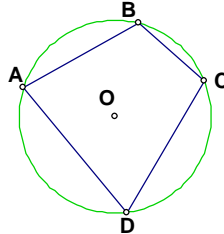


BÀI TẬP TỨ GIÁC NỘI TIẾP LỚP 9 CÓ LỜI GIẢI

I) Các kiến thức cần nhớ

1) Khái niệm:

Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (Gọi tắt là tứ giác nội tiếp)



2) Định lý

- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180°
- Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp đường tròn.

3) Dấu hiệu nhận biết (các cách chứng minh) tứ giác nội tiếp

- Tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° .
- Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện.
- Tứ giác có bốn đỉnh cách đều một điểm (mà ta có thể xác định được). Điểm đó là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác.
- Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α .

II) Bài tập

Bài 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và cắt đường tròn (O) lần lượt tại M, N, P.

Chứng minh rằng:

1. Tứ giác CEHD, nội tiếp .
2. Bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn.
3. $AE.AC = AH.AD$; $AD.BC = BE.AC$.
4. H và M đối xứng nhau qua BC.
5. Xác định tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

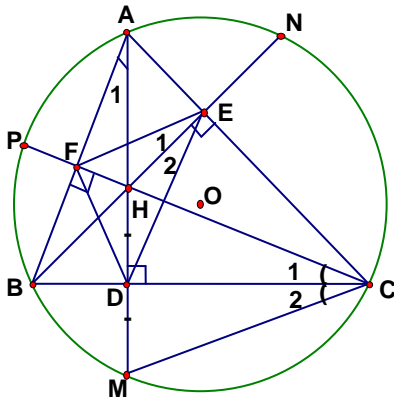
Lời giải:

1. Xét tứ giác CEHD ta có:

$$\angle CEH = 90^\circ \text{ (Vì BE là đường cao)}$$

$\angle CDH = 90^0$ (Vì AD là đường cao)

$\Rightarrow \angle CEH + \angle CDH = 180^0$



Mà $\angle CEH$ và $\angle CDH$ là hai góc đối của tứ giác CEHD, Do đó CEHD là tứ giác nội tiếp

2. Theo giả thiết: BE là đường cao $\Rightarrow BE \perp AC \Rightarrow \angle BEC = 90^0$.

CF là đường cao $\Rightarrow CF \perp AB \Rightarrow \angle BFC = 90^0$.

Như vậy E và F cùng nhìn BC dưới một góc $90^0 \Rightarrow$ E và F cùng nằm trên đường tròn đường kính BC.

3. Vậy bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn.

Xét hai tam giác AEH và ADC ta có: $\angle AEH = \angle ADC = 90^0$; \hat{A} là góc chung

$$\Rightarrow \Delta AEH \sim \Delta ADC \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AE.AC = AH.AD.$$

* Xét hai tam giác BEC và ADC ta có: $\angle BEC = \angle ADC = 90^0$; $\angle C$ là góc chung

$$\Rightarrow \Delta BEC \sim \Delta ADC \Rightarrow \frac{BE}{AD} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AD.BC = BE.AC.$$

4. Ta có $\angle C_1 = \angle A_1$ (vì cùng phụ với góc ABC)

$\angle C_2 = \angle A_1$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM)

$\Rightarrow \angle C_1 = \angle C_2 \Rightarrow$ CB là tia phân giác của góc HCM; lại có $CB \perp HM \Rightarrow \Delta CHM$ cân tại C

\Rightarrow CB cũng là đường trung trực của HM vậy H và M đối xứng nhau qua BC.

5. Theo chứng minh trên bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn

$\Rightarrow \angle C_1 = \angle E_1$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BF)

Cũng theo chứng minh trên CEHD là tứ giác nội tiếp

$\angle C_1 = \angle E_2$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung HD)

$\angle E_1 = \angle E_2 \Rightarrow$ EB là tia phân giác của góc FED.

Chứng minh tương tự ta cũng có FC là tia phân giác của góc DFE mà BE và CF cắt nhau tại H do đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

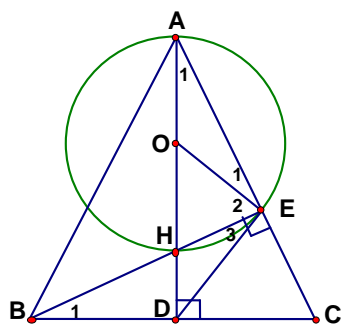
Bài 2. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), các đường cao AD, BE, cắt nhau tại H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE.

1. Chứng minh tứ giác CEHD nội tiếp .
2. Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.
3. Chứng minh $ED = \frac{1}{2} BC$.
4. Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).
5. Tính độ dài DE biết $DH = 2$ Cm, $AH = 6$ Cm.

Lời giải:

Xét tứ giác CEHD ta có:

$$\angle CEH = 90^0 \text{ (Vì BE là đường cao)}$$



$$\angle CDH = 90^0 \text{ (Vì AD là đường cao)}$$

$$\Rightarrow \angle CEH + \angle CDH = 180^0$$

Mà $\angle CEH$ và $\angle CDH$ là hai góc đối của tứ giác CEHD , Do đó CEHD là tứ giác nội tiếp

2. Theo giả thiết: BE là đường cao $\Rightarrow BE \perp AC \Rightarrow \angle BEA = 90^0$.

$$AD \text{ là đường cao } \Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow \angle BDA = 90^0.$$

Như vậy E và D cùng nhìn AB dưới một góc $90^0 \Rightarrow$ E và D cùng nằm trên đường tròn đường kính AB.

Vậy bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Theo giả thiết tam giác ABC cân tại A có AD là đường cao nên cũng là đường trung tuyến

\Rightarrow D là trung điểm của BC. Theo trên ta có $\angle BEC = 90^0$.

$$\text{Vậy tam giác BEC vuông tại E có ED là trung tuyến } \Rightarrow DE = \frac{1}{2} BC.$$

Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE nên O là trung điểm của AH $\Rightarrow OA = OE \Rightarrow$

$$\text{tam giác AOE cân tại O } \Rightarrow \angle E_1 = \angle A_1 \text{ (1).}$$

$$\text{Theo trên } DE = \frac{1}{2} BC \Rightarrow \text{tam giác DBE cân tại D } \Rightarrow \angle E_3 = \angle B_1 \text{ (2)}$$

$$\text{Mà } \angle B_1 = \angle A_1 \text{ (vì cùng phụ với góc ACB)} \Rightarrow \angle E_1 = \angle E_3 \Rightarrow \angle E_1 + \angle E_2 = \angle E_2 + \angle E_3$$

Mà $\angle E_1 + \angle E_2 = \angle BEA = 90^\circ \Rightarrow \angle E_2 + \angle E_3 = 90^\circ = \angle OED \Rightarrow DE \perp OE$ tại E.

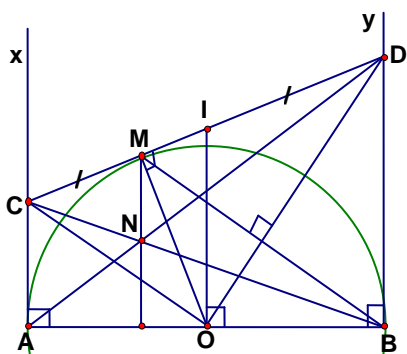
Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E.

5. Theo giả thiết $AH = 6 \text{ cm} \Rightarrow OH = OE = 3 \text{ cm}$; $DH = 2 \text{ cm} \Rightarrow OD = 5 \text{ cm}$. áp dụng định lí Pitago cho tam giác OED vuông tại E ta có $ED^2 = OD^2 - OE^2 \Leftrightarrow ED^2 = 5^2 - 3^2 \Leftrightarrow ED = 4 \text{ cm}$

Bài 3 Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax, By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

1. Chứng minh $AC + BD = CD$.
2. Chứng minh $\angle COD = 90^\circ$.
3. Chứng minh $AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}$.
4. Chứng minh $OC \parallel BM$
5. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.
6. Chứng minh $MN \perp AB$.
7. Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:



Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $CA = CM$; $DB = DM \Rightarrow AC + BD = CM + DM$.

Mà $CM + DM = CD \Rightarrow AC + BD = CD$

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OC là tia phân giác của góc AOM; OD là tia phân giác của góc BOM, mà $\angle AOM$ và $\angle BOM$ là hai góc kề bù $\Rightarrow \angle COD = 90^\circ$.

Theo trên $\angle COD = 90^\circ$ nên tam giác COD vuông tại O có $OM \perp CD$ (OM là tiếp tuyến).
áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có $OM^2 = CM \cdot DM$,

Mà $OM = R$; $CA = CM$; $DB = DM \Rightarrow AC \cdot BD = R^2 \Rightarrow AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}$.

Theo trên $\angle COD = 90^\circ$ nên $OC \perp OD$.(1)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $DB = DM$; lại có $OM = OB = R \Rightarrow OD$ là trung trực của $BM \Rightarrow BM \perp OD$.(2). Từ (1) Và (2) $\Rightarrow OC \parallel BM$ (Vì cùng vuông góc với OD).

Gọi I là trung điểm của CD ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác COD đường kính CD có IO là bán kính.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $AC \perp AB$; $BD \perp AB \Rightarrow AC \parallel BD \Rightarrow$ tứ giác $ACDB$ là hình thang. Lại có I là trung điểm của CD ; O là trung điểm của $AB \Rightarrow IO$ là đường trung bình của hình thang $ACDB$

$\Rightarrow IO \parallel AC$, mà $AC \perp AB \Rightarrow IO \perp AB$ tại $O \Rightarrow AB$ là tiếp tuyến tại O của đường tròn đường kính CD

6. Theo trên $AC \parallel BD \Rightarrow \frac{CN}{BN} = \frac{AC}{BD}$, mà $CA = CM$; $DB = DM$ nên suy ra $\frac{CN}{BN} = \frac{CM}{DM}$

$\Rightarrow MN \parallel BD$ mà $BD \perp AB \Rightarrow MN \perp AB$.

7. (HD): Ta có chu vi tứ giác $ACDB = AB + AC + CD + BD$ mà $AC + BD = CD$ nên suy ra chu vi tứ giác $ACDB = AB + 2CD$ mà AB không đổi nên chu vi tứ giác $ACDB$ nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất , mà CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữa Ax và By tức là CD vuông góc với Ax và By . Khi đó $CD \parallel AB \Rightarrow M$ phải là trung điểm của cung AB .

Bài 4 Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A , O là trung điểm của IK .

1. Chứng minh B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
3. Tính bán kính đường tròn (O) Biết $AB = AC = 20$ Cm, $BC = 24$ Cm.

