (O) đường kính BC và 1 điểm A nằm trên đường tròn (A khác B và C). Qua O, kẻ tia Ox song song với AC, tia Ox cắt AB tại D.

a) Chứng minh: $OD \perp AB$ và từ đó suy ra D là trung điểm của AB.

b) Tiếp tuyến tại B của (O) cắt tia Ox tại E.

Chứng minh: EA cũng là tiếp tuyến của (O)

c) Tia CA cắt tia BE tại F. Chứng minh: tia CE đi qua trung điểm I của đường cao AH của $\triangle ABC$.

2.79 Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB. Từ trung điểm I của bán kính OB vẽ dây cung CD vuông góc với OB.

a) So sánh IC và ID.

b) Tiếp tuyến tại C của (O) cắt đường thẳng AB tại M. Chứng minh:

i) $\triangle COM = \triangle DOM$. ii) MD là tiếp tuyến của (O) .

c) Tính độ dài đoạn MC theo R.

2.80 Cho $(O; 3\text{cm})$ và điểm A sao cho $OA = 5\text{cm}$. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC.

a) Tính độ dài OH.

b) Qua điểm M bất kì thuộc cung nhỏ BC, kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt AB, AC theo thứ tự tại D và E. Tính chi vi $\triangle ADE$.

2.81 Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn (A; AH). Kẻ các tiếp tuyến BD, CE với đường tròn (D, E là các tiếp điểm khác H). C/m:

a) Ba điểm D, A, E thẳng hàng.

b) DE tiếp xúc với đường tròn đường kính BC.

2.82 Cho (O ; R), và điểm A sao cho $OA = R\sqrt{2}$, kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O). (B, C là các tiếp điểm). Qua điểm M bất kì thuộc cung nhỏ BC, kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt AB, AC theo thứ tự tại D và E.

a) Tứ giác ABOC là hình gì ? Vì sao ?

b) Tính số đo góc DOE .

c) Đoạn OA cắt (O) tại K. Chứng minh: K là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Tính bán kính của đường tròn này.

d) Tính độ dài BK theo R.

2.83 Cho đường tròn (O; R) tiếp xúc với đường thẳng xy tại A. Trên tia Oz song song với đường thẳng xy lấy điểm I. Từ I vẽ các tiếp tuyến với (O) cắt xy tại E và F.

a) Chứng minh: I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle OEF$.

b) Cho $OI = R\sqrt{2}$, tính chu vi $\triangle IEF$.

F - Đường tròn nội tiếp – bàng tiếp tam giác

1. a. Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của Δ gọi là **đường tròn nội tiếp tam giác**.
b. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác.
2. a. Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và các phần kéo dài của hai cạnh kia gọi là **đường tròn bàng tiếp của tam giác**.
b. Tâm của đường tròn bàng tiếp của tam giác là giao điểm của phân giác trong và hai phân giác ngoài của hai góc còn lại.

2.84 Cho ΔABC vuông cân tại A nội tiếp $(O; R)$. Gọi $(I; r)$ là đường tròn nội tiếp ΔABC .

Tính độ dài AB và r theo R.

2.85 Cho ΔABC đều có cạnh 8cm.

- a) Tính bán kính đường tròn (I) nội tiếp ΔABC .
- b) Một tiếp tuyến của (I) cắt AB, AC theo thứ tự ở M và N.

Cho biết $MN = 3\text{cm}$. Tính $S_{\Delta ABC}$.

2.86 Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O) . OA cắt (O) tại I. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp của ΔABC .

2.87 Cho $(I; r)$ nội tiếp ΔABC vuông tại A. Các tiếp điểm trên AC, AB theo thứ tự là D, E.

- a) Tứ giác ADOE là hình gì? Vì sao?
- b) Tính chu vi và diện tích tứ giác ADOE theo r.
- c) Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Chứng minh: $AB + AC = 2(R + r)$.

2.88 Cho đường tròn $(I; r)$ nội tiếp ΔABC . Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của I trên các cạnh BC, CA, AB. Cho $BC = a, AC = b, AB = c$. Chứng minh:

- a) $S = p.r$ (với S là diện tích và p là nửa chu vi của ΔABC)
- b) $AE = p - a; BF = p - b; CD = p - c$.
- c) $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$ (với h_1, h_2, h_3 là các đường cao của ΔABC)

2.89 Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Đường tròn $(O; r)$, $(O; r_1)$, $(O; r_2)$ theo thứ tự là đường tròn nội tiếp các $\Delta ABC, \Delta ABH, \Delta ACH$. Chứng minh rằng:

- a) $AB + AC - BC = 2r$.
- b) $R + r_1 + r_2 = AH$.
- c) $r^2 = r_1^2 + r_2^2$

2.90 Cho ΔABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và đường tròn bàng tiếp trong góc A tiếp xúc với BC tại D, tiếp xúc với phần kéo dài của AC và AB tại E và F. Tính theo a, b, c độ dài AE, BD, CD.

