CÁC DẠNG TOÁN HÌNH HỌC LỚP 8

TỨ GIÁC

Định nghĩa: Tứ giác ABCD là hình gồm 4 đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, trong đó bất bì 2 đoạn thẳng nào cũng không nằm trên một đường thẳng.

Tứ giác lồi: Là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng mà bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của tứ giác.

Chú ý: Khi nói đến tứ giác, ta hiểu đó là tứ giác lồi, trong tứ giác lồi tổng 4 góc trong là 360^0, tổng 4 góc ngoài cũng là 360^0.

Dạng 1. Sử dụng tính chất về các góc của một tứ giác để tính góc

Phương pháp: Sử dụng tính chất tổng các góc trong một tứ giác, ttrong một tam giác, góc tạo bởi một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song…

Bài 1. Cho tứ giác ABCD, $\hat{B} = 120;\ \hat{C} = 60;\ \hat{D} = 90$. Tính góc A và góc ngoài tại đỉnh A.

Hướng dẫn:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^0$ *nên* $\hat{A} = 90^0$ *và góc ngoài tại đỉnh A là:* $180^0 - 90^0 = 90^0$

Bài 2. Cho tứ giác ABCD có AB = AD, CB = CD, $\hat{C} = 60$; $\hat{A} = 100$.

a) Chứng minh AC là đường trung trực của BD. b) Tính $\hat{B},\ \hat{D}$.

Hướng dẫn:

a) ΔABD và ΔCBD cân nên AC là trung trực BD.

b) ΔABD cân mà $\hat{A} = 100^0 => \widehat{ABD} = \widehat{ADB} = 40^0$*; ΔCBD cân mà* $\hat{C} = 60^0 => \widehat{CBD} = \widehat{CDB} = 60^0 => \hat{B} = \hat{D} = 100^0$.

Bài 3. Cho tứ giác ABCD có phân giác trong của góc A và góc B cắt nhau tại E, phân giác ngoài của góc A và góc B cắt nhau tại F. Chứng minh: $\widehat{AEB} = \frac{\hat{C}+\hat{D}}{2}$ và $\widehat{AFB} = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}$.

Hướng dẫn:

$$\widehat{AEB} = 180^0 - \left(\widehat{EAB} + \widehat{EBA}\right) = 180^0 - \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}+\hat{D}}{2}$$

Vì tứ giác BFAE có $\hat{A} = \hat{B} = 90^0$ *nên* $\hat{F} + \hat{E} = 180^0$ *hay*

$\widehat{AFB} = 180^0 - \widehat{AEB} = 180^0 - \frac{\hat{C}+\hat{D}}{2} = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}$

Bài 4. Cho tứ giác ABCD có $\hat{B} + \hat{D} = 180$ và CB=CD. Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho DE = AB. Chứng minh:

a) Các tam giác ABC và EDC bằng nhau.

b) AC là phân giác của góc A.

Hướng dẫn:

a, Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{CDE}$ *(cùng bù với góc* $\widehat{ADC}$ *) nên ΔABC=ΔEDC (c.g.c).*

b, Theo a thì AC=CE nên ΔACE cân , suy ra $\widehat{CAE} = \widehat{CEA}$ *mà* $\widehat{CEA} = \widehat{CAB}$ *(hai góc tương ứng) nên* $\widehat{CAB} = \widehat{CAE}$ *. Vậy AC là phân giác góc A.*

Bài 5. Cho tứ giác ABCD biết số đo của các góc $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ tỉ lệ thuận với 5; 8; 13 và 10.

a) Tính số đo các góc của tứ giác ABCD.

b) Kéo dài hai cạnh AB và DC cắt nhau ở E, kéo dài hai cạnh AD và BC cắt nhau ở F. Hai tia phân giác của các góc AED và góc AFB cắt nhau ở O. Phân giác của góc AFB cắt các cạnh CD và AB tại M và N. Chứng minh O là trung điểm của đoạn MN.

Hướng dẫn:

a, Ta có: $\frac{\hat{A}}{5} = \frac{\hat{B}}{8} = \frac{\hat{C}}{13} = \frac{\hat{D}}{10} = \frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}}{5+8+13+10} = \frac{360^0}{36} = 10^0$

Vậy: $\hat{A} = 50^0; \hat{B} = 80^0; \hat{C} = 130^0; \hat{D} = 100^0$

b, Xét ΔAFB có: $\hat{A} = 50^0; \hat{B} = 80^0$ *nên* $\widehat{AFB} = 50^0$*; suy ra* $\widehat{MFD} = 25^0 => \widehat{FMD} = 75^0 = \widehat{NME}; \widehat{ANF} = 105^0$ *nên* $\widehat{MNE} = 75^0$.

Vậy ΔNEM cân tại E mà EO là phân giác nên O là trung điểm MN.

Bài 6. Cho tứ giác ABCD có $\hat{B} + \hat{D} = 180$, AC là tia phân giác của góc A. Chứng minh CB = CD.

Hướng dẫn:

Kẻ CH vuông góc AD, CP vuông góc AB thì CH=CP(t/c phân giác)

$\hat{D} = \widehat{CBP}$ *(cùng bù với góc* $\hat{B}$ *) nên* $\widehat{HCD} = \widehat{PCB}$

$=> \Delta HCD = \Delta PCB$ *(cgv-gnk) nên DC=BC.*

Bài 7. Cho tứ giác ABCD có $\hat{A} = a, \hat{C} = b$. Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại E, hai đường thẳng AB và DC cắt nhau tại F. Các tia phân giác của hai góc AEB và AFD cắt nhau tại I. Tính góc $\widehat{EIF}$ theo a,b.

Hướng dẫn:

Goi AB giao IE tại O, CB giao IF tại H, Ta có:

$\widehat{EIF} = 180^0 - \left(\frac{\hat{F}}{2} + \widehat{IOB}\right) = 180^0 - \left(a - \frac{\hat{E}}{2} + \frac{\hat{F}}{2}\right)$ *(1)*

$\widehat{EIF} = 180^0 - \left(\frac{\hat{E}}{2} + \widehat{IHE}\right) = 180^0 - \left(b - \frac{\hat{F}}{2} + \frac{\hat{E}}{2}\right)$ *(2)*

Lấy (1)+(2) theo vế ta được: $2\widehat{EIF} = 360^0 - (a + b)$ *nên* $\widehat{EIF} = \frac{360^0 - (a+b)}{2}$.