Lời giải: (HD)

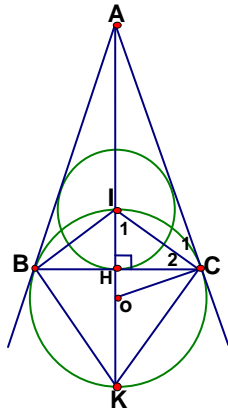
1. Vì I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A nên BI và BK là hai tia phân giác của hai góc kề bù đỉnh B

Do đó $BI \perp BK$ hay $\angle IBK = 90^\circ$.

Tương tự ta cũng có $\angle ICK = 90^\circ$ như vậy B và C cùng nằm trên đường tròn đường kính IK do đó B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có $\angle C_1 = \angle C_2$ (1) (vì CI là phân giác của góc ACH).

$\angle C_2 + \angle I_1 = 90^\circ$ (2) (vì $\angle IHC = 90^\circ$).



$$\angle I_1 = \angle ICO \text{ (3) (vì tam giác OIC cân tại O)}$$

Từ (1), (2) , (3) $\Rightarrow \angle C_1 + \angle ICO = 90^\circ$ hay $AC \perp OC$. Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Từ giả thiết $AB = AC = 20 \text{ Cm}$, $BC = 24 \text{ Cm} \Rightarrow CH = 12 \text{ cm}$.

$$AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow AH = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \text{ (cm)}$$

$$CH^2 = AH.OH \Rightarrow OH = \frac{CH^2}{AH} = \frac{12^2}{16} = 9 \text{ (cm)}$$

$$OC = \sqrt{OH^2 + HC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ (cm)}$$

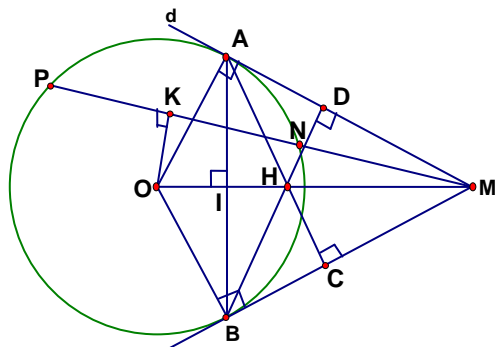
Bài 5 Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ $AC \perp MB$, $BD \perp MA$, gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

1. Chứng minh tứ giác AMBO nội tiếp.
2. Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn .
3. Chứng minh $OI.OH = R^2$; $OI. IM = IA^2$.
4. Chứng minh OAHB là hình thoi.
5. Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.
6. Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d

Lời giải:

(HS tự làm).

Vì K là trung điểm NP nên $OK \perp NP$ (quan hệ đường kính



Và đây cũng $\Rightarrow \angle OKM = 90^\circ$. Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\angle OAM = 90^\circ$; $\angle OBM = 90^\circ$. như vậy K, A, B cùng nhìn OM dưới một góc 90° nên cùng nằm trên đường tròn đường kính OM.

Vậy năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Ta có $MA = MB$ (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau); $OA = OB = R$

$\Rightarrow OM$ là trung trực của $AB \Rightarrow OM \perp AB$ tại I.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\angle OAM = 90^\circ$ nên tam giác OAM vuông tại A có AI là đường cao.

áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao $\Rightarrow OI \cdot OM = OA^2$ hay $OI \cdot OM = R^2$; và $OI \cdot IM = IA^2$.

4. Ta có $OB \perp MB$ (tính chất tiếp tuyến); $AC \perp MB$ (gt) $\Rightarrow OB \parallel AC$ hay $OB \parallel AH$.

$OA \perp MA$ (tính chất tiếp tuyến); $BD \perp MA$ (gt) $\Rightarrow OA \parallel BD$ hay $OA \parallel BH$.

\Rightarrow Tứ giác OAHB là hình bình hành; lại có $OA = OB (=R) \Rightarrow$ OAHB là hình thoi.

5. Theo trên OAHB là hình thoi. $\Rightarrow OH \perp AB$; cũng theo trên $OM \perp AB \Rightarrow O, H, M$ thẳng hàng (Vì qua O chỉ có một đường thẳng vuông góc với AB).

6. (HD) Theo trên OAHB là hình thoi. $\Rightarrow AH = AO = R$. Vậy khi M di động trên d thì H cũng di động nhưng luôn cách A cố định một khoảng bằng R. Do đó quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d là nửa đường tròn tâm A bán kính $AH = R$

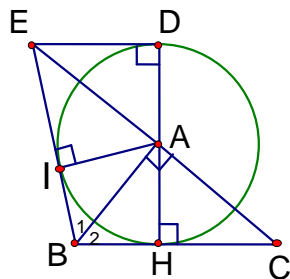
Bài 6 Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Gọi HD là đường kính của đường tròn (A; AH). Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt CA ở E.

1. Chứng minh tam giác BEC cân.
2. Gọi I là hình chiếu của A trên BE, Chứng minh rằng $AI = AH$.
3. Chứng minh rằng BE là tiếp tuyến của đường tròn (A; AH).
4. Chứng minh $BE = BH + DE$.

Lời giải: (HD)

$\Delta AHC = \Delta ADE$ (g.c.g) $\Rightarrow ED = HC$ (1) và $AE = AC$ (2).

Vì $AB \perp CE$ (gt), do đó AB vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của $\triangle BEC \Rightarrow BEC$ là tam giác cân. $\Rightarrow \angle B_1 = \angle B_2$



2. Hai tam giác vuông ABI và ABH có cạnh huyền AB chung, $\angle B_1 = \angle B_2 \Rightarrow \triangle AHB = \triangle AIB$

$\Rightarrow AI = AH$.

3. $AI = AH$ và $BE \perp AI$ tại $I \Rightarrow BE$ là tiếp tuyến của $(A; AH)$ tại I .

4. $DE = IE$ và $BI = BH \Rightarrow BE = BI + IE = BH + ED$

Bài 7 Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao cho $AP > R$, từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M .

1. Chứng minh rằng tứ giác $APMO$ nội tiếp được một đường tròn.
2. Chứng minh $BM \parallel OP$.
3. Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N . Chứng minh tứ giác $OBPN$ là hình bình hành.
4. Biết AN cắt OP tại K , PM cắt ON tại I ; PN và OM kéo dài cắt nhau tại J . Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Lời giải:

(HS tự làm).

Ta có $\angle ABM$ nội tiếp chắn cung AM ; $\angle AOM$ là góc ở tâm

chắn cung $AM \Rightarrow \angle ABM = \frac{\angle AOM}{2}$ (1) OP là tia phân giác $\angle AOM$ (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \angle AOP = \frac{\angle AOM}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle ABM = \angle AOP$ (3)

4) Chứng minh rằng : Tứ giác AKFH là hình thoi.

5) Xác định vị trí M để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn.

Lời giải:

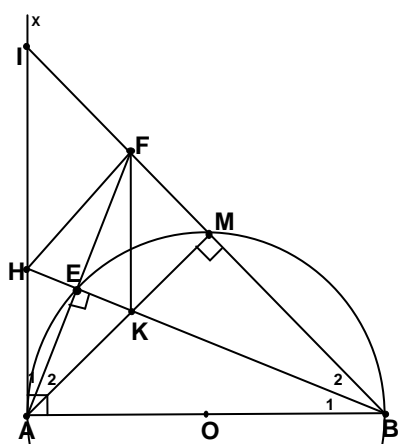
1. Ta có : $\angle AMB = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle KMF = 90^\circ$ (vì là hai góc kề bù).

$\angle AEB = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle KEF = 90^\circ$ (vì là hai góc kề bù).

$\Rightarrow \angle KMF + \angle KEF = 180^\circ$. Mà $\angle KMF$ và $\angle KEF$ là hai góc đối của tứ giác EFMK do đó EFMK là tứ giác nội tiếp.



Ta có $\angle IAB = 90^\circ$ (vì AI là tiếp tuyến) $\Rightarrow \triangle AIB$ vuông tại A
có $AM \perp IB$ (theo trên).

áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao $\Rightarrow AI^2 = IM \cdot IB$.

Theo giả thiết AE là tia phân giác góc IAM $\Rightarrow \angle IAE = \angle MAE \Rightarrow AE = ME$ (lí do)

$\Rightarrow \angle ABE = \angle MBE$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) $\Rightarrow BE$ là tia phân giác góc ABF.

(1)

Theo trên ta có $\angle AEB = 90^\circ \Rightarrow BE \perp AF$ hay BE là đường cao của tam giác ABF (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle BAF$ là tam giác cân. tại B .

$\triangle BAF$ là tam giác cân. tại B có BE là đường cao nên đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow E$ là trung điểm của AF. (3)

Từ $BE \perp AF \Rightarrow AF \perp HK$ (4), theo trên AE là tia phân giác góc IAM hay AE là tia phân giác $\angle HAK$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \triangle HAK$ là tam giác cân. tại A có AE là đường cao nên đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow E$ là trung điểm của HK. (6).

Từ (3) , (4) và (6) $\Rightarrow AKFH$ là hình thoi (vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường).

(HD). Theo trên AKFH là hình thoi $\Rightarrow HA \parallel FH$ hay $IA \parallel FK \Rightarrow$ tứ giác AKFI là hình thang.

Để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn thì AKFI phải là hình thang cân.

AKFI là hình thang cân khi M là trung điểm của cung AB.

Thật vậy: M là trung điểm của cung AB $\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{MAI} = 45^\circ$ (t/c góc nội tiếp). (7)

Tam giác ABI vuông tại A có $\widehat{ABI} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AIB} = 45^\circ$. (8)

Từ (7) và (8) $\Rightarrow \widehat{IAK} = \widehat{AIF} = 45^\circ \Rightarrow$ AKFI là hình thang cân (hình thang có hai góc đáy bằng nhau).

Vậy khi M là trung điểm của cung AB thì tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn.

Bài 9 Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Bx và lấy hai điểm C và D thuộc nửa đường tròn. Các tia AC và AD cắt Bx lần lượt ở E, F (F ở giữa B và E).

1. Chứng minh AC. AE không đổi.
2. Chứng minh $\angle ABD = \angle DFB$.
3. Chứng minh rằng CEFD là tứ giác nội tiếp.

Lời giải:

C thuộc nửa đường tròn nên $\angle ACB = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BC \perp AE$.

$\angle ABE = 90^\circ$ (Bx là tiếp tuyến) \Rightarrow tam giác ABE vuông tại B có BC là đường cao $\Rightarrow AC \cdot AE = AB^2$ (hệ thức giữa cạnh và đường cao), mà AB là đường kính nên $AB = 2R$ không đổi do đó AC. AE không đổi.