2.91 Cho ΔABC có I là tâm đường tròn nội tiếp và O là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A. gọi D và F lần lượt là tiếp điểm của (I) và (O) trên BC. Chứng minh rằng $BD = CF$.

2.92 Tính cạnh huyền của một tam giác vuông, biết r là bán kính đường tròn nội tiếp và R là bán kính đường tròn bàng tiếp trong góc vuông.

2.93 Cho ΔABC đường cao AH. Gọi E và F lần lượt là các điểm đối xứng của H qua AB và AC. Đường thẳng EF cắt AB ở I và cắt AC ở K. C/m:

- A là tâm đường tròn bàng tiếp ΔHIK .
- BK và CI là các đường cao của ΔABC .

G - Vị trí tương đối của hai đường tròn

1. Vị trí tương đối của hai đường tròn:

Cho $(O; R)$ và $(O'; r)$ với $R > r$ và $OO' = d$.

- (O) và (O') cắt nhau $\Leftrightarrow R - r < d < R + r$
- (O) và (O') tiếp xúc ngoài $\Leftrightarrow d = R + r$
- (O) và (O') tiếp xúc trong $\Leftrightarrow d = R - r$
- (O) và (O') ở ngoài nhau $\Leftrightarrow d > R + r$
- (O) và (O') đựng nhau $\Leftrightarrow d < R - r$
- (O) và (O') đồng tâm $\Leftrightarrow d = 0$

2. Tính chất đường nối tâm:

- Nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm, tức là đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.
- Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.
- Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn. Có hai loại: tiếp tuyến chung trong (cắt đoạn nối tâm) và tiếp tuyến chung ngoài (không cắt đoạn nối tâm).

2.94 Cho $(O; 5\text{cm})$ và điểm O' sao cho $OO' = 7\text{cm}$. Với giá trị nào của R' thì $(O; R')$:

- Cắt đường tròn (O)
- Tiếp xúc với (O)
- Không có điểm chung với (O) ?

2.95 Cho $(O; R)$ và điểm I cách O một khoảng $d < R$. Với giá trị nào của r thì đường tròn $(I; r)$ tiếp xúc với $(O; R)$?

- 2.96** Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài nhau tại A . Đường thẳng bất kì qua A cắt (O) và (O') theo thứ tự tại B và C . Chứng minh rằng các tiếp tuyến tại B và C song với nhau.
- 2.97** Cho $(O; 30\text{cm})$ và $(O'; 40\text{cm})$ cắt nhau tại A và B . Biết $AB = 48\text{cm}$. Chứng minh: OO' là đường trung trực của AB . Tính khoảng cách OO'
- 2.98** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Kẻ các đường kính AOC và $AO'D$. Chứng minh ba điểm C, B, D thẳng hàng và $AB \perp CD$.
- 2.99** Cho (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Gọi I là trung điểm của OO' . Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với IA , cắt (O) và (O') tại C và D (khác A). Chứng minh: $AC = AD$.
- 2.100** Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài nhau tại A . Vẽ hai đường kính AOB và $AO'C$ Gọi DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn, $D \in (O), E \in (O')$. Gọi M là giao điểm của BD và CE .
- Tính $\angle DAE$.
 - Tứ giác $ADME$ là hình gì? Vì sao?
 - Chứng minh: MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.
- 2.101** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B , trong đó O' nằm trên (O) . Kẻ đường kính $O'OC$ của đường tròn (O) .
- Chứng minh: CA, CB là các tiếp tuyến của (O') .
 - Đường vuông góc với AO' tại O' cắt CB ở I . Đường vuông góc với AC tại C cắt đường thẳng $O'B$ ở K . Chứng minh O, I, K thẳng hàng.
- 2.102** Cho hai đường tròn đồng tâm O . Gọi AB là dây bất kì của đường tròn nhỏ. Đường thẳng AB cắt đường tròn lớn ở C và D (A nằm giữa B và C). So sánh AC và BD .
- 2.103** Cho I là trung điểm của của đoạn thẳng AB . Vẽ các đường tròn $(I; IA)$ và $(B; BA)$.
- Xét vị trí tương đối của hai đường tròn (I) và (B) .
 - Đường thẳng qua A cắt các đường tròn (I) và (B) theo thứ tự tại M và N . So sánh AM và MN .
- 2.104** Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Gọi CD là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn ($C \in (O), D \in (O')$).
- Tính $\angle CAD$.
 - Tính CD biết $OA = 4,5\text{cm}$ và $O'A = 2\text{cm}$.
- 2.105** Cho hai đường tròn đồng tâm O . Một đường tròn (O') cắt đường tròn nhỏ tại A và B , cắt đường tròn lớn tại C và D . Chứng minh rằng $AB \parallel CD$.
-