Dạng 2. Sử dụng bất đẳng thức tam giác để giải các bài toán liên hệ đến các cạnh của một tứ giác

Bài 1. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh:

a) AB<BC+CD+DA b) AC+BD<AB+BC+CD+DA.

Hướng dẫn:

a, AB<AD+DB; DB<DC+CB.

Cộng vế hai bất đẳng thức trên ta được:

AB+DB<AD+DB+DC+CB hay AB<BC+CD+DA.

b, Ta có:

AC<AB+BC

AC<AD+DC

BD<AD+AB

BD<DC+BC. Cộng vế 4 bất đẳng thức trên suy ra: AC+DB<AB+BC+CD+DA.

Bài 2. Cho tứ giác ABCD có $AB + BD \le AC + CD$. Chứng minh: $AB < AC$.

Hướng dẫn:

OA+OB>AB; OC+OD>DC. Cộng 2 vế bất đẳng thức trên suy ra : OA+OB+OC+OD>AB+DC

hay AC+BD>AB+DC (1) mà AC+CD ≥ AB+DB (2). Cộng (1) và (2) theo vế suy ra: 2AC+DB+CD>2AB+DC+DB hay AC>AB.

Bài 3. Cho tứ giác ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

a) Chứng minh: $\frac{AB+BC+CD+AD}{2}<OA+OB+OC+OD<AB+BC+CD+AD$.

b)* Khi O là điểm bất kì thuộc miền trong của tứ giác ABCD, kết luận trên có đúng không?

Hướng dẫn:

a, OA+OB>AB; OA+OD>AD; OD+OC>DC; OC+OB>BC; Cộng theo vế 4 bất đẳng thức trên suy ra: 2(OA+OB+OC+OD)>AB+BC+CD+DA (1).

Ta có: OA+OB+OC+OD=AC+DB < AB+BC+CD+DA (2) Đã chứng minh ở bài 1.

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

b, Khi O là điểm bất kì trong tam giác:

Ta có: OA+OB>AB; OC+OD>DC hay OA+OB+OC+OD>AB+DC. Tương tự ta có: OA+OB+OC+OD>BC+AD nên OA+OB+OC+OD> (AB+BC+CD+DA):2 luôn đúng.

Xét bất đẳng thức : OA+OB+OC+OD<AB+BC+CD+DA:

Vẽ ΔABO có AB=2cm, AO=10cm, OB=11cm, trên tia đối OB lấy OD=1cm,

Ta có:

AD<OA+OD=11cm, lấy C sao cho BD là trung trực AC, thì BC=AB=2cm, CD=AD và OA=OC,

Ta có:

OA+OB+OC+OD=32cm, AB+BC+CD+DA=26cm

nên OA+OB+OC+OD>AB+BC+CD+DA.

Bài 4. Chứng minh rằng trong một tứ giác thì:

a) Tổng độ dài 2 cạnh đối diện nhỏ hơn tổng độ dài hai đường chéo.

b) Tổng độ dài hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi của tứ giác.

Hướng dẫn:

a, Gọi giao điểm 2 đường chéo là O. Ta có: OA+OB>AB; OC+OD>DC .

Cộng theo vế 2 bất đẳng thức trên suy ra:

OA+OB+OC+OD>AB+DC hay AC+DB>AB+DC.

Chứng minh tương tự ta được: AC+BD>AD+BC.

b, AC+DB=OA+OC+OD+OB>(AB+BC+CD+DA):2 Theo bài 1.

HÌNH THANG – HÌNH THANG VUÔNG

1. Định nghĩa

• *Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.*

• *Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông.*

2. Tính chất

• *Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau, hai cạnh đáy bằng nhau.*

• *Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau.*

Dạng 1. Tính chất các góc của một hình thang

Phương pháp: Sử dụng tính chất góc tạo bởi một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song: Hai góc sole trong bằng nhau, trong cùng phía bù nhau…

Bài 1. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có $\hat{A} - \hat{D} = 20^0, \hat{B} = 2\hat{C}$. Tính các góc của hình thang.

Hướng dẫn:

Vì AB//CD nên $\hat{A} + \hat{D} = 180^0$ *(hai góc trong cùng phía) mà* $\hat{A} - \hat{D} = 20^0$ *nên* $\hat{A} = 100^0$; $\hat{D} = 80^0$.

Tương tự: $\hat{B} + \hat{C} = 180^0$ *mà* $\hat{B} = 2\hat{C}$ *nên* $2\hat{C} + \hat{C} = 180^0$ => $3\hat{C} = 180^0$ *nên* $\hat{C} = 60^0$ *và* $\hat{B} = 120^0$.

Bài 2. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có AB < CD, AD = BC = AB, $\widehat{BDC} = 30^0$. Tính các góc của hình thang.

Hướng dẫn:

$\widehat{DBA} = \widehat{BDC} = 30^0$ *(sole);* $\widehat{DBA} = \widehat{ADB} = 30^0$ *(ΔADB cân). Suy ra* $\hat{A} = 120^0$ *và* $\hat{D} = 60^0$.

Từ B kẻ BE // AD. Suy ra BE=AD và $\widehat{CEB} = \hat{D} = 60^0$ *(đồng vị). mà CB=BE nên ΔBCE đều* $\hat{C} = 60^0$; $\hat{B} = 120^0$.

Bài 3. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có AB < CD. Chứng minh rằng: $\hat{A} + \hat{B} > \hat{C} + \hat{D}$.