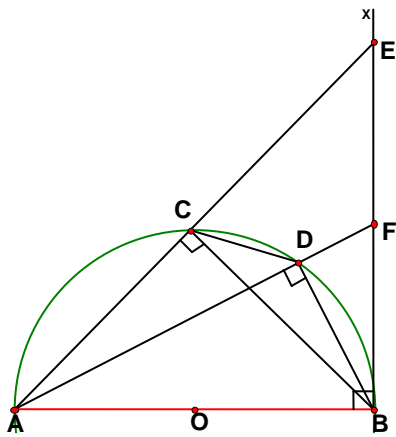
ΔADB có $\angle ADB = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow \angle ABD + \angle BAD = 90^\circ$ (vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180°) (1)

ΔABF có $\angle ABF = 90^\circ$ (BF là tiếp tuyến).

$\Rightarrow \angle AFB + \angle BAF = 90^\circ$ (vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180°) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle ABD = \angle DFB$ (cùng phụ với $\angle BAD$)



Tứ giác ACDB nội tiếp (O) $\Rightarrow \angle ABD + \angle ACD = 180^\circ$.

$\angle ECD + \angle ACD = 180^\circ$ (Vì là hai góc kề bù) $\Rightarrow \angle ECD = \angle ABD$ (cùng bù với $\angle ACD$).

Theo trên $\angle ABD = \angle DFB \Rightarrow \angle ECD = \angle DFB$. Mà $\angle EFD + \angle DFB = 180^\circ$ (Vì là hai góc kề bù) nên suy ra $\angle ECD + \angle EFD = 180^\circ$, mặt khác $\angle ECD$ và $\angle EFD$ là hai góc đối của tứ giác CDFE do đó tứ giác CDFE là tứ giác nội tiếp.

Bài 10 Cho đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn sao cho $AM < MB$. Gọi M' là điểm đối xứng của M qua AB và S là giao điểm của hai tia BM, M'A. Gọi P là chân đường vuông góc từ S đến AB.

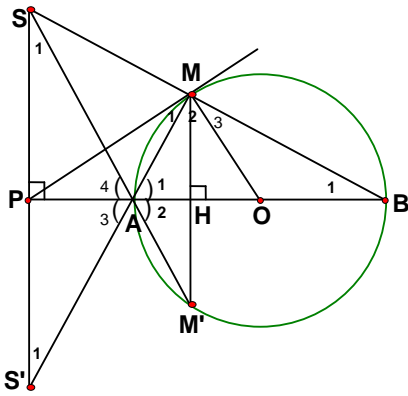
1. Chứng minh bốn điểm A, M, S, P cùng nằm trên một đường tròn
2. Gọi S' là giao điểm của MA và SP. Chứng minh rằng tam giác PS'M cân.
3. Chứng minh PM là tiếp tuyến của đường tròn .

Lời giải:

1. Ta có $SP \perp AB$ (gt) $\Rightarrow \angle SPA = 90^\circ$; $\angle AMB = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle AMS = 90^\circ$. Như vậy P và M cùng nhìn AS dưới một góc bằng 90° nên cùng nằm trên đường tròn đường kính AS.

Vậy bốn điểm A, M, S, P cùng nằm trên một đường tròn.

2. Vì M' đối xứng M qua AB mà M nằm trên đường tròn nên M' cũng nằm trên đường tròn \Rightarrow hai cung AM và AM' có số đo bằng nhau



$\Rightarrow \angle AMM' = \angle AM'M$ (Hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) (1)

Cũng vì M' đối xứng M qua AB nên $MM' \perp AB$ tại $H \Rightarrow MM' \parallel SS'$ (cùng vuông góc với AB)

$\Rightarrow \angle AMM' = \angle AS'S$; $\angle AM'M = \angle ASS'$ (vì so le trong) (2).

\Rightarrow Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle AS'S = \angle ASS'$.

Theo trên bốn điểm A, M, S, P cùng nằm trên một đường tròn $\Rightarrow \angle ASP = \angle AMP$ (nội tiếp cùng chắn AP)

$\Rightarrow \angle AS'P = \angle AMP \Rightarrow$ tam giác PMS' cân tại P .

3. Tam giác SPB vuông tại P ; tam giác SMS' vuông tại $M \Rightarrow \angle B_1 = \angle S'_1$ (cùng phụ với $\angle S$). (3)

Tam giác PMS' cân tại $P \Rightarrow \angle S'_1 = \angle M_1$ (4)

Tam giác OBM cân tại O (vì có $OM = OB = R$) $\Rightarrow \angle B_1 = \angle M_3$ (5).

Từ (3), (4) và (5) $\Rightarrow \angle M_1 = \angle M_3 \Rightarrow \angle M_1 + \angle M_2 = \angle M_3 + \angle M_2$ mà $\angle M_3 + \angle M_2 = \angle AMB = 90^\circ$ nên suy ra $\angle M_1 + \angle M_2 = \angle PMO = 90^\circ \Rightarrow PM \perp OM$ tại $M \Rightarrow PM$ là tiếp tuyến của đường tròn tại M

Bài 11. Cho tam giác ABC ($AB = AC$). Cạnh AB, BC, CA tiếp xúc với đường tròn (O) tại các điểm D, E, F . BF cắt (O) tại I , DI cắt BC tại M . Chứng minh :

1. Tam giác DEF có ba góc nhọn.

2. $DF \parallel BC$.

3. Tứ giác $BDFC$ nội tiếp.

4. $\frac{BD}{CB} = \frac{BM}{CF}$

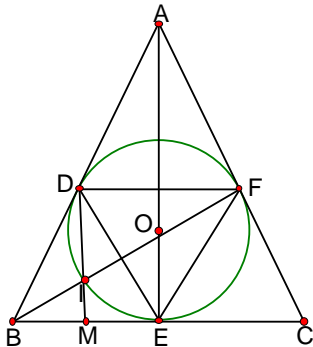
Lời giải:

1. (HD) Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $AD = AF \Rightarrow$ tam giác ADF cân tại $A \Rightarrow \angle ADF = \angle AFD < 90^\circ \Rightarrow$ số cung $DF < 180^\circ \Rightarrow \angle DEF < 90^\circ$ (vì góc DEF nội tiếp chắn cung DE).

Chứng minh tương tự ta có $\angle DFE < 90^\circ$; $\angle EDF < 90^\circ$. Như vậy tam giác DEF có ba góc nhọn.

2. Ta có $AB = AC$ (gt); $AD = AF$ (theo trên) $\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow DF \parallel BC$.

3. $DF \parallel BC \Rightarrow BDFC$ là hình thang lại có $\angle B = \angle C$ (vì tam giác ABC cân)
 $\Rightarrow BDFC$ là hình thang cân do đó $BDFC$ nội tiếp được một đường tròn .



4. Xét hai tam giác BDM và CBF Ta có $\angle DBM = \angle BCF$ (hai góc đáy của tam giác cân).

$\angle BDM = \angle BFD$ (nội tiếp cùng chắn cung DI); $\angle CBF = \angle BFD$ (vì so le) $\Rightarrow \angle BDM = \angle CBF$.

$$\Rightarrow \triangle BDM \sim \triangle CBF \Rightarrow \frac{BD}{CB} = \frac{BM}{CF}$$

Bài 12 Cho đường tròn (O) bán kính R có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M (M khác O). CM cắt (O) tại N . Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của đường tròn ở P . Chứng minh :

1. Tứ giác $OMNP$ nội tiếp.
2. Tứ giác $CMPO$ là hình bình hành.
3. CM, CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M .
4. Khi M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì P chạy trên đoạn thẳng cố định nào.

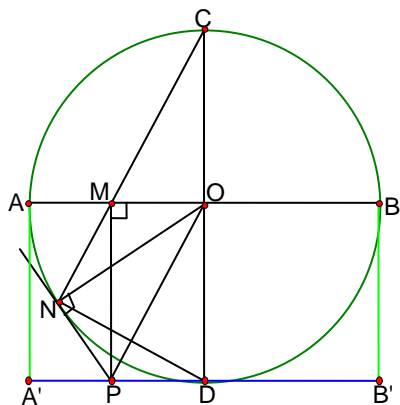
Lời giải:

1. Ta có $\angle OMP = 90^\circ$ (vì $PM \perp AB$); $\angle ONP = 90^\circ$ (vì NP là tiếp tuyến).

Như vậy M và N cùng nhìn OP dưới một góc bằng $90^\circ \Rightarrow M$ và N cùng nằm trên đường tròn đường kính $OP \Rightarrow$ Tứ giác $OMNP$ nội tiếp.

2. Tứ giác $OMNP$ nội tiếp $\Rightarrow \angle OPM = \angle ONM$ (nội tiếp chắn cung OM)

Tam giác ONC cân tại O vì có $ON = OC = R \Rightarrow \angle ONC = \angle OCN$



$$\Rightarrow \angle OPM = \angle OCM.$$

Xét hai tam giác OMC và MOP ta có $\angle MOC = \angle OMP = 90^\circ$; $\angle OPM = \angle OCM \Rightarrow \angle CMO = \angle POM$ lại có MO là cạnh chung $\Rightarrow \triangle OMC = \triangle MOP \Rightarrow OC = MP$. (1)

Theo giả thiết Ta có $CD \perp AB$; $PM \perp AB \Rightarrow CO \parallel PM$ (2).

Từ (1) và (2) \Rightarrow Tứ giác $CMPO$ là hình bình hành.

3. Xét hai tam giác OMC và NDC ta có $\angle MOC = 90^\circ$ (gt $CD \perp AB$); $\angle DNC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle MOC = \angle DNC = 90^\circ$ lại có $\angle C$ là góc chung $\Rightarrow \triangle OMC \sim \triangle NDC$

$$\Rightarrow \frac{CM}{CD} = \frac{CO}{CN} \Rightarrow CM \cdot CN = CO \cdot CD \text{ mà } CO = R; CD = 2R \text{ nên } CO \cdot CD = 2R^2 \text{ không đổi} \Rightarrow$$

$CM \cdot CN = 2R^2$ không đổi hay tích $CM \cdot CN$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M .

4. (HD) Dễ thấy $\triangle OMC = \triangle DPO$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle ODP = 90^\circ \Rightarrow P$ chạy trên đường thẳng cố định vuông góc với CD tại D .

Vì M chỉ chạy trên đoạn thẳng AB nên P chỉ chạy trên đoạn thẳng $A'B'$ song song và bằng AB .

Bài 13 Cho tam giác ABC vuông ở A ($AB > AC$), đường cao AH . Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A , Vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E , Nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F .

1. Chứng minh $AFHE$ là hình chữ nhật.
2. $BEFC$ là tứ giác nội tiếp.
3. $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.
4. Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn.