-
- 2.106** Cho đường tròn $(O; 3\text{cm})$ và đường tròn $(O'; 1\text{cm})$ tiếp xúc ngoài nhau tại A . Vẽ hai bán kính OB và $O'C$ song song với nhau và thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ OO' .
- Tính \widehat{BAC}
 - Gọi I là giao điểm của BC và OO' . Tính OI .
- 2.107** Cho $(O; 48\text{cm})$ và $(O'; 14\text{cm})$, khoảng cách tâm là $d = 50\text{cm}$.
- Chứng minh: (O) và (O') cắt nhau tại A và B .
 - Tính $\widehat{OAA'}$.
 - Tính AB .
- 2.108** Cho ΔABC vuông tại A , có $AB = a$, $BC = 2a$. Các đường tròn đường kính AB , AC cắt nhau tại điểm thứ hai là D .
- Chứng minh: B, C, D thẳng hàng.
 - Gọi E và F lần lượt là điểm đối xứng của D qua AB và AC .
Chứng minh: E, A, F thẳng hàng.
 - Tính theo a khoảng cách từ trung điểm O của BC đến EF .
 - Tính theo a diện tích tứ giác $BCEF$.
- 2.109** Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Đường thẳng (d) tiếp xúc với nửa đường tròn tại C . Gọi D và E theo thứ tự là hình chiếu của A và B trên (d) . Chứng minh:
- C là trung điểm của DE .
 - $(A; AD)$ và $(B; BE)$ tiếp xúc ngoài nhau tại một điểm H thuộc đường kính AB .
- 2.110** Cho ΔABC vuông tại A . Vẽ các đường tròn (O) và (I) đi qua A và tiếp xúc với BC tại các điểm B và C . Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh:
- Các đường tròn (O) và (I) tiếp xúc với nhau.
 - AM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (I) .
 - ΔOMI vuông.
 - BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔOMI .
- 2.111** Cho $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài tại A . Gọi BC là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn $(B \in (O), C \in (O'))$. Tiếp tuyến chung trong của (O) và (O') cắt BC tại I .
- Chứng tỏ các góc \widehat{BAC} và $\widehat{OIO'}$ là góc vuông.
 - Kẻ đường kính BD của (O) . Chứng minh ba điểm A, C, D thẳng hàng.
 - Tính theo R và r độ dài BC, BA, CA .
 - Kẻ đường kính CE của (O') . Chứng minh: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ADE}$.
-

2.112 Cho $(O; R)$ và $(O'; r)$ ở ngoài nhau. AB là một trong các tiếp tuyến chung ngoài, EF là một trong các tiếp tuyến chung trong (A và E thuộc đường tròn (O)). EF cắt AB tại C .

- Chứng minh: $OC \perp O'C$.
- Chứng minh: $AC \cdot BC = R \cdot r$
- Tính AB, EF theo R, r và $OO' = d$.

2.113 Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Dây AC của đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn (O') tại A . Dây AD của đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O) tại A . Gọi K là điểm đối xứng với A qua trung điểm của I của OO' , E là điểm đối xứng với A qua B . Chứng minh:

- $AB \perp KB$
- Bốn điểm A, C, E, D nằm trên một đường tròn.

H - Ôn tập chương 2

2.114 Cho ΔABC vuông tại A có $B = 60^\circ$ và $BC = 2a$. Vẽ đường kính AB và đường tròn (F) đường kính AC . Hai đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ hai là H .

- Chứng minh: B, H, C thẳng hàng.
- Chứng minh: AC tiếp xúc (E) và $EF \perp AH$ tại K .
- Tính theo a diện tích ΔAKF .
- Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh: A, E, H, M, F cùng thuộc một đường tròn.