Hướng dẫn:

Trên DC lấy E sao cho AB=DE. Suy ra : $\hat{A} = \widehat{DEB}$; $\hat{D} = \widehat{EBA}$; $\hat{A} + \hat{B} = \hat{A} + \hat{D} + \widehat{EBC} = \hat{D} + \widehat{DEB} + \widehat{EBC} > \hat{D} + \hat{C}$

Bài 4. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Hai đường phân giác của góc A và B cắt nhau tại điểm K thuộc đáy CD. Chứng minh AD + BC = DC.

Hướng dẫn:

ΔADK cân tại D, ΔCBK cân tại C (có hai góc ở đáy bằng nhau) nên AD=DK; KC=CB

Bài 5. Cho hình thang ABCD (AB // CD).

a) Chứng minh rằng nếu hai tia phân giác của hai góc A và D cùng đi qua trung điểm F của cạnh bên BC thì cạnh bên AD bằng tổng hai đáy.

b) Chứng minh rằng nếu AD = AB + CD thì hai tia phân giác của hai góc A và D cắt nhau tại trung điểm của cạnh bên BC.

Hướng dẫn:

Trên AD lấy K sao cho AK=AB

ΔAKF= ΔABF (c.g.c) nên $\widehat{AFK} = \widehat{AFB}$

Vì $\hat{A} = \hat{D} = 180^0$ *nên* $\widehat{FAK} + \widehat{FDK} = 90^0$.

Ta có: $\widehat{AFK} + \widehat{KFD} = 90^0$; $\widehat{AFB} + \widehat{DFC} = 90^0$ *mà* $\widehat{AFK} = \widehat{AFB}$ *nên* $\widehat{KFD} = \widehat{CFD}$ *suy ra ΔKFD= ΔCFD (g.c.g) nên KD=DC suy ra AD=AK+KD=AB+CD đpcm.*

Bài 6. Cho hình thang ABCD có $\hat{A} = \hat{B} = 90$ và $AB = BC = \frac{AD}{2}$. Lấy điểm M thuộc đáy nhỏ BC. Kẻ M*x* ⊥ MA, M*x* cắt CD tại N. Chứng minh rằng tam giác AMN vuông cân.

Hướng dẫn:

Tính được : $\hat{C} = 135^0$,

Trên AB lấy K sao cho BM=BK suy ra AK=MC,

Vì ΔKBM vuông cân nên $\widehat{AKM} = 135^0$, *mặt khác:* $\widehat{AKM} = \widehat{NMC}$ *(cùng bù với góc* $\widehat{AMB}$ *) suy ra* $\Delta AKM = \Delta MCN$ *(g.c.g) nên AM=MN*

Dạng 2. Chứng minh một tứ giác là hình thang, hình thang vuông

Bài 1. Cho tứ giác ABCD có AB = BC và AC là tia phân giác của góc A. Chứng minh ABCD là hình thang.

Hướng dẫn: ΔABC cân nên $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$ *mà* $\widehat{BAC} = \widehat{CAD}$ *nên* $\widehat{CAD} = \widehat{BCA}$ *suy ra BC//AD hay ABCD là hình thang*

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy điểm M thuộc cạnh BC sao cho $AM = \frac{BC}{2}$, N là trung điểm cạnh AB. Chứng minh:

a) Tam giác AMB cân.

b) Tứ giác MNAC là hình thang vuông.

Hướng dẫn:

a, Vì AM=AB:2 nên AM là đường trung tuyến suy ra AM=MB=MC, hay ΔAMB cân tại M.

b, Vì ΔAMB cân tại M, N là trung điểm AB nên MN vuông góc AB suy ra ANMC là hình thang vuông.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH. Từ H kẻ HD ⊥ AC, HE ⊥ AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng HB, HC. Chứng minh tứ giác DEMN là hình thang vuông.

Hướng dẫn:

$\widehat{MEH} = \widehat{MHE} = \widehat{MAE} = \widehat{MDE} = \widehat{MCD};$ $\widehat{MBE} = \widehat{MAD} = \widehat{MED} = \widehat{DMC}$ *nên* $\widehat{MED} = \widehat{EDN} = 90^0$ *suy ra MEDN là hình thang vuông.*

HÌNH THANG CÂN

1. Định nghĩa

Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.

2. Tính chất

Trong hình thang cân:

- *Hai cạnh bên bằng nhau.*
- *Hai đường chéo bằng nhau.*

3. Dấu hiệu nhận biết

- *Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.*
- *Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.*

Dạng 1. Sử dụng tính chất của hình thang cân để tính toán và chứng minh

Bài 1. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD, AB < CD). Kẻ các đường cao AE, BF của hình thang. Chứng minh rằng DE = CF.

Hướng dẫn:

ΔADE=ΔBCF (ch-gn) nên DE=CF.

Bài 2. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD).

a) Chứng minh: $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$.

b) Gọi E là giao điểm của AC và BD. Chứng minh: $EA = EB$.

Hướng dẫn:

a, $\Delta ACD = \Delta BDC$ (c.c.c) nên $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$.

b, $\widehat{ABE} = \widehat{BDC}$; $\widehat{BAE} = \widehat{ACD}$ nên $\widehat{ABE} = \widehat{BAE}$ suy ra ΔAEB cân tại E nên EA=EB.

Bài 3. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD, AB > CD) có $CD = a$, $\hat{A} + \hat{B} = \frac{1}{2}(\hat{C} + \hat{D})$.

Đường chéo AC vuông góc với cạnh bên BC.

a) Tính các góc của hình thang.

b) Chứng minh AC là phân giác của góc $\widehat{DAB}$.

c) Tính diện tích của hình thang.

Hướng dẫn:

a, Ta có:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360$ mà $\hat{C} + \hat{D} = 2(\hat{A} + \hat{B})$ nên $\hat{A} + \hat{B}$ =120. Vì ABCD là hình thang cân nên $\hat{A} = \hat{B} = 60$; $\hat{C} + \hat{D}$ =120.

b, $\widehat{CAB} = \widehat{DAC} = 30$ nên AC là phân giác $\widehat{DAB}$.

c, ΔCAB vuông tại C mà $\widehat{CAB} = 30$; CB= a nên AB=2a (cạnh đối diện góc 30^0 bằng nửa cạnh huyền) . Suy ra AC= $a\sqrt{3}$ (Pytago cho tam giác ABC)

Từ C kẻ CH vuông góc AB suy ra: CH.AB=AC.CB => CH= $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABCD} = \frac{(AB+DC)CH}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Bài 4. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD) có $\widehat{BDC} = 45$. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

a) Chứng minh tam giác DOC vuông cân.

b) Tính diện tích của hình thang ABCD, biết BD = 6 (cm).