Lời giải:

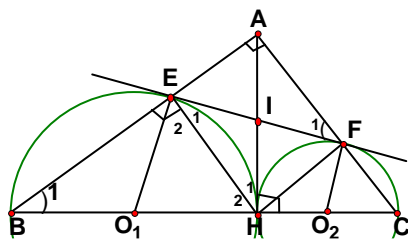
1. Ta có : $\angle BEH = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow \angle AEH = 90^\circ \text{ (vì là hai góc kề bù)}. (1)$$

$$\angle CFH = 90^\circ \text{ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)}$$

$$\Rightarrow \angle AFH = 90^\circ \text{ (vì là hai góc kề bù)}. (2)$$

$\angle EAF = 90^\circ$ (Vì tam giác ABC vuông tại A) (3)



Từ (1), (2), (3) \Rightarrow tứ giác AFHE là hình chữ nhật (vì có ba góc vuông).

2. Tứ giác AFHE là hình chữ nhật nên nội tiếp được một đường tròn $\Rightarrow \angle F_1 = \angle H_1$ (nội tiếp chắn cung AE). Theo giả thiết $AH \perp BC$ nên AH là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2) $\Rightarrow \angle B_1 = \angle H_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HE) $\Rightarrow \angle B_1 = \angle F_1 \Rightarrow \angle EBC + \angle EFC = \angle AFE + \angle EFC$ mà $\angle AFE + \angle EFC = 180^\circ$ (vì là hai góc kề bù) $\Rightarrow \angle EBC + \angle EFC = 180^\circ$ mặt khác $\angle EBC$ và $\angle EFC$ là hai góc đối của tứ giác BEFC do đó BEFC là tứ giác nội tiếp.

3. Xét hai tam giác AEF và ACB ta có $\angle A = 90^\circ$ là góc chung; $\angle AFE = \angle ABC$ (theo Chứng minh trên) $\Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} \Rightarrow AE \cdot AB = AF \cdot AC$.

* **HD cách 2:** Tam giác AHB vuông tại H có $HE \perp AB \Rightarrow AH^2 = AE \cdot AB$ (*)

Tam giác AHC vuông tại H có $HF \perp AC \Rightarrow AH^2 = AF \cdot AC$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow AE \cdot AB = AF \cdot AC$

4. Tứ giác AFHE là hình chữ nhật $\Rightarrow IE = EH \Rightarrow \triangle IEH$ cân tại I $\Rightarrow \angle E_1 = \angle H_1$.

$\triangle O_1EH$ cân tại O_1 (vì có O_1E và O_1H cùng là bán kính) $\Rightarrow \angle E_2 = \angle H_2$.

$\Rightarrow \angle E_1 + \angle E_2 = \angle H_1 + \angle H_2$ mà $\angle H_1 + \angle H_2 = \angle AHB = 90^\circ \Rightarrow \angle E_1 + \angle E_2 = \angle O_1EF = 90^\circ \Rightarrow O_1E \perp EF$

Chứng minh tương tự ta cũng có $O_2F \perp EF$. Vậy EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn .

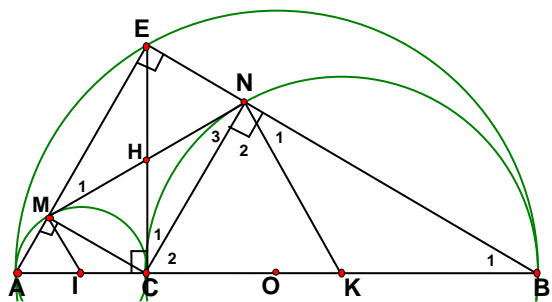
Bài 14 Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AC = 10$ Cm, $CB = 40$ Cm. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC, CB và có tâm theo thứ tự là O, I, K.

Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn (O) tại E. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của EA, EB với các nửa đường tròn (I), (K).

1. Chứng minh $EC = MN$.
2. Chứng minh MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn (I), (K).
3. Tính MN.
4. Tính diện tích hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn

Lời giải:

1. Ta có: $\angle BNC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm K)



$\Rightarrow \angle ENC = 90^\circ$ (vì là hai góc kề bù). (1)

$\angle AMC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm I) $\Rightarrow \angle EMC = 90^\circ$ (vì là hai góc kề bù). (2)

$\angle AEB = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O) hay $\angle MEN = 90^\circ$ (3)

Từ (1), (2), (3) \Rightarrow tứ giác CMEN là hình chữ nhật $\Rightarrow EC = MN$ (tính chất đường chéo hình chữ nhật)

2. Theo giả thiết $EC \perp AB$ tại C nên EC là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (I) và (K)

$\Rightarrow \angle B_1 = \angle C_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CN). Tứ giác CMEN là hình chữ nhật nên $\Rightarrow \angle C_1 = \angle N_3 \Rightarrow \angle B_1 = \angle N_3$. (4) Lại có $KB = KN$ (cùng là bán kính) \Rightarrow tam giác KBN cân tại K $\Rightarrow \angle B_1 = \angle N_1$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \angle N_1 = \angle N_3$ mà $\angle N_1 + \angle N_2 = \angle CNB = 90^\circ \Rightarrow \angle N_3 + \angle N_2 = \angle MNK = 90^\circ$ hay $MN \perp KN$ tại N $\Rightarrow MN$ là tiếp tuyến của (K) tại N.

Chứng minh tương tự ta cũng có MN là tiếp tuyến của (I) tại M,

Vậy MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn (I), (K).

3. Ta có $\angle AEB = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O) $\Rightarrow \triangle AEB$ vuông tại A có $EC \perp AB$ (gt)

$\Rightarrow EC^2 = AC \cdot BC \Leftrightarrow EC^2 = 10 \cdot 40 = 400 \Rightarrow EC = 20$ cm. Theo trên $EC = MN \Rightarrow MN = 20$ cm.

4. Theo giả thiết $AC = 10$ Cm, $CB = 40$ Cm $\Rightarrow AB = 50$ cm $\Rightarrow OA = 25$ cm

Ta có $S_{(O)} = \pi \cdot OA^2 = \pi \cdot 25^2 = 625\pi$; $S_{(I)} = \pi \cdot IA^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$; $S_{(K)} = \pi \cdot KB^2 = \pi \cdot 20^2 = 400\pi$.

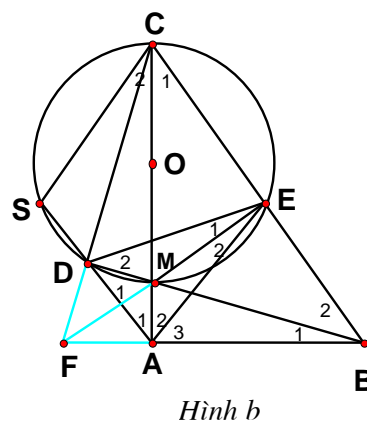
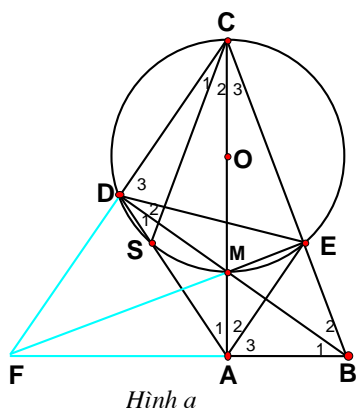
Ta có diện tích phần hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn là $S = \frac{1}{2} (S_{(O)} - S_{(I)} - S_{(K)})$

$$S = \frac{1}{2} (625\pi - 25\pi - 400\pi) = \frac{1}{2} \cdot 200\pi = 100\pi \approx 314 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Bài 15 Cho tam giác ABC vuông ở A . Trên cạnh AC lấy điểm M , dựng đường tròn (O) có đường kính MC . đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại D . đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại S .

1. Chứng minh $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh CA là tia phân giác của góc SCB .
3. Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O) . Chứng minh rằng các đường thẳng BA , EM , CD đồng quy.
4. Chứng minh DM là tia phân giác của góc ADE .
5. Chứng minh điểm M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE .

Lời giải:



a. Ta có $\angle CAB = 90^\circ$ (vì tam giác ABC vuông tại A); $\angle MDC = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle CDB = 90^\circ$ như vậy D và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90° nên A và D cùng nằm trên đường tròn đường kính $BC \Rightarrow ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

b. $ABCD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle D_1 = \angle C_3$ (nội tiếp cùng chắn cung AB).

$\angle D_1 = \angle C_3 \Rightarrow SM = EM \Rightarrow \angle C_2 = \angle C_3$ (hai góc nội tiếp đường tròn (O) chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow CA$ là tia phân giác của góc SCB .

3. Xét $\triangle CMB$ Ta có $BA \perp CM$; $CD \perp BM$; $ME \perp BC$ như vậy BA , EM , CD là ba đường cao của tam giác CMB nên BA , EM , CD đồng quy.

4. Theo trên Ta có $SM = EM \Rightarrow \angle D_1 = \angle D_2 \Rightarrow DM$ là tia phân giác của góc ADE .(1)

5. Ta có $\angle MEC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow \angle MEB = 90^\circ$.

Tứ giác $AMEB$ có $\angle MAB = 90^\circ$; $\angle MEB = 90^\circ \Rightarrow \angle MAB + \angle MEB = 180^\circ$ mà đây là hai góc đối nên tứ giác $AMEB$ nội tiếp một đường tròn $\Rightarrow \angle A_2 = \angle B_2$.

Tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle A_1 = \angle B_2$ (nội tiếp cùng chắn cung CD)

$\Rightarrow \angle A_1 = \angle A_2 \Rightarrow AM$ là tia phân giác của góc DAE (2)

Từ (1) và (2) Ta có M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE

TH2 (Hình b)

Bài 2 : $\angle ABC = \angle CME$ (cùng phụ $\angle ACB$); $\angle ABC = \angle CDS$ (cùng bù $\angle ADC$) $\Rightarrow \angle CME = \angle CDS$

$\Rightarrow CE = CS \Rightarrow SM = EM \Rightarrow \angle SCM = \angle ECM \Rightarrow CA$ là tia phân giác của góc SCB.

Bài 16 Cho tam giác ABC vuông ở A. và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại F, G.

Chứng minh :

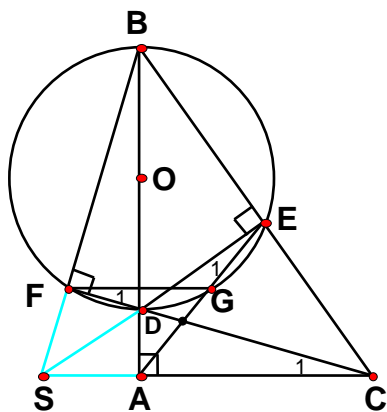
1. Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EBD.
2. Tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp .
3. $AC \parallel FG$.
4. Các đường thẳng AC, DE, FB đồng quy.