2.115 Cho đoạn thẳng AB , điểm C nằm giữa A và B . Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC và CB . Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn lớn tại D . DA, DB cắt nửa đường tròn có đường kính AC, CB theo thứ tự tại M, N .

- Tứ giác $DMCN$ là hình gì? Vì sao?
- Chứng minh: $DM \cdot DA = DN \cdot DB$
- Chứng minh: MN là tiếp tuyến chung của nửa đường tròn có đường kính AC và CB .
- Điểm C ở vị trí nào trên AB thì MN có độ dài lớn nhất?

2.116 Cho đường tròn tâm O đường kính AB , điểm M thuộc đường tròn. Gọi N là điểm đối xứng với A qua M . BN cắt đường tròn ở C . Gọi E là giao điểm của AC và BM .

- Chứng minh: $NE \perp AB$.
- Gọi F là điểm đối xứng với E qua M . Chứng minh: FA là tiếp tuyến của (O) .
- Chứng minh: FN là tiếp tuyến của đường tròn $(B; BA)$.

2.117 Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB và (d) là tiếp tuyến của (O) tại A . M là điểm di động trên (d) . Kẻ tiếp tuyến MC đến (O) (C là tiếp điểm khác A). Tia BC cắt (d) tại K và kẻ CH vuông góc với AB tại H .

a) Chứng minh: $OM \parallel BK$.

b) BM cắt CH tại I . Chứng minh: I là trung điểm của CH .

c) Gọi N là trực tâm của $\triangle AMC$. Chứng minh: tứ giác $AOCN$ là hình bình hành. Từ đó suy ra N di động trên đường cố định, chỉ rõ đường cố định đó ?

d) Cho $OM = 2R$. Chứng minh: $\triangle AMC$ đều và tính $AM, S_{\triangle AMC}$ theo R .

2.118 Cho đường tròn $(O; R)$ và hai điểm A, B thuộc đường tròn. Tiếp tuyến tại A và B của (O) cắt nhau tại C . Tia CO cắt (O) tại E và F ($E \in OC$). Gọi I là trung điểm của AB .

a) Cho biết $\angle AOB = 120^\circ$.

i. Tính OI theo R và chứng minh I thuộc một đường thẳng cố định khi A, B di động trên (O) sao cho $\angle AOB$ luôn có số đo bằng 120° .

ii. Lấy $K \in AC$ ($AK < AC$). Vẽ đường tròn đường kính OK cắt cung AB của (O) tại M (M khác A). Tia KM cắt BC tại H . Chứng minh: KH là tiếp tuyến của (O) .

iii. Lấy $T \in AB$ sao cho $\angle KOT = 60^\circ$ (A, T nằm khác phía đối với OK).

Chứng minh: O, T, H thẳng hàng.

b) Chứng minh: $EI \cdot FC = FI \cdot EC$.

2.119 Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB và dây $AC = R$. Vẽ đường kính CD của (O) .

a) Tính theo R độ dài đoạn AD và $S_{\triangle ACD}$.

b) Gọi xy là tiếp tuyến tại B của (O) . Tia AC và AD cắt xy tại E và F . Gọi M là trung điểm của EF , đường thẳng (d) qua C và song song với AM . Đoạn thẳng AM cắt CD tại I . Chứng minh: (d) tiếp xúc (O) .

c) Chứng minh: 4 điểm I, O, M, B cùng thuộc một đường tròn.

2.120 Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài A . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài $DE, D \in (O), E \in (O')$. Kẻ tiếp tuyến chung trong tại A , cắt DE ở I . Gọi M là giao điểm của OI và AD, N là giao điểm của $O'I$ và AE .

a) Tứ giác $AMIN$ là hình gì ? Vì sao ?

b) Chứng minh: $IM \cdot IO = IN \cdot IO'$

c) Chứng minh: OO' là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính là DE .

d) Biết $OA = 5\text{cm}, O'A = 3,2\text{cm}$. Tính DE .

2.121 Cho ΔABC vuông tại A ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) có đường kính BC. Kẻ dây AD vuông góc với BC. Gọi E là giao điểm của DB và CA. Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với BC, cắt BC ở H, cắt AB ở F. Chứng minh:

- a) ΔEBF cân. b) ΔHAF cân. c) HA là tiếp tuyến của (O).