Hướng dẫn:

a, $\widehat{BDC} = \widehat{ACD} = 45$

b, $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{DAC} = \frac{DO.AC}{2} + \frac{OB.AC}{2}$ = AC.BD:2=6.6:2=18cm^2

Dạng 2. Chứng minh một tứ giác là hình thang cân

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A, các đường phân giác BD, CE ($D \in AC$, $E \in AB$). Chứng minh rằng BEDC là hình thang cân có đáy nhỏ bằng cạnh bên.

Hướng dẫn:

Vì ΔABC và ΔAED cân tại A nên ED//BC, mà $\hat{B} = \hat{C}$ nên EDCB là hình thang cân.

Vì ED//BC nên $\widehat{BDE} = \widehat{DBC}$ (sole trong) mà $\widehat{DBC} = \widehat{DBE}$ (gt) nên $\widehat{EDB} = \widehat{BDE}$ hay ΔEDB cân tại E suy ra ED=EB=DC đpcm

Bài 2. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$. Chứng minh rằng ABCD là hình thang cân.

Hướng dẫn:

Gọi giao điểm DB và AC là O, ta có: $\widehat{ODC} = \widehat{OBA}$ (sole trong) ; $\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$ (sole trong) mà $\widehat{OCD} = \widehat{ODC}$ (gt) nên ΔODC và ΔOAB là tam giác cân tại O, suy ra OA=OB; OC=OD hay AC=BD. Vậy ABCD là hình thang cân.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên các cạnh AB, AC lấy lần lượt các điểm D và E sao cho AD = AE.

a) Chứng minh BDEC là hình thang cân.

b) Tính các góc của hình thang cân đó, biết $\hat{A} = 50$.

Hướng dẫn:

b) $\hat{B} = \hat{C} = 65, \widehat{CED} = \widehat{BDE} = 115.$

Bài 4. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có AC = BD. Qua B kẻ đường thẳng song song với AC cắt đường thẳng DC tại E. Chứng minh:

a) Tam giác BDE là tam giác cân.

b) Các tam giác ACD và BDC bằng nhau.

Hướng dẫn:

a, $\Delta BCE=\Delta CBA$ (g.c.g) nên BE=AC mà AC=BD nên ΔDBE cân tại B.

b, Vì AC=BD nên ABCD là hình thang cân, suy ra AD=BC.

suy ra $\Delta ACD=\Delta BDC$ (c.c.c)

Bài 5. Cho tam giác đều ABC và điểm M thuộc miền trong của tam giác. Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB ở D, đường thẳng song song với AC cắt BC ở E, đường thẳng song song với AB cắt AC ở F. Chứng minh:

a) Các tứ giác BDME, CFME, ADMF là các hình thang cân.

b) Chu vi của tam giác DEF bằng tổng các khoảng cách từ M đến các đỉnh của tam giác ABC.

c) $\widehat{DME} = \widehat{DMF} = \widehat{EMF}$.

Hướng dẫn:

c) $\widehat{DME} = \widehat{DMF} = \widehat{EMF} = 120$.

Bài 6. Cho hình thang ABCD (AD // BC, AD > BC) có đường chéo AC vuông góc với cạnh bên CD, $\widehat{BAC} = \widehat{CAD}$ và $\widehat{D} = 60^0$.

a) Chứng minh ABCD là hình thang cân.

b) Tính độ dài cạnh đáy AD, biết chu vi hình thang bằng 20 cm.

Hướng dẫn:

a, Vì $\widehat{D} = 60^0$ *nên* $\widehat{CAD} = 30^0$ *hay* $\hat{A} = 60^0$. *Vậy ABCD là hình thang cân.*

b, Vì $\widehat{CAD} = 30^0$ *nên AD=2DC, ta có:* $\widehat{ACB} = \widehat{CAB} = \widehat{CAD}$ *nên* ΔACB *cân tại B, suy ra AB=BC=CD, Chu vi ABCD=5CD=20 nên CD=4cm,* $AD = 8(cm)$.

ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC, CỦA HÌNH THANG

1. Đường trung bình của tam giác

- *Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.*
- *Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm cạnh thứ ba.*
- *Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.*

2. Đường trung bình của hình thang

- *Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang.*
- *Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.*
- *Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.*

Bài 1. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Trên cạnh AB, lấy hai điểm D, E sao cho AD = DE = EB. Gọi I là giao điểm của AM với CD. Chứng minh: AI = IM.

Hướng dẫn:

ΔBDC có EM là đường trung bình nên EM//DC hay EM//DI.

ΔAEM có DI//EM và D là trung điểm AE nên I là trung điểm AM.

Bài 2. Cho tam giác ABC và hai đường trung tuyến BD, CE cắt nhau tại G. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BG, CG. Chứng minh tứ giác MNDE có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau.

Hướng dẫn:

ΔABC có DE là đường trung bình nên DE//= $\frac{1}{2}$ *BC. (1)*

ΔGBC có NM là đường trung bình nên MN//=$\frac{1}{2}$ *BC. (2)*

Từ (1)(2) suy ra DE//= MN.

Tương tự: DN//= $\frac{1}{2}$*AG; EM//=*$\frac{1}{2}$*AG nên DN//=EM.*

Bài 3. Cho tam giác ABC. Trên tia BA lấy điểm D sao cho A là trung điểm BD. Trên tia CB lấy điểm E sao cho B là trung điểm CE. Hai đường thẳng AC và DE cắt nhau tại I. Chứng minh rằng: $DI = \frac{DE}{3}$.

Hướng dẫn:

Từ B kẻ song song AI cắt ED tại H. Suy ra I là trung điểm HD (1).