Lời giải:

1. Xét hai tam giác ABC và EDB Ta có $\angle BAC = 90^\circ$ (vì tam giác ABC vuông tại A); $\angle DEB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle DEB = \angle BAC = 90^\circ$; lại có $\angle ABC$ là góc chung $\Rightarrow \triangle DEB \sim \triangle CAB$.

2. Theo trên $\angle DEB = 90^\circ \Rightarrow \angle DEC = 90^\circ$ (vì hai góc kề bù); $\angle BAC = 90^\circ$ (vì $\triangle ABC$ vuông tại A) hay $\angle DAC = 90^\circ \Rightarrow \angle DEC + \angle DAC = 180^\circ$ mà đây là hai góc đối nên ADEC là tứ giác nội tiếp .



* $\angle BAC = 90^\circ$ (vì tam giác ABC vuông tại A); $\angle DFB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\angle BFC = 90^\circ$ như vậy F và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90° nên A và F cùng nằm trên đường tròn đường kính BC $\Rightarrow AFBC$ là tứ giác nội tiếp.

3. Theo trên ADEC là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle E_1 = \angle C_1$ lại có $\angle E_1 = \angle F_1 \Rightarrow \angle F_1 = \angle C_1$ mà đây là hai góc so le trong nên suy ra $AC \parallel FG$.

4. (HD) Dễ thấy CA, DE, BF là ba đường cao của tam giác DBC nên CA, DE, BF đồng quy tại S.

Bài 17. Cho tam giác đều ABC có đường cao là AH. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì (M không trùng B, C, H); từ M kẻ MP, MQ vuông góc với các cạnh AB, AC.

1. Chứng minh APMQ là tứ giác nội tiếp và hãy xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.
2. Chứng minh rằng $MP + MQ = AH$.
3. Chứng minh $OH \perp PQ$.

Lời giải:

1. Ta có $MP \perp AB$ (gt) $\Rightarrow \angle APM = 90^\circ$; $MQ \perp AC$ (gt)

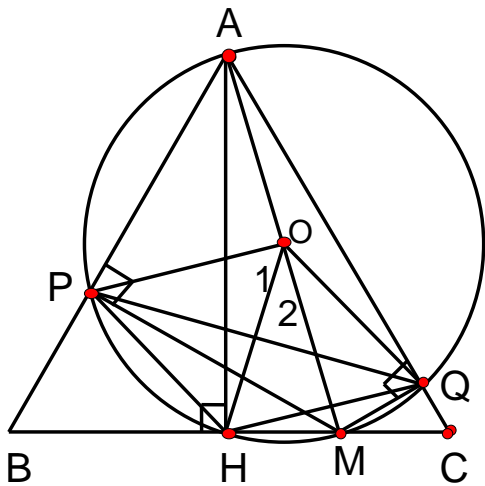
$\Rightarrow \angle AQM = 90^\circ$ như vậy P và Q cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90° nên P và Q cùng nằm trên đường tròn đường kính AM \Rightarrow APMQ là tứ giác nội tiếp.

* Vì AM là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ là trung điểm của AM.

2. Tam giác ABC có AH là đường cao $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} BC.AH$.

Tam giác ABM có MP là đường cao $\Rightarrow S_{ABM} = \frac{1}{2} AB.MP$

Tam giác ACM có MQ là đường cao $\Rightarrow S_{ACM} = \frac{1}{2} AC.MQ$



Ta có $S_{ABM} + S_{ACM} = S_{ABC} \Rightarrow \frac{1}{2} AB.MP + \frac{1}{2} AC.MQ = \frac{1}{2}$

$BC.AH \Rightarrow AB.MP + AC.MQ = BC.AH$

Mà $AB = BC = CA$ (vì tam giác ABC đều) $\Rightarrow MP + MQ = AH$.

3. Tam giác ABC có AH là đường cao nên cũng là đường phân giác $\Rightarrow \angle HAP = \angle HAQ \Rightarrow HP = HQ$ (tính chất góc nội tiếp) $\Rightarrow \angle HOP = \angle HOQ$ (t/c góc ở tâm) $\Rightarrow OH$ là tia phân giác góc POQ . Mà tam giác POQ cân tại O (vì OP và OQ cùng là bán kính) nên suy ra OH cũng là đường cao $\Rightarrow OH \perp PQ$

Bài 18 Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên đoạn thẳng OB lấy điểm H bất kì (H không trùng O, B) ; trên đường thẳng vuông góc với OB tại H , lấy một điểm M ở ngoài đường tròn ; MA và MB thứ tự cắt đường tròn (O) tại C và D . Gọi I là giao điểm của AD và BC .

1. Chứng minh $MCID$ là tứ giác nội tiếp .
2. Chứng minh các đường thẳng AD, BC, MH đồng quy tại I .
3. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MCID$, Chứng minh $KCOH$ là tứ giác nội tiếp

Lời giải:

1. Ta có : $\angle ACB = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

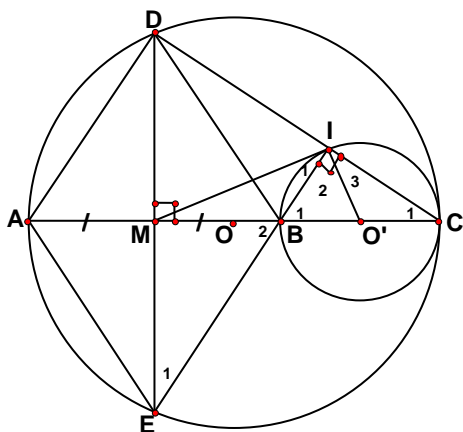
$\Rightarrow \angle MCI = 90^\circ$ (vì là hai góc kề bù).

$\angle ADB = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle MDI = 90^\circ$ (vì là hai góc kề bù).

$\Rightarrow \angle MCI + \angle MDI = 180^\circ$ mà đây là hai góc đối của tứ giác $MCID$ nên $MCID$ là tứ giác nội tiếp.

2. Theo trên Ta có $BC \perp MA; AD \perp MB$ nên BC và AD là hai đường cao của tam giác MAB mà BC và AD cắt nhau tại I nên I là trực tâm của tam giác MAB . Theo giả thiết thì $MH \perp AB$ nên MH cũng là đường cao của tam giác $MAB \Rightarrow AD, BC, MH$ đồng quy tại I .



\Rightarrow Tứ giác ADBE là hình thoi vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường .

3. $\angle ADC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AD \perp DC$; theo trên $BI \perp DC \Rightarrow BI \parallel AD$.
(1)

4. Theo giả thiết ADBE là hình thoi $\Rightarrow EB \parallel AD$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow I, B, E$ thẳng hàng (vì qua B chỉ có một đường thẳng song song với AD mà thôi.)

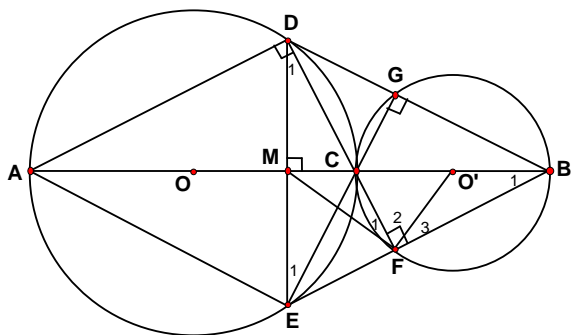
5. I, B, E thẳng hàng nên tam giác IDE vuông tại I $\Rightarrow IM$ là trung tuyến (vì M là trung điểm của DE) $\Rightarrow MI = ME \Rightarrow \triangle MIE$ cân tại M $\Rightarrow \angle I_1 = \angle E_1$; $\triangle O'IC$ cân tại O' (vì $O'C$ và $O'I$ cùng là bán kính) $\Rightarrow \angle I_3 = \angle C_1$ mà $\angle C_1 = \angle E_1$ (Cùng phụ với góc EDC) $\Rightarrow \angle I_1 = \angle I_3 \Rightarrow \angle I_1 + \angle I_2 = \angle I_3 + \angle I_2$. Mà $\angle I_3 + \angle I_2 = \angle BIC = 90^\circ \Rightarrow \angle I_1 + \angle I_2 = 90^\circ = \angle MIO'$ hay $MI \perp O'I$ tại I $\Rightarrow MI$ là tiếp tuyến của (O') .

Bài 20. Cho đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ có $R > R'$ tiếp xúc ngoài nhau tại C. Gọi AC và BC là hai đường kính đi qua điểm C của (O) và (O') . DE là dây cung của (O) vuông góc với AB tại trung điểm M của AB. Gọi giao điểm thứ hai của DC với (O') là F, BD cắt (O') tại G. Chứng minh rằng:

1. Tứ giác MDGC nội tiếp .
2. Bốn điểm M, D, B, F cùng nằm trên một đường tròn
3. Tứ giác ADBE là hình thoi.
4. B, E, F thẳng hàng
5. DF, EG, AB đồng quy.
6. $MF = 1/2 DE$.
7. MF là tiếp tuyến của (O') .

Lời giải:

1. $\angle BGC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)
 $\Rightarrow \angle CGD = 90^\circ$ (vì là hai góc kề bù)



Theo giả thiết $DE \perp AB$ tại $M \Rightarrow \angle CMD = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle CGD + \angle CMD = 180^\circ$ mà đây là hai góc đối của tứ giác $MCGD$ nên $MCGD$ là tứ giác nội tiếp

2. $\angle BFC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle BFD = 90^\circ$; $\angle BMD = 90^\circ$ (vì $DE \perp AB$ tại M) như vậy F và M cùng nhìn BD dưới một góc bằng 90° nên F và M cùng nằm trên đường tròn đường kính $BD \Rightarrow M, D, B, F$ cùng nằm trên một đường tròn .

3. Theo giả thiết M là trung điểm của AB ; $DE \perp AB$ tại M nên M cũng là trung điểm của DE (quan hệ đường kính và dây cung)

\Rightarrow Tứ giác $ADBE$ là hình thoi vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường .

4. $\angle ADC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AD \perp DF$; theo trên tứ giác $ADBE$ là hình thoi $\Rightarrow BE \parallel AD$ mà $AD \perp DF$ nên suy ra $BE \perp DF$.

Theo trên $\angle BFC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BF \perp DF$ mà qua B chỉ có một đường thẳng vuông góc với DF do đó B, E, F thẳng hàng.