2.122 Cho (O) đường kính AB, điểm C nằm giữa A và O. Vẽ đường tròn (O') có đường kính CB.

- a) Hai đường tròn (O) và (O') có vị trí tương đối như thế nào với nhau ?
 b) Kẻ dây DE của đường tròn (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC. Tứ giác ADCE là hình gì ? Vì sao ?
 c) Gọi K là giao điểm của DB và (O'). Chứng minh: ba điểm E, C, K thẳng hàng.
 d) Chứng minh: KH là tiếp tuyến của (O).

2.123 Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') tiếp xúc ngoài tại A ($R > R'$). Vẽ các đường kính AOB, AO'C. Dây DE của đường tròn (O) vuông góc với BC tại trung điểm K của BC.

- a) Chứng minh: tứ giác BDCE là hình thoi.
 b) Gọi I là giao điểm của EC và đường tròn (O). Chứng minh: ba điểm D, A, I thẳng hàng.
 c) Chứng minh: KI là tiếp tuyến của (O).

2.124 Cho đường tròn (O; R) và tiếp tuyến xy tại điểm A cố định trên đường tròn. Từ điểm B tùy ý trên (O) (khác A), kẻ $BH \perp xy$. Đường phân giác trong của góc $A\hat{O}B$ cắt BH tại C và cắt xy tại M. Chứng minh:

- a) BA là tia phân giác của $\angle OBH$.
 b) MB là tiếp tuyến của (O; R).
 c) C luôn luôn thuộc một đường tròn cố định khi B thay đổi.

2.125 Cho đường tròn (O ; R) AB. Vẽ dây CD của (O) vuông góc với OA tại trung điểm của M của OA. Gọi E là trung điểm của BC.

- d) Chứng minh: O, M, C, E cùng thuộc một đường tròn.
 a) Tính BC theo R.
 b) Tiếp tuyến tại B của (O) cắt OE tại N. C/m: NC là tiếp tuyến của (O).
 c) Chứng minh: NA chia MC hai phần bằng nhau.
 d) Chứng minh: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4R^2$.

2.126 Cho ΔABC có $A = 90^\circ$, ($AB < AC$) nội tiếp (O ; R), có đường cao AH. Gọi M là trung điểm AC.

- a) Chứng minh: A, M, O, H cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm I của đường tròn này.
- b) Chứng minh: (O) và (I) tiếp xúc nhau.
- c) Đường tròn (I) cắt AB tại N. Chứng minh: I, M, N thẳng hàng.

2.127 Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Lấy điểm $M \in (O)$. Gọi P, Q theo thứ tự là hình chiếu của M trên AB và tiếp tuyến Ax của (O). gọi I là trung điểm của PQ.

- a) Chứng minh: A, I, M thẳng hàng. Suy ra I thuộc một đường tròn cố định và tính theo R bán kính của đường tròn này.
- b) Tiếp tuyến tại M của (O) cắt tiếp tuyến Ax ở N. Chứng minh: O, I, N thẳng hàng và MA là phân giác các góc OMQ, NMP.
- c) Đường trung trực của đường kính AB cắt MB tại K.
Chứng minh: $NK = R$.
- d) Xác định vị trí của M để $\triangle AMN$ đều.

2.128 Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Lấy điểm C ngoài đường tròn sao cho B là trung điểm của OC. Từ C vẽ hai tiếp tuyến CM và CN đến đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm).

- a) Chứng minh: $\triangle AMN$ là tam giác cân. Tính CM và AM theo R.
- b) Chứng minh: tứ giác AMCN là hình thoi. Tính S_{AMCN} theo R.
- c) Gọi I là trung điểm của CM, AI cắt OM tại K. Chứng minh: K là trung điểm của AI.
- d) Tính diện tích $\triangle AKB$ theo R.

2.129 Cho đường tròn (O ; R) và đường thẳng xy cố định ở ngoài (O). Từ điểm M bất kì trên xy kẻ hai tiếp tuyến MB, MC đến đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm).

- a) Xác định tâm O' của đường tròn đi qua M, B, O, C.
- b) Chứng minh: (O') luôn đi qua một điểm cố định H khác O.
- c) Dây cung BC cắt OH tại I và cắt OM tại K.
Chứng minh: $OI.OH = OK.OM = R^2$. Suy ra khi M thay đổi trên xy thì BC luôn đi qua một điểm cố định.

2.130 Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$ và một điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A, B). Đường thẳng (d) tiếp xúc với nửa đường tròn tại M và cắt trung trực của đoạn AB tại I. Đường tròn (I) tiếp xúc với AB cắt đường thẳng (d) tại C và D (D nằm trong góc BÔM).