Vì HB//IC và B là trung điểm EC nên H là trung điểm EI (2).

Từ (1)(2) suy ra 3DI=DE.

Bài 4. Cho tứ giác ABCD có góc $\hat{C} = 40$, $\widehat{D} = 80$, AD = BC. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Tính góc nhọn tạo bởi đường thẳng FE với các đường thẳng AD và BC.

Hướng dẫn:

Gọi EF cắt AD và BC tại M và N, AD cắt BC tại O

Gọi I là trung điểm BD, Suy ra IE là đường trung bình ΔDBA và FI là đường trung bình ΔDBC.

Mà AD=BC nên IE=IF. hay ΔIEF cân tại I.

$\widehat{ONM} = \widehat{FNC} = \widehat{NFI}$ *(hai góc sole trong)*

$\widehat{OMN} = \widehat{IEF}$ *(hai góc đồng vị) mà* $\widehat{NFI} = \widehat{IEF}$ *nên ΔOMN cân tại O*

mà $\widehat{NOM} = 120$ *nên* $\widehat{ONM} = \widehat{OMN} = 30$.

Bài 5. Cho A, B, C theo thứ tự nằm trên đường thẳng *d* (AB > BC). Trên cùng nửa mặt phẳng bờ là *d*, vẽ các tam giác đều AMB và BNC. Gọi P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của BM, CM, BN, AN. Chứng minh:

a) PQRS là hình thang cân.

b) $SQ = \frac{1}{2}MN$.

Hướng dẫn:

a, PQ là đường trung bình của ΔMBC nên PQ//BC

SR là đường trung bình của ΔNAB nên SR//AB. Suy ra SR//PQ nên PQRS là hình thang.

Gọi H và I lần lượt là trung điểm AB và BC.

Ta có: SH là đường trung bình ΔABN nên SH//BN, mà BN//AM (hai góc đồng vị bằng nhau) nên SH//AM (1)

PH là đường trung bình của ΔMAB nên PH//AM (2).

Từ (1)(2) suy ra P,S,H thẳng hàng và PS//AM nên $\widehat{PSR} = 60^0$. *Chứng minh tương tự Q,R,I thẳng hàng và* $\widehat{QRS} = 60^0$ *nên PQRS là hình thang cân.*

b, SQ=PR= $\frac{1}{2}$ *MN.*

Bài 6. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AM, D là giao điểm của BI và AC.

a) Chứng minh: $AD = \frac{1}{2}DC$.

b) So sánh độ dài BD và ID.

Hướng dẫn:

Kẻ MO //BD suy ra O là trung điểm CD (1) và MO//ID

Vì MO//ID mà I là trung điểm AM nên D là trung điểm AO (2).

Từ (1)(2) suy ra đpcm.

Bài 7. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AD, BC, AC, BD.

a) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q nằm trên một đường thẳng.

b) Tính MN, PQ, biết các cạnh đáy của hình thang AB=a; CD=b (b>a).

c) Chứng minh rằng nếu MQ = PQ = PN thì b=2a..

Hướng dẫn:

a, MN là đường trung bình của hình thang nên MN//DC (1)

MQ là đường trung bình của tam giác DAB nên MQ//AB (2)

PN là đường trung bình của tam giác CAB nên PN//AB (3)

Từ (1)(2)(3) suy ra M,N,P,Q nằm trên một đường thẳng

b, MN= (a+b):2

MQ=PN=AB:2=a:2 nên PQ=MN-(MQ+PN)= (b-a):2

c, Ta có:

PQ= (b-a):2 ; NP=MQ= a:2

Để PQ=NP thì (b-a):2=a:2 hay b-a=a ⇔ b=2a.

Bài 8. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của AD, BC, BD. Chứng minh ba điểm E, K, F thẳng hàng.

Hướng dẫn:

EK là đường trung bình tam giác ADB nên EK//AB. Tương tự: KF//DC mà AB//DC nên E,K,F thẳng hàng.

Bài 9. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD và BC. Đường thẳng EF cắt BD ở I, cắt AC ở K.

a) Chứng minh: AK = KC, BI = ID.

b) Cho AB = 6, CD = 10. Tính EI, KF, IK.

Hướng dẫn:

a, EF là đường trung bình của hình thang nên EF//DC hay EK//DC mà E là trung điểm AD nên K là trung điểm AC => AK=KC. Chứng minh tương tự: BI=ID

b, EF=(AB+CD):2=8cm, EI là đường trung bình của ΔADB nên EI=AB:2=3cm, tương tự FK=AB:2=3cm nên IK=2cm.

Bài 10. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của AD, BC, AC.

a) So sánh độ dài các đoạn thẳng EK và CD, KF và AB.

b) Chứng minh: $EF \le \frac{AB+CD}{2}$.

c) Khi $EF = \frac{AB+CD}{2}$ thì tứ giác ABCD là hình gì.

Hướng dẫn:

a, EF ≤ EK+KF mà EK=DC:2; KF=AB:2 (tính chất đường trung bình) nên $EF \le \frac{AB+CD}{2}$.

b, Nếu $EF = \frac{AB+CD}{2}$ *thì EF=EK+KF hay E.F.K thẳng hàng. Mà FK//AB.\, EK//DC nên AB//CD hay ABCD là hình thang.*

Bài 11. Tính độ dài đường trung bình của một hình thang cân biết rằng các đường chéo của nó vuông góc với nhau và bằng 20cm, đường cao bằng 10 cm.

Hướng dẫn:

Gọi EF là đường trung bình của hình thang ABCD, AH là đường cao:

Ta có: $S_{ABCD} = \frac{(AB+CD).AH}{2} = EF.AH$ *mà* $S_{ABCD} = \frac{AC.BD}{2}$ *nên* $\frac{AC.BD}{2} = EF.AH$, *EF=20cm.*

Bài 12. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Vẽ đường thẳng *d* đi qua G cắt các đoạn thẳng AB, AC. Gọi A’, B’. C’ thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên *d*. Tìm liên hệ giữa các độ dài AA’, BB’, CC’.