5. Theo trên $DF \perp BE$; $BM \perp DE$ mà DF và BM cắt nhau tại C nên C là trực tâm của tam giác $BDE \Rightarrow EC$ cũng là đường cao $\Rightarrow EC \perp BD$; theo trên $CG \perp BD \Rightarrow E, C, G$ thẳng hàng. Vậy DF, EG, AB đồng quy

6. Theo trên $DF \perp BE \Rightarrow \triangle DEF$ vuông tại F có FM là trung tuyến (vì M là trung điểm của DE) suy ra $MF = 1/2 DE$ (vì trong tam giác vuông trung tuyến thuộc cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền).

7. (HD) theo trên $MF = 1/2 DE \Rightarrow MD = MF \Rightarrow \triangle MDF$ cân tại $M \Rightarrow \angle D_1 = \angle F_1$
 $\triangle O'BF$ cân tại O' (vì $O'B$ và $O'F$ cùng là bán kính) $\Rightarrow \angle F_3 = \angle B_1$ mà $\angle B_1 = \angle D_1$ (Cùng phụ với $\angle DEB$) $\Rightarrow \angle F_1 = \angle F_3 \Rightarrow \angle F_1 + \angle F_2 = \angle F_3 + \angle F_2$. Mà $\angle F_3 + \angle F_2 = \angle BFC = 90^\circ \Rightarrow \angle F_1 + \angle F_2 = 90^\circ = \angle MFO'$ hay $MF \perp O'F$ tại $F \Rightarrow MF$ là tiếp tuyến của (O') .

Bài 21. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Gọi I là trung điểm của OA . Vẽ đường tròn tâm I đi qua A , trên (I) lấy P bất kì, AP cắt (O) tại Q .

1. Chứng minh rằng các đường tròn (I) và (O) tiếp xúc nhau tại A .

2. Chứng minh $IP \parallel OQ$.
3. Chứng minh rằng $AP = PQ$.
4. Xác định vị trí của P để tam giác AQB có diện tích lớn nhất.

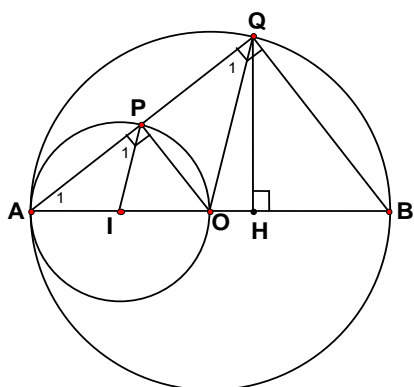
Lời giải:

1. Ta có $OI = OA - IA$ mà OA và IA lần lượt là các bán kính của đường tròn (O) và đường tròn (I) . Vậy đường tròn (O) và đường tròn (I) tiếp xúc nhau tại A .

2. $\triangle OAQ$ cân tại O (vì OA và OQ cùng là bán kính) $\Rightarrow \angle A_1 = \angle Q_1$

$\triangle IAP$ cân tại I (vì IA và IP cùng là bán kính) $\Rightarrow \angle A_1 = \angle P_1$

$\Rightarrow \angle P_1 = \angle Q_1$ mà đây là hai góc đồng vị nên suy ra $IP \parallel OQ$.



3. $\angle APO = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow OP \perp AQ \Rightarrow$

OP là đường cao của $\triangle OAQ$ mà $\triangle OAQ$ cân tại O nên OP là đường trung tuyến $\Rightarrow AP = PQ$.

4. (HD) Kẻ $QH \perp AB$ ta có $S_{AQB} = \frac{1}{2} AB \cdot QH$. mà AB là đường kính không đổi nên S_{AQB} lớn nhất

khi QH lớn nhất. QH lớn nhất khi Q trùng với trung điểm của cung AB . Để Q trùng với trung điểm của cung AB thì P phải là trung điểm của cung AO .

Thật vậy P là trung điểm của cung $AO \Rightarrow PI \perp AO$ mà theo trên $PI \parallel QO \Rightarrow QO \perp AB$ tại $O \Rightarrow Q$ là trung điểm của cung AB và khi đó H trùng với O ; OQ lớn nhất nên QH lớn nhất.

Bài 22. Cho hình vuông $ABCD$, điểm E thuộc cạnh BC . Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với DE , đường thẳng này cắt các đường thẳng DE và DC theo thứ tự ở H và K .

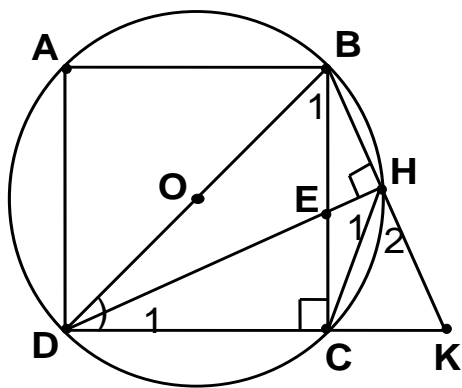
1. Chứng minh $BHCD$ là tứ giác nội tiếp.
2. Tính góc CHK .
3. Chứng minh $KC \cdot KD = KH \cdot KB$
4. Khi E di chuyển trên cạnh BC thì H di chuyển trên đường nào?

Lời giải:

1. Theo giả thiết ABCD là hình vuông nên $\angle BCD = 90^\circ$; $BH \perp DE$ tại H nên $\angle BHD = 90^\circ \Rightarrow$ như vậy H và C cùng nhìn BD dưới một góc bằng 90° nên H và C cùng nằm trên đường tròn đường kính BD \Rightarrow BHCD là tứ giác nội tiếp.

2. BHCD là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle BDC + \angle BHC = 180^\circ$. (1)

$\angle BHK$ là góc bẹt nên $\angle KHC + \angle BHC = 180^\circ$ (2).



Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle CHK = \angle BDC$ mà $\angle BDC = 45^\circ$ (vì ABCD là hình vuông) $\Rightarrow \angle CHK = 45^\circ$.

3. Xét $\triangle KHC$ và $\triangle KDB$ ta có $\angle CHK = \angle BDC = 45^\circ$; $\angle K$ là góc chung

$$\Rightarrow \triangle KHC \sim \triangle KDB \Rightarrow \frac{KC}{KB} = \frac{KH}{KD} \Rightarrow KC \cdot KD = KH \cdot KB.$$

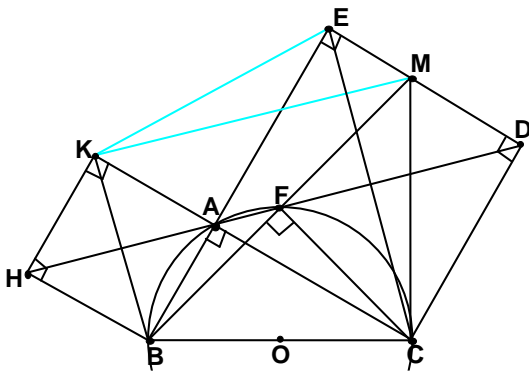
4. (HD) Ta luôn có $\angle BHD = 90^\circ$ và BD cố định nên khi E chuyển động trên cạnh BC cố định thì H chuyển động trên cung BC ($E \equiv B$ thì $H \equiv B$; $E \equiv C$ thì $H \equiv C$).

Bài 23. Cho tam giác ABC vuông ở A. Dựng ở miền ngoài tam giác ABC các hình vuông ABHK, ACDE.

1. Chứng minh ba điểm H, A, D thẳng hàng.
2. Đường thẳng HD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại F, chứng minh FBC là tam giác vuông cân.
3. Cho biết $\angle ABC > 45^\circ$; gọi M là giao điểm của BF và ED, Chứng minh 5 điểm b, k, e, m, c cùng nằm trên một đường tròn.
4. Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải:

1. Theo giả thiết ABHK là hình vuông $\Rightarrow \angle BAH = 45^\circ$



Tứ giác AEDC là hình vuông $\Rightarrow \angle CAD = 45^\circ$; tam giác

ABC vuông ở A $\Rightarrow \angle BAC = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle BAH + \angle BAC + \angle CAD = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ ba điểm H, A, D thẳng hàng.

2. Ta có $\angle BFC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên tam giác BFC vuông tại F. (1).

$\angle FBC = \angle FAC$ (nội tiếp cùng chắn cung FC) mà theo trên $\angle CAD = 45^\circ$ hay $\angle FAC = 45^\circ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle BFC$ là tam giác vuông cân tại F.

3. Theo trên $\angle BFC = 90^\circ \Rightarrow \angle CFM = 90^\circ$ (vì là hai góc kề bù); $\angle CDM = 90^\circ$ (t/c hình vuông).

$\Rightarrow \angle CFM + \angle CDM = 180^\circ$ mà đây là hai góc đối nên tứ giác CDMF nội tiếp một đường tròn suy ra $\angle CDF = \angle CMF$, mà $\angle CDF = 45^\circ$ (vì AEDC là hình vuông) $\Rightarrow \angle CMF = 45^\circ$ hay $\angle CMB = 45^\circ$.

Ta cũng có $\angle CEB = 45^\circ$ (vì AEDC là hình vuông); $\angle BKC = 45^\circ$ (vì ABHK là hình vuông).

Như vậy K, E, M cùng nhìn BC dưới một góc bằng 45° nên cùng nằm trên cung chứa góc 45° dựng trên BC \Rightarrow 5 điểm b, k, e, m, c cùng nằm trên một đường tròn.

4. $\triangle CBM$ có $\angle B = 45^\circ$; $\angle M = 45^\circ \Rightarrow \angle BCM = 45^\circ$ hay $MC \perp BC$ tại C \Rightarrow MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 24. Cho tam giác nhọn ABC có $\angle B = 45^\circ$. Vẽ đường tròn đường kính AC có tâm O, đường tròn này cắt BA và BC tại D và E.

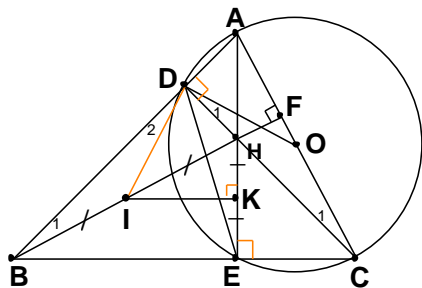
1. Chứng minh $AE = EB$.
2. Gọi H là giao điểm của CD và AE, Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn HE đi qua trung điểm I của BH.
3. Chứng minh OD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE.

Lời giải:

1. $\angle AEC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle AEB = 90^\circ$ (vì là hai góc kề bù); Theo giả thiết $\angle ABE = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle AEB$ là tam giác vuông cân tại E $\Rightarrow EA = EB$.