- a) Chứng minh: OC, OD là các tia phân giác của các góc AÔM và BÔM.

- b) Chứng minh: CA và DB vuông góc với AB.
 c) Chứng minh: $AC \cdot BD = R^2$.
 d) AM cắt BD tại F, BM cắt AC tại E. Chứng minh: $S_{\Delta ABM} = S_{\Delta EFM}$.
 e) Xác định vị trí của M sao cho diện tích hình thang ABCD nhỏ nhất.

2.131 Cho đường tròn (O) và dây BC cố định. Điểm A di động trên cung lớn BC. Gọi M là trung điểm của dây AC. Vẽ đường kính BD của (O).

- a) Chứng minh: M thuộc một đường tròn cố định. Xác định tâm I của đường tròn này.
 b) Gọi K là trung điểm của BC, đường tròn (I) cắt CD tại J.
 Chứng minh: K, I, J thẳng hàng.
 c) Gọi H là hình chiếu của M trên AB, chứng tỏ đường thẳng HM luôn đi qua trung điểm của dây CD khi A thay đổi.
 d) Chứng minh: khi A di động thì H luôn di động trên một đường tròn cố định.

2.132 Cho đường tròn (O ; R) và đường thẳng (d) cắt đường tròn tại E, F. Từ điểm A bất kì trên (d) và ở ngoài đường tròn (O), vẽ các tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của EF và BC cắt OA, OH lần lượt tại I, K. Chứng minh:

- a) 5 điểm A, B, C, O, H thuộc một đường tròn.
 b) $OI \cdot OA = OH \cdot OK = R^2$.
 c) Khi A thay đổi, đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.
 d) I luôn thuộc một đường tròn cố định khi A thay đổi.
 e) KE, KF là các tiếp tuyến của (O; R).

2.133 Cho đoạn thẳng AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB kẻ hai tia bất kì Ax và By song song với nhau. Một đường tròn tâm M tiếp xúc với AB tại C, với Ax tại D, với By tại E.

- a) Nêu cách dựng đường tròn tâm M.
 b) Chứng minh: $AD + BE$ không phụ thuộc vào vị trí của Ax và By.
 c) Chứng minh: E, M, D thẳng hàng.
 d) Chứng minh: M thuộc một đường tròn cố định khi Ax và By thay đổi.

2.134 Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; R') tiếp xúc ngoài tại A. Gọi BC là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (B ∈ (O)).

- a) Chứng minh: $\angle BAC = 90^\circ$.
 b) Gọi D là điểm đối xứng của C qua O'. Chứng minh: B, A, D thẳng hàng.
 c) Chứng minh: BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO'.

d) Chứng minh: $BC = 2\sqrt{RR'}$.

2.135 Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B . Gọi C và lần lượt là điểm đối xứng của A qua O và O' . Một đường thẳng (d) bất kì qua A cắt (O) và (O') tại M và N .

a) Chứng minh: C, B, D thẳng hàng.

b) AC cắt (O) tại E , AD cắt (O') tại F . Chứng minh: C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh: trung trực của MN luôn đi qua trung điểm của CD khi (d) thay đổi. Suy ra trung điểm của MN luôn di động trên một đường tròn cố định.

d) Định vị trí của đường thẳng (d) để MN có độ dài lớn nhất.

2.136 Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Gọi M là điểm bất kì thuộc nửa đường tròn, H là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB . Vẽ đường tròn $(M; MH)$. Kẻ các tiếp tuyến AC, BD với đường tròn tâm M (C, D là các tiếp điểm khác H).

a) Chứng minh: C, M, D thẳng hàng và CD là tiếp tuyến của (O) .

b) Chứng minh: Khi M di chuyển trên AB thì tổng $AC + BD$ không đổi.

c) Giả sử CD và AB cắt nhau tại I . Chứng minh: $OH \perp OI$ không đổi.

2.137 Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm I trong (O) (I khác O).

a) Hãy vẽ dây cung AB qua I và nhận I làm trung điểm.

b) Gọi (I) là đường tròn tâm I có đường kính AB , đường thẳng OI cắt đường tròn (O) tại C và D , cắt đường tròn (I) tại E và F . Chứng tỏ C, D, E và F cách đều A và B .

c) Chứng minh: $AEBF$ là hình vuông.

d) So sánh 2 tích $IE \cdot IF$ và $IC \cdot ID$

e) Biết $OI = R/2$, tính độ dài các cạnh và diện tích của ΔACD và hình vuông $AEBF$ theo R .