Hướng dẫn:

Gọi M là trung điểm BC. Kẻ MM’ vuông góc với B’C’, suy ra 2MM’=(BB’+CC’) (tính chất đường trung bình của hình thang) mà 2MM’=AA’ nên AA’=BB’+CC’.

Bài 13. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Vẽ đường thẳng *d* nằm ngoài tam giác ABC. Gọi A’, B’. C’, G’ thứ tự là hình chiếu của A, B, C, G trên *d*. Tìm liên hệ giữa các độ dài AA’, BB’, CC’ , GG’.

Hướng dẫn:

Gọi M là trung điểm BC, E là trung điểm AG, kẻ MM’ và EE’ vuông góc B’C’.

Ta có: 2EE’=AA’+GG’; 2GG’=MM’+EE’;

nên 2MM’ +(AA’+GG’)=4GG’ hay 2MM’+AA’=3GG’ suy ra AA’+BB’+CC’=3GG’.

ĐỐI XỨNG TRỤC

Bài 1. Cho góc $\widehat{xOy} = 50$ và điểm A nằm trong góc đó. Vẽ điểm B đối xứng với A qua Ox, điểm C đối xứng với A qua Oy.

a) So sánh các độ dài OB và OC.

b) Tính số đo góc $\widehat{BOC}$.

Hướng dẫn:

a) OB=OC=OA

b) $\widehat{BOC} = 100$.

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC.

a) Chứng minh hai tam giác BHC và BKC bằng nhau.

b) Cho $\widehat{BAC} = 70$. Tính số đo góc $\widehat{BKC}$.

Hướng dẫn: b) $\widehat{BKC} = 110$.

Bài 3. Cho hình thang vuông ABCD (góc A=D=90^0). Gọi K là điểm đối xứng với B qua AD, E là giao điểm của CK và AD. Chứng minh $\widehat{CED} = \widehat{AEB}$

Hướng dẫn: $\widehat{CED} = \widehat{AEB}$ *(cùng bằng* $\widehat{AEK}$ *)*

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K lần lượt là điểm đối xứng với điểm H qua các cạnh AB, AC. Chứng minh:

a) Ba điểm I, A, K thẳng hàng.

b) Tứ giác BIKC là hình thang.

c) $IK = 2AH$.

Hướng dẫn:

a, $\widehat{HAC} = \widehat{CAK}$; $\widehat{HAB} = \widehat{BAI}$ *mà* $\hat{A} = 90^0$ *nên* $\widehat{IAK} = 180^0$ *=> A, I ,K thẳng hàng.*

b, BI vuông góc IK; CK vuông góc IK nên BI//CK suy ra BIKC là hình thang.

c, IA=AH; AH=AK nên IK=2AH.

Bài 5. Cho tam giác ABC, các phân giác BM và CN cắt nhau tại I. Từ A vẽ các đường vuông góc với BM và CN, chúng cắt BC thứ tự ở E và F. Gọi I′ là hình chiếu của I trên BC. Chứng minh rằng E và F đối xứng nhau qua I′.

Hướng dẫn:

Xét ΔAEF có : MB là trung trực cạnh AE (tự chứng minh); CN là trung trực cạnh AF, mà CN giao BM tại I ; II' vuông góc với BC nên II' là trung trực cạnh EF

Suy ra E,F đối xứng nhau qua I'.

Bài 6. Cho hai điểm A, B nằm trong một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng *d*. Tìm điểm $M \in d$ sao cho $MA + MB$ ngắn nhất.

Hướng dẫn:

Gọi B' là điểm đối xứng mới B qua d, AB' giao d tại M_0; gọi M là điểm bất bì thuộc d.

Ta có: $MA+MB=MA+MB' \geq AB'=AM_0+M_0B'=AM_0+M_0B$.

Dấu "=" xảy ra khi $M \equiv M_0$.

Bài 7. Cho góc $x\widehat{O}y = 60$ và điểm A nằm trong góc đó. Gọi B, C lần lượt là hai điểm đối xứng với điểm A qua Ox, Oy.

a) Chứng minh tam giác BOC là tam giác cân. Tính các góc của tam giác đó.

b) Tìm điểm I thuộc Ox và điểm K thuộc Oy sao cho tam giác AIK có chu vi nhỏ nhất.

Hướng dẫn:

a) $\widehat{BOC} = 120$; $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = 30$

b) I, K là giao điểm của đường thẳng BC với các tia Ox và Oy.

Bài 8. Cho tam giác ABC, C*x* là phân giác ngoài của góc C. Trên C*x* lấy điểm M (khác C). Chứng minh rằng: MA + MB > CA + CB.

Hướng dẫn:

Trên tia đối tia CB lấy E sao cho CE=CA. Suy ra ΔMCE=ΔMCA (c.g.c) nên AM=ME

Ta có: AM+MB=ME+MB>EB mà EB=EC+CB=AC+CB nên MA+MB>AC+CB.

Bài 9. Cho góc nhọn xOy và điểm A ở trong góc đó . Tìm điểm B ở trên tia O*x* và điểm C ở trên tia O*y* sao cho chu vi tam giác ABC là nhỏ nhất.

Hướng dẫn:

Gọi A' và A'' lần lượt là hai điểm đối xứng với A qua Oy và Ox, A'A'' cắt Oy và Ox lần lượt tại C' và B'.

Gọi C và B lần lượt là hai điểm thuộc Oy và Ox,

Chu vi ΔABC=AB+BC+CA=BA''+BC+CA' ≥ A'A''=A'C'+C'B'+B'A''.

Vậy chu vi ΔABC nhỏ nhất = A'A'' khi $C \equiv C'$; $B \equiv B'$.

HavaMATH

HÌNH BÌNH HÀNH

1. Định nghĩa

Hình bình hành là tứ giác có các cặp cạnh đối song song.