2. Gọi K là trung điểm của HE (1) ; I là trung điểm của

HB \Rightarrow IK là đường trung bình của tam giác HBE \Rightarrow IK // BE mà $\angle AEC = 90^\circ$ nên $BE \perp HE$ tại E \Rightarrow IK \perp HE tại K (2).

Từ (1) và (2) \Rightarrow IK là trung trực của HE . Vậy trung trực của đoạn HE đi qua trung điểm I của BH.

3. theo trên I thuộc trung trực của HE \Rightarrow IE = IH mà I là trung điểm của BH \Rightarrow IE = IB.

$\angle ADC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle BDH = 90^\circ$ (kề bù $\angle ADC$) \Rightarrow tam giác BDH vuông tại D có DI là trung tuyến (do I là trung điểm của BH) \Rightarrow ID = 1/2 BH hay ID = IB \Rightarrow IE = IB = ID \Rightarrow I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE bán kính ID.

Ta có $\triangle ODC$ cân tại O (vì OD và OC là bán kính) $\Rightarrow \angle D_1 = \angle C_1$. (3)

$\triangle IBD$ cân tại I (vì ID và IB là bán kính) $\Rightarrow \angle D_2 = \angle B_1$. (4)

Theo trên ta có CD và AE là hai đường cao của tam giác ABC \Rightarrow H là trực tâm của tam giác ABC \Rightarrow BH cũng là đường cao của tam giác ABC \Rightarrow BH \perp AC tại F $\Rightarrow \triangle AEB$ có $\angle AFB = 90^\circ$.

Theo trên $\triangle ADC$ có $\angle ADC = 90^\circ \Rightarrow \angle B_1 = \angle C_1$ (cùng phụ $\angle BAC$) (5).

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \angle D_1 = \angle D_2$ mà $\angle D_2 + \angle IDH = \angle BDC = 90^\circ \Rightarrow \angle D_1 + \angle IDH = 90^\circ = \angle IDO \Rightarrow$ OD \perp ID tại D \Rightarrow OD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE.

Bài 25. Cho đường tròn (O), BC là dây bất kì ($BC < 2R$). Kẻ các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C chúng cắt nhau tại A. Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M rồi kẻ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, AC, AB. Gọi giao điểm của BM, IK là P; giao điểm của CM, IH là Q.

1. Chứng minh tam giác ABC cân.
2. Các tứ giác BIMK, CIMH nội tiếp.
3. Chứng minh $MI^2 = MH.MK$.
4. Chứng minh $PQ \perp MI$.

Lời giải:

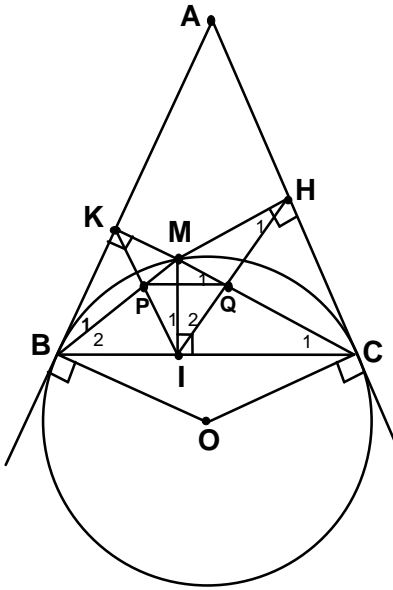
1. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $AB = AC \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A.
2. Theo giả thiết $MI \perp BC \Rightarrow \angle MIB = 90^\circ$; $MK \perp AB \Rightarrow \angle MKB = 90^\circ$.
 $\Rightarrow \angle MIB + \angle MKB = 180^\circ$ mà đây là hai góc đối \Rightarrow tứ giác BIMK nội tiếp

*** (Chứng minh tứ giác CIMH nội tiếp tương tự tứ giác BIMK)**

3. Theo trên tứ giác BIMK nội tiếp $\Rightarrow \angle KMI + \angle KBI = 180^\circ$; tứ giác CHMI nội tiếp $\Rightarrow \angle HMI + \angle HCI = 180^\circ$. mà $\angle KBI = \angle HCI$ (vì tam giác ABC cân tại A) $\Rightarrow \angle KMI = \angle HMI$ (1).

Theo trên tứ giác BIMK nội tiếp $\Rightarrow \angle B_1 = \angle I_1$ (nội tiếp cùng chắn cung KM); tứ giác CHMI nội tiếp $\Rightarrow \angle H_1 = \angle C_1$ (nội tiếp cùng chắn cung IM). Mà $\angle B_1 = \angle C_1$ (= 1/2 số đo BM) $\Rightarrow \angle I_1 = \angle H_1$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta MKI \sim \Delta MIH \Rightarrow \frac{MI}{MH} = \frac{MK}{MI} \Rightarrow MI^2 = MH.MK$



4. Theo trên ta có $\angle I_1 = \angle C_1$; cũng chứng minh tương tự ta có $\angle I_2 = \angle B_2$ mà $\angle C_1 + \angle B_2 + \angle BMC = 180^\circ \Rightarrow \angle I_1 + \angle I_2 + \angle BMC = 180^\circ$ hay $\angle PIQ + \angle PMQ = 180^\circ$ mà đây là hai góc đối \Rightarrow tứ giác PMQI nội tiếp $\Rightarrow \angle Q_1 = \angle I_1$ mà $\angle I_1 = \angle C_1 \Rightarrow \angle Q_1 = \angle C_1 \Rightarrow PQ \parallel BC$ (vì có hai góc đồng vị bằng nhau) . Theo giả thiết $MI \perp BC$ nên suy ra $IM \perp PQ$.

Bài 26. Cho đường tròn (O), đường kính $AB = 2R$. Vẽ dây cung $CD \perp AB$ ở H. Gọi M là điểm chính giữa của cung CB, I là giao điểm của CB và OM. K là giao điểm của AM và CB. Chứng minh :

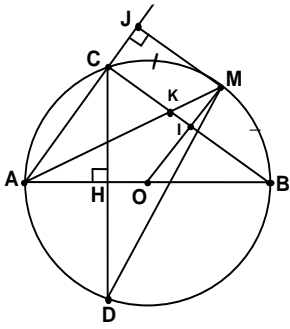
1. $\frac{KC}{KB} = \frac{AC}{AB}$ 2. AM là tia phân giác của $\angle CMD$. 3. Tứ giác OHCI nội tiếp

4. Chứng minh đường vuông góc kẻ từ M đến AC cũng là tiếp tuyến của đường tròn tại M.

Lời giải: 1. Theo giả thiết M là trung điểm của $BC \Rightarrow MB = MC$

$\Rightarrow \angle CAM = \angle BAM$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) $\Rightarrow AK$ là tia phân giác của góc

$CAB \Rightarrow \frac{KC}{KB} = \frac{AC}{AB}$ (t/c tia phân giác của tam giác)



2. (HD) Theo giả thiết $CD \perp AB \Rightarrow A$ là trung điểm của $CD \Rightarrow \angle CMA = \angle DMA \Rightarrow MA$ là tia phân giác của góc CMD .

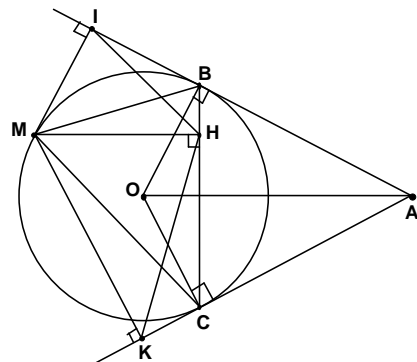
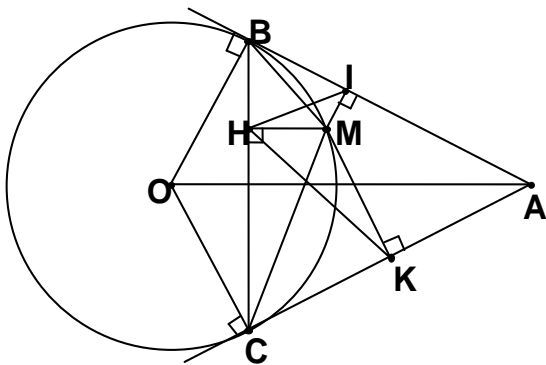
3. (HD) Theo giả thiết M là trung điểm của $BC \Rightarrow OM \perp BC$ tại $I \Rightarrow \angle OIC = 90^\circ$; $CD \perp AB$ tại $H \Rightarrow \angle OHC = 90^\circ \Rightarrow \angle OIC + \angle OHC = 180^\circ$ mà đây là hai góc đối \Rightarrow tứ giác $OHCI$ nội tiếp

4. Kẻ $MJ \perp AC$ ta có $MJ \parallel BC$ (vì cùng vuông góc với AC). Theo trên $OM \perp BC \Rightarrow OM \perp MJ$ tại J suy ra MJ là tiếp tuyến của đường tròn tại M .

Bài 27 Cho đường tròn (O) và một điểm A ở ngoài đường tròn. Các tiếp tuyến với đường tròn (O) kẻ từ A tiếp xúc với đường tròn (O) tại B và C . Gọi M là điểm tùy ý trên đường tròn (M khác B, C), từ M kẻ $MH \perp BC, MK \perp CA, MI \perp AB$. Chứng minh :

1. Tứ giác $ABOC$ nội tiếp. 2. $\angle BAO = \angle BCO$. 3. $\triangle MIH \sim \triangle MHK$. 4. $MI \cdot MK = MH^2$.

Lời giải:



(HS tự giải)

Tứ giác $ABOC$ nội tiếp $\Rightarrow \angle BAO = \angle BCO$ (nội tiếp cùng chắn cung BO).

Theo giả thiết $MH \perp BC \Rightarrow \angle MHC = 90^\circ; MK \perp CA \Rightarrow \angle MKC = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle MHC + \angle MKC = 180^\circ$ mà đây là hai góc đối \Rightarrow tứ giác $MHCK$ nội tiếp $\Rightarrow \angle HCM = \angle HKM$ (nội tiếp cùng chắn cung HM).

Chứng minh tương tự ta có tứ giác $MHBI$ nội tiếp $\Rightarrow \angle MHI = \angle MBI$ (nội tiếp cùng chắn cung IM).