2.138 Cho đường tròn $(O; R)$, H là điểm bên trong (O) (H khác O), CD là đường kính qua H ($HC > HD$), AB là dây cung vuông góc với CD tại H .

a) Chứng tỏ CD là đường trung trực của AB .

b) Chứng minh: $\angle CAD = \angle CBD = 90^\circ$.

c) Chứng minh: $HA \cdot HB = HC \cdot HD$ theo 2 cách:

i. Dùng 2 tam giác đồng dạng.

ii. Dùng hệ thức lượng trong tam giác vuông.

d) Trường hợp $OH = R/2$, chứng minh ΔABC đều và cạnh có độ dài là $R\sqrt{3}$. Suy ra cách vẽ tam giác đều có 3 đỉnh nằm trên đường tròn $(O; R)$ cho trước.

2.139 Cho ΔABC vuông tại A có đường cao AH. Gọi I và K lần lượt là tâm của 2 đường tròn có đường kính HB và HC.

a) Chứng tỏ 2 đường tròn (I) và (K) tiếp xúc ngoài nhau và tiếp xúc trong với đường tròn qua 3 điểm A, B, C.

b) Đường tròn (I) cắt AB tại D, đường tròn (K) cắt AC tại E. Chứng minh ADHE là hình chữ nhật và $AD \cdot AB = AE \cdot AC$. Suy ra ΔABC đồng dạng với ΔAED .

c) Chứng tỏ tứ giác BDEC có các góc đối bù nhau.

d) Cho $AH = 4$ và $HB = 3$. Tính diện tích của tứ giác BDEC bằng 2 cách:

i. Diện tích của nhiều tam giác.

ii. Diện tích của 2 tam giác.

2.140 Từ điểm I ở ngoài đường tròn $(O; R)$ vẽ 2 cát tuyến IAB và ICD (không qua O). Gọi M, N lần lượt là 2 trung điểm của 2 dây cung AB, CD.

a) Chứng minh: $OM \perp AB$, $ON \perp CD$, $OM + ON \leq 2R$, $CD < 2R$, $AB < 2R$.

b) Chứng tỏ có 1 đường tròn qua 4 điểm O, I, M, N. Xác định tâm K của đường tròn này.

c) Đường tròn (K) cắt (O) tại E và F. Chứng tỏ IE, IF là hai tiếp tuyến của (O). Suy ra cách dựng tiếp tuyến vẽ từ I đến (O).

d) Chứng tỏ: $AB > CD \Leftrightarrow OM < ON$. Nói rõ vị trí tương đối của 2 cát tuyến IAB và ICD lúc $AB = CD$.

e) Trường hợp dây cung $AB = R\sqrt{3}$. Tính các góc và diện tích của ΔAOB theo R.

2.141 Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB. AC và BD là hai dây cung song song với nhau.

a) Chứng minh: $AC = BD$, suy ra CD là đường kính của (O).

b) Chứng tỏ ACBD là hình chữ nhật.

c) Chứng tỏ rằng nếu dây cung $AC = R\sqrt{2}$ thì ACBD là hình vuông và ngược lại.

d) Tính diện tích ACBD trong trường hợp $\angle BAC = 30^\circ$.

2.142 Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ có $R = 8$, $R' = 6$ và $OO' = 10$.

- a) Chứng tỏ $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại 2 điểm A và B và OO' là đường trung trực của AB.
- b) Chứng minh AO là tiếp tuyến của (O') và AO' là tiếp tuyến của (O) .
- c) Gọi I là giao điểm OO' và AB. Tính độ dài của IA, IO.
- d) Xác định tâm và tính bán kính của đường tròn qua 4 điểm A, O, B, O' .
- e) Tìm điều kiện về bán kính của đường tròn (O) sao cho đường tròn này không có điểm chung nào với $(O'; R')$.

2.143 Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB, gọi (I) là đường tròn tâm I, đường kính OA.

- a) Chứng tỏ (O) và (I) tiếp xúc trong nhau.
- b) Cho C là điểm bất kì $\in (O)$ (C khác A, B), AC cắt (I) tại K. C/mình:
- $\triangle ABC$ và $\triangle AOK$ vuông.
 - K là trung điểm của AC và $OK = BC/2$
 - $\triangle IOK$ và $\triangle OBC$ đồng dạng.
- c) Gọi EF là đường kính của (O) qua K, chứng tỏ B, C, E, F là 4 đỉnh của hình thang cân.
- d) Cho $\angle BOC = 60^\circ$. Tính các cạnh, diện tích của $\triangle ABC$ và của hình thang cân BCEF.