2. Tính chất

Trong hình bình hành:

- *Các cạnh đối bằng nhau.*
- *Các góc đối bằng nhau.*
- *Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.*

3. Dấu hiệu nhận biết

- *Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành.*
- *Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.*
- *Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành.*
- *Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.*

Dạng 1. Vận dụng tính chất của hình bình hành để chứng minh tính chất hình học

Bài 1. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là trung điểm của AD, F là trung điểm của BC.

a) Chứng minh $BE = DF$ và $\widehat{ABE} = \widehat{CDF}$.

b) Chứng minh tứ giác EBFD là hình bình hành.

c) Chứng minh các đường thẳng EF, DB và AC đồng quy.

Hướng dẫn:

a, ΔEAB=ΔFCD (c.g.c)

b, Ta có: ED=BF (cmt) và EB=DF (Vì AD=BC)

c, Vì EBFD là hình bình hành nên BD giao EF tại trung điểm BD (1)

Vì ABCD là hình bình hành nên AC giao BD tại trung điểm của BD (2)

Từ (1)(2) suy ra EF,AC,BD đồng quy.

Bài 2. Cho hình bình hành ABCD (AB > BC). Tia phân giác của góc D cắt AB ở E, tia phân giác của góc B cắt CD ở F.

a) Chứng minh DE=BF.

b) Tứ giác DEBF là hình gì?

Hướng dẫn:

a, ΔADE=ΔCBF (g.c.g)

b, DEBF là hình bình hành

Bài 3. Cho hình bình hành ABCD. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh AB vad CD, M và N là giao điểm của AI và CK với BD.

a) Chứng minh AI=CK.

b) Chứng minh: $DM = MN = NB$.

Hướng dẫn:

a, AKCI là hình bình hành nên AI=CK

b, ΔAMB có AM//KN mà K là trung điểm AB nên N là trung điểm MB hay MN=NB (1)

ΔDNC có IM//NC mà I là trung điểm DC nên M là trung điểm DN hay MN=MD (2)

Từ (1)(2) suy ra đpcm

Dạng 2. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình bình hành

Bài 1. Cho hình bình hành ABCD, đường chéo BD. Kẻ AH vuông góc với BD ở H, CK vuông góc với BD ở K. Chứng minh tứ giác AHCK là hình bình hành.

Hướng dẫn:

AH//CK (1), vì $\Delta ADB = \Delta CBD$ nên $S_{ADB} = S_{CBD}$ hay $\frac{AH.DB}{2} = \frac{CK.DB}{2}$ suy ra AH=CK (2)

Từ (1)(2) suy ra đpcm.

Bài 2. Cho hình bình hành ABCD. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Qua điểm O, vẽ đường thẳng *a* cắt hai đường thẳng AD, BC lần lượt tại E, F, vẽ đường thẳng *b* cắt hai cạnh AB, CD lần lượt tại K, H. Chứng minh tứ giác EKFH là hình bình hành.

Hướng dẫn:

$\Delta AOK = \Delta COH$(g.c.g) nên OH=OK(1) ; $\Delta AOE = \Delta COF$ (g.c.g) nên OE=OF (2)

Từ (1)(2) suy ra đpcm

Bài 3. Cho tam giác ABC. Từ một điểm E trên cạnh AC vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB tại F và đường thẳng song song với AB cắt BC tại D. Giả sử AE = BF.

a) Chứng minh tam giác AED cân.

b) Chứng minh AD là phân giác của góc A.

Hướng dẫn:

a, EDBF là hình bình hành nên AE=DE (cùng bằng BF)

b, $\widehat{EAD} = \widehat{EDA}$ (ΔADE cân tại E)

$\widehat{EDA} = \widehat{DAF}$ (so le trong)

Bài 4. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA và I, K là trung điểm các đường chéo AC, BD. Chứng minh:

a) Các tứ giác MNPQ, INKQ là hình bình hành.

b) Các đường thẳng MP, NQ, IK đồng quy.

Hướng dẫn:

a, MN là đường trung bình của tam giác ABC nên MN//=1/2.AC

PQ là đường trung bình của tam giác DAC nên PQ//=1/2.AC

Suy ra MN//=PQ nên MNPQ là hình bình hành.

Chứng minh tương tự: QI//=KN

b, MNPQ và INKQ là hình bình hành nên MP.NQ,IK đồng quy tại trung điểm của NQ.

Bài 5. Cho tam giác ABC và H là trực tâm. Các đường thẳng vuông góc với AB tại B, vuông góc với AC tại C cắt nhau ở D.

a) Chứng minh tứ giác BDCH là hình bình hành.

b) Tính số đo góc $\widehat{BDC}$, biết $\widehat{BAC} = 60$.

Hướng dẫn:

a, DC//BH (cùng vuông góc AC) ; BD//CH (cùng vuông góc AB)

nên BDCH là hình bình hành.

b, $\widehat{BDC} = \widehat{BHC}$ *mà* $\widehat{HBA} = \widehat{HCA} = 30^0$ *nên* $\widehat{HBC} = \widehat{HCB} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BHC} = 60^0$

Bài 6. Cho hình bình hành ABCD, $AD = 2AB$. Từ C vẽ CE vuông góc với AB. Nối E với trung điểm M của AD. Từ M vẽ MF vuông góc với CE, MF cắt BC tại N.

a) Tứ giác MNCD là hình gì?

b) Tam giác EMC là tam giác gì?

c) Chứng minh: $\widehat{BAD} = 2\widehat{AEM}$.

Hướng dẫn:

a, MNCD là hình thoi.

b, NF//BE mà N là trung điểm BC nên F là trung điểm EC suy ra ΔMEC cân tại M (đường cao là trung trực)

c, Ta có: $\widehat{BAD} + \widehat{AEM} = \widehat{EMD}; \widehat{MEA} = \widehat{EMF} = \widehat{FMC} = \widehat{MCD} = \widehat{DMC}$

nên $\widehat{BAD} + \widehat{AEM} = 3\widehat{AEM}$ *hay* $\widehat{BAD} = 2\widehat{AEM}$.

Bài 7. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AB và CD, AD và BC; M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AE, EC, CF, FA. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Hướng dẫn:

MN //= PQ (vì cùng song song và bằng một nửa AC)

Bài 8. Cho hình bình hành ABCD. Các điểm E, F thuộc đường chéo AC sao cho AE = EF = FC. Gọi M là giao điểm của BF và CD; N là giao điểm của DE và AB. Chứng minh rằng:

a) M, N theo thứ tự là trung điểm của CD, AB. b) EMFN là hình bình hành.