Mà $\angle HCM = \angle MBI (= 1/2 \text{ số } BM) \Rightarrow \angle HKM = \angle MHI$ (1). Chứng minh tương tự ta cũng có $\angle KHM = \angle HIM$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta HIM \sim \Delta KHM$.

$$\text{Theo trên } \Delta HIM \sim \Delta KHM \Rightarrow \frac{MI}{MH} = \frac{MH}{MK} \Rightarrow MI \cdot MK = MH^2$$

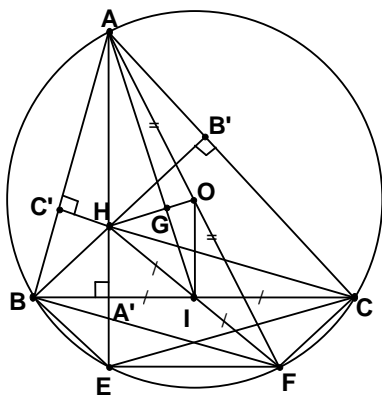
Bài 28 Cho tam giác ABC nội tiếp (O) . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC ; E là điểm đối xứng của H qua BC ; F là điểm đối xứng của H qua trung điểm I của BC .

1. Chứng minh tứ giác $BHCF$ là hình bình hành.
2. E, F nằm trên đường tròn (O) .
3. Chứng minh tứ giác $BCFE$ là hình thang cân.
4. Gọi G là giao điểm của AI và OH . Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC .

Lời giải:

1. Theo giả thiết F là điểm đối xứng của H qua trung điểm I của $BC \Rightarrow I$ là trung điểm BC và $HE \Rightarrow BHCF$ là hình bình hành vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

2. (**HD**) Tứ giác $AB'HC'$ nội tiếp $\Rightarrow \angle BAC + \angle B'HC' = 180^\circ$ mà $\angle BHC = \angle B'HC'$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \angle BAC + \angle BHC = 180^\circ$. Theo trên $BHCF$ là hình bình hành $\Rightarrow \angle BHC = \angle BFC \Rightarrow \angle BFC + \angle BAC = 180^\circ$



\Rightarrow Tứ giác $ABFC$ nội tiếp $\Rightarrow F$ thuộc (O) .

* H và E đối xứng nhau qua $BC \Rightarrow \Delta BHC = \Delta BEC$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle BHC = \angle BEC \Rightarrow \angle BEC + \angle BAC = 180^\circ \Rightarrow ABEC$ nội tiếp $\Rightarrow E$ thuộc (O) .

3. Ta có H và E đối xứng nhau qua $BC \Rightarrow BC \perp HE$ (1) và $IH = IE$ mà I là trung điểm của BC $\Rightarrow EI = 1/2 HE \Rightarrow$ tam giác HEF vuông tại E hay $FE \perp HE$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow EF \parallel BC \Rightarrow BEFC$ là hình thang. (3)

Theo trên $E \in (O) \Rightarrow \angle CBE = \angle CAE$ (nội tiếp cùng chắn cung CE) (4).

Theo trên $F \in (O)$ và $\angle FEA = 90^\circ \Rightarrow AF$ là đường kính của $(O) \Rightarrow \angle ACF = 90^\circ \Rightarrow \angle BCF = \angle CAE$ (vì cùng phụ $\angle ACB$) (5).

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \angle BCF = \angle CBE$ (6).

Từ (3) và (6) \Rightarrow tứ giác BEFC là hình thang cân.

4. Theo trên AF là đường kính của (O) \Rightarrow O là trung điểm của AF; BHCF là hình bình hành \Rightarrow I là trung điểm của HF \Rightarrow OI là đường trung bình của tam giác AHF \Rightarrow OI = 1/2 AH.

Theo giả thiết I là trung điểm của BC \Rightarrow OI \perp BC (Quan hệ đường kính và dây cung) $\Rightarrow \angle OIG = \angle HAG$ (vì so le trong); lại có $\angle OGI = \angle HGA$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \triangle OGI \sim \triangle HGA \Rightarrow \frac{GI}{GA} = \frac{OI}{HA}$ mà

$$OI = \frac{1}{2} AH \quad \Rightarrow \quad \frac{GI}{GA} = \frac{1}{2} \text{ mà AI là trung tuyến của tam giác ABC (do I là trung điểm của BC)}$$

\Rightarrow G là trọng tâm của tam giác ABC.

Bài 29 BC là một dây cung của đường tròn (O; R) ($BC \neq 2R$). Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho O luôn nằm trong tam giác ABC. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H.

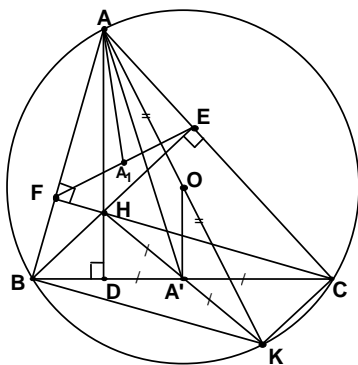
1. Chứng minh tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC.
2. Gọi A' là trung điểm của BC, Chứng minh $AH = 2OA'$.
3. Gọi A₁ là trung điểm của EF, Chứng minh $R \cdot AA_1 = AA' \cdot OA'$.
4. Chứng minh $R(EF + FD + DE) = 2S_{ABC}$ suy ra vị trí của A để tổng EF + FD + DE đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải: (HD)

1. Tứ giác BFEC nội tiếp $\Rightarrow \angle AEF = \angle ACB$ (cùng bù $\angle BFE$)

$$\angle AEF = \angle ABC \text{ (cùng bù } \angle CEF) \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC.$$

2. Vẽ đường kính AK \Rightarrow KB // CH (cùng vuông góc AB); KC // BH (cùng vuông góc AC) \Rightarrow BHKC là hình bình hành \Rightarrow A' là trung điểm của HK \Rightarrow OK là đường trung bình của $\triangle AHK$ \Rightarrow $AH = 2OA'$



3. áp dụng tính chất : nếu hai tam giác đồng dạng thì tỉ số giữa hai trung tuyến, tỉ số giữa hai bán kính các đường tròn ngoại tiếp bằng tỉ số đồng dạng. ta có :

$\Delta AEF \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{R}{R'} = \frac{AA'}{AA_1}$ (1) trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC ; R' là bán

kính đường tròn ngoại tiếp ΔAEF ; AA' là trung tuyến của ΔABC ; AA₁ là trung tuyến của ΔAEF .

Tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn đường kính AH nên đây cũng là đường tròn ngoại tiếp ΔAEF

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow R \cdot AA_1 = AA' \cdot R' = AA' \cdot \frac{AH}{2} = AA' \cdot \frac{2A'O}{2}$$

$$\text{Vậy } R \cdot AA_1 = AA' \cdot A'O \quad (2)$$

4. Gọi B', C' lần lượt là trung điểm của AC, AB, ta có $OB' \perp AC$; $OC' \perp AB$ (bán kính đi qua trung điểm của một dây không qua tâm) $\Rightarrow OA', OB', OC'$ lần lượt là các đường cao của các tam giác OBC, OCA, OAB.

$$S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB} = \frac{1}{2} (OA' \cdot BC + OB' \cdot AC + OC' \cdot AB)$$

$$2S_{ABC} = OA' \cdot BC + OB' \cdot AC + OC' \cdot AB \quad (3)$$

Theo (2) $\Rightarrow OA' = R \cdot \frac{AA_1}{AA'}$ mà $\frac{AA_1}{AA'}$ là tỉ số giữa 2 trung tuyến của hai tam giác đồng dạng AEF

và ABC nên $\frac{AA_1}{AA'} = \frac{EF}{BC}$. Tương tự ta có: $OB' = R \cdot \frac{FD}{AC}$; $OC' = R \cdot \frac{ED}{AB}$ Thay vào (3) ta được

$$2S_{ABC} = R \left(\frac{EF}{BC} \cdot BC + \frac{FD}{AC} \cdot AC + \frac{ED}{AB} \cdot AB \right) \Leftrightarrow 2S_{ABC} = R(EF + FD + DE)$$

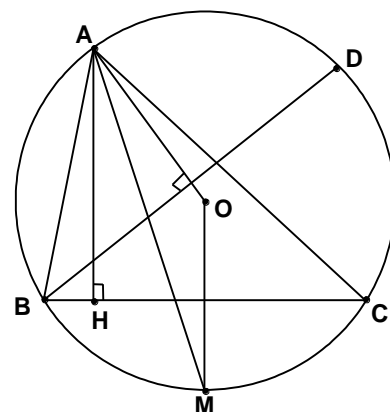
* $R(EF + FD + DE) = 2S_{ABC}$ mà R không đổi nên $(EF + FD + DE)$ đạt giá trị lớn nhất khi S_{ABC} .

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC$ do BC không đổi nên S_{ABC} lớn nhất khi AD lớn nhất, mà AD lớn nhất khi A là điểm chính giữa của cung lớn BC.

Bài 30 Cho tam giác ABC nội tiếp (O; R), tia phân giác của góc BAC cắt (O) tại M. Vẽ đường cao AH và bán kính OA.

1. Chứng minh AM là phân giác của góc OAH.
2. Giả sử $\angle B > \angle C$. Chứng minh $\angle OAH = \angle B - \angle C$.
3. Cho $\angle BAC = 60^\circ$ và $\angle OAH = 20^\circ$. Tính:
 - a) $\angle B$ và $\angle C$ của tam giác ABC.
 - b) Diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây BC và cung nhỏ BC theo R

Lời giải: (HD)



1. AM là phân giác của $\angle BAC \Rightarrow \angle BAM = \angle CAM \Rightarrow BM = CM \Rightarrow M$ là trung điểm của cung BC $\Rightarrow OM \perp BC$; Theo giả thiết $AH \perp BC \Rightarrow OM \parallel AH \Rightarrow \angle HAM = \angle OMA$ (so le). Mà $\angle OMA = \angle OAM$ (vì tam giác OAM cân tại O do có $OM = OA = R$) $\Rightarrow \angle HAM = \angle OAM \Rightarrow AM$ là tia phân giác của góc OAH

2. Vẽ dây $BD \perp OA \Rightarrow AB = AD \Rightarrow \angle ABD = \angle ACB$. Ta có $\angle OAH = \angle DBC$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn) $\Rightarrow \angle OAH = \angle ABC - \angle ABD \Rightarrow \angle OAH = \angle ABC - \angle ACB$ hay $\angle OAH = \angle B - \angle C$.

3. a) Theo giả thiết $\angle BAC = 60^\circ \Rightarrow \angle B + \angle C = 120^\circ$; theo trên $\angle B - \angle C = \angle OAH \Rightarrow \angle B - \angle C = 20^\circ$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \angle B + \angle C = 120^\circ \\ \angle B - \angle C = 20^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \angle B = 70^\circ \\ \angle C = 50^\circ \end{cases}$$

$$b) S_{vp} = S_{qBOC} - S_{\Delta BOC} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} R \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{R}{2} = \frac{\pi \cdot R^2}{3} - \frac{R^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{R^2 \cdot (4\pi - 3\sqrt{3})}{12}$$