2.144 Cho 2 đường tròn ngoài nhau $(O; R)$ và $(O'; r)$ với $R > r$, AB là tiếp tuyến chung ngoài (A là tiếp điểm trên (O) , B là tiếp điểm trên (O')). Từ O' vẽ $O'C \perp OA$.

- a) Chứng tỏ $ABO'C$ là hình chữ nhật.
- b) Chứng tỏ $O'C$ là tiếp tuyến của đường tròn tâm O bán kính $R' = R - r$.
- c) Suy ra cách dựng đường t/ tuyến chung ngoài AB khi cho trước 2 đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$.
- d) Tương tự, dựng tiếp tuyến chung trong của 2 đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$.
- e) Tính độ dài của tiếp tuyến chung ngoài và tiếp tuyến chung trong và khoảng cách hai tâm $d = OO'$ theo hai bán kính.

2.145 Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm I cố định với $OI = R/2$. AB là dây cung quay quanh I.

- a) Tìm vị trí C, D của A (hay B) tương ứng lúc độ dài IA (hay IB) dài nhất, ngắn nhất.
- b) Chứng tỏ tập hợp các trung điểm M của dây cung AB là một đường tròn, tìm tâm và bán kính đường tròn này.
- c) Gọi EF là vị trí giới hạn của dây cung AB lúc M tiến dần đến I. C/m:
- $EF \perp CD$.

ii. EF là độ dài ngắn nhất của dây cung AB và CD là độ dài lớn nhất của AB.

d) Chứng minh $\triangle CEF$ đều, tính chu vi và diện tích tam giác này theo R.

2.146 Cho $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài nhau tại E. Gọi AB là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn ($A \in (O), B \in (O')$).

a) Tính diện tích tứ giác AOO'B theo R và R'.

b) Gọi D là điểm đối xứng của A qua O. Chứng minh: B, E, D thẳng hàng.

c) Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng AB và đường tròn đường kính OO'.

2.147 Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn. Đường tròn tâm I đường kính BC cắt AB tại F, cắt AC tại E, BE cắt CF tại H.

a) Trong $\triangle ABC$ điểm H gọi là gì ?

b) Gọi K là điểm đối xứng của H qua I và M là điểm đối xứng của H qua BC. Chứng minh 5 điểm A, B, K, M, C cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn này.

c) Gọi O' là trung điểm của AH. Chứng minh O'OIM là hình thang cân.

d) G là trọng tâm của $\triangle ABC$. So sánh diện tích của $\triangle AOG$ và $\triangle AHG$.

2.148 Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn, kẻ tia tiếp tuyến Ax. Từ M trên Ax, kẻ tiếp tuyến MC tới nửa đường tròn ($C \in (O)$). Đường thẳng BC cắt tia Ax tại D.

a) Chứng minh: $MA = MD$.

b) Kẻ $CH \perp AB$, BM cắt CH tại I. Chứng minh: I là trung điểm của CH.

c) Kẻ tia $Oy \perp OM$, tia này cắt MC tại N. Chứng minh: NB là tiếp tuyến của nửa (O) .

2.149 Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài nhau tại A. Bán kính của (O) là $R = 5\text{cm}$, bán kính của (O') là $r = 3\text{cm}$. Một đường thẳng qua A hợp với OO' một góc 30° cắt (O) tại B, cắt đường tròn (O') tại C.

a) Chứng minh: $\angle AO'C = \angle AOB$ và $O'C \parallel OB$.

b) Chứng minh: tiếp tuyến của (O) tại B và tiếp tuyến của (O') tại C song song với nhau.

c) Tiếp tuyến của (O') tại C cắt đường thẳng OO' tại D. Tính CD và O'D.

d) Đường thẳng CD cắt đường thẳng BO tại E. Tính diện tích $\triangle ABE$.

2.150 Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB. Lấy điểm C ngoài đường tròn sao cho B là trung điểm của OC. Từ C vẽ hai tiếp tuyến CM, CN đến (O) với M, N là hai tiếp điểm.

a) Chứng minh: $\triangle AMN$ cân. Tính CM và AM theo R.

- b) Chứng minh: tứ giác AMCN là hình thoi. Tính S_{AMCN} theo R.
- c) Gọi I là trung điểm của CM. Đường thẳng AI cắt OM tại K.
Chứng minh: K là trung điểm của AI.
- d) Tính diện tích ΔAKB theo R.
-