Hướng dẫn:

a, DNBM là hình bình hành nên EN//FB, mà E là trung điểm AF nên N là trung điểm AB.

Chứng minh tương tự: M là trung điểm CD.

b, Theo a) thì EN//FM (1) , ΔAED=ΔCFB (c.g.c) nên DE=BF,

mà MF=DE:2; NE=FB:2 nên MF=EN (2)

Từ (1)(2) suy ra đpcm.

Bài 9. Cho hình thang vuông ABCD, có $\hat{A} = \hat{B} = 90$ và AD = 2BC. Kẻ AH vuông góc với BD (H thuộc BD). Gọi I là trung điểm của HD. Chứng minh rằng: CI ⊥ AI.

Hướng dẫn:

Gọi P là trung điểm AH, suy ra PI//=BC (cùng song song và bằng AD:2)

nên BCIP là hình bình hành, suy ra PI vuông góc AB và CI//BP.

Trong ΔBIA có P là trực tâm tam giác nên BP vuông góc AI mà BP//CI nên CI vuông góc AI.

Bài 10. Cho tam giác ABC và O là một điểm thuộc miền trong của tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA và L, M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn OA, OB, OC. Chứng minh rằng: các đoạn thẳng EL, FM và DN đồng quy.

Hướng dẫn:

Dùng tính chất đường trung bình để chứng minh hình FDMN; LDEN là hình bình hành nên LE; FM; DN đồng quy tại trung điểm mỗi đường

ĐỐI XỨNG TÂM

Tâm đối xứng của hình bình hành là giao điểm của hai đường chéo.

Bài 1. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là điểm đối xứng với D qua A, F là điểm đối xứng với D qua C. Chứng minh:

a) 2AC=EF.

b) Điểm E đối xứng với điểm F qua điểm B.

HD:

a, AC là đường trung bình của tam giác ADF.

b, Vì A là trung điểm ED, mà AB//DF và AB=DC=DF:2 nên B là trung điểm EF.

Bài 2. Cho tam giác ABC, các trung tuyến BD, CE. Gọi H là điểm đối xứng với B qua D, K là điểm đối xứng với C qua E. Chứng minh điểm H đối xứng với điểm K qua điểm A.

HD:

DA=DC; HD=DB nên HABC là hình bình hành => AH//=CB (1)

Tương tự: AKBC là hình bình hành nên AK//=BC (2)

Từ (1)(2) suy ra đpcm

Bài 3. Cho hình bình hành ABCD và điểm E trên cạnh AB, I và K là các trung điểm của cạnh AD và BC. Gọi các điểm M, N lần lượt đối xứng với điểm E qua điểm I và điểm K.

a) Chứng minh các điểm M, N thuộc đường thẳng CD.

b) Chứng minh MN=2CD.

HD:

a, ΔAIE=ΔDIM (c.g.c) nên $\widehat{MDI} = \widehat{IAE}$ *mà hai góc này ở vị trí sole trong nên MD//EA mà CD//EAB nên M thuộc CD.*

Tương tự: CN//BE nên N thuộc CD.

b, Theo câu a): MD=AE; CN=EB; DC=AB nên MN=MD=DC+CN=AB+CD=2CD.

Bài 4. Cho góc vuông xOy, điểm A nằm trong góc đó. Gọi B là điểm đối xứng với A qua Ox C là điểm đối xứng với A qua Oy. Chứng minh B đối xứng với C qua O.

HD:

$\widehat{COy} = \widehat{yOA}$; $\widehat{AOx} = \widehat{xOB}$ (*tính chất đối xứng trục*); $\widehat{xOy} = 90^0$; *suy ra* $\widehat{COB} = 180^0$ *nên O,B,C thẳng hàng.*

Mặt khác: CO=OA; OA=OB (t/c đối xứng trục) nên OC=OB

Vậy: B và C đối xứng qua O

Bài 5. Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Một đường thẳng đi qua O cắt các cạnh AB và CD theo thứ tự ở M và N. Chứng minh điểm M đối xứng với điểm N qua O.

HD:

$\widehat{AOM} = \widehat{CON}; OA = OC;\ \widehat{NCO} = \widehat{MAO}\ (sole\ trong)$

nên ΔAOM=ΔCON (g.c.g) nên OM=ON

Bài 6. Cho hình bình hành ABCD có tâm đối xứng là O, một điểm E ở trên đoạn OD. Gọi F là điểm đối xứng của điểm C qua E.

a) Chứng minh tứ giác ODFA là hình thang.

b) Xác định vị trí điểm E trên OD để hình thang ODFA là hình bình hành.

HD:

a, OE là đường trung bình của ΔACF nên OE//FA hay OD//FA suy ra ODFA là hình thang.

b, Vì ODFA là hình thang nên để ODFA là hình bình hành thì OD=FA mà 2OE=FA nên OD=2OE suy ra E là trung điểm OD.

Bài 7. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Gọi M, N, P theo thứ tự là các điểm đối xứng của A, B, C qua tâm G.

a) Chứng minh tứ giác BPNC là hình bình hành.

b) Chứng minh các tam giác ABC, MNP bằng nhau.

c) Chứng minh các tam giác ABC, MNP có cùng trọng tâm.

HD:

a, PG=GC; BG=GN nên BPNC là hình bình hành.

b, ΔGBA=ΔNGM (c.g.c) nên NM=AB

ΔPGM=ΔCGA (c.g.c) nên PM=AC. Tương tự PN=BC

Suy ra ΔABC=ΔMNP (c.c.c)

c, J là giao điểm PC và MN, GNCM là hình bình hành nên J là trung điểm MN là JG=JC suy ra PJ là đường trung tuyến của ΔMNP mà PJ=3GJ nên G là trọng tâm ΔMNP.

Bài 8. Cho tam giác ABC, H là trực tâm, I là giao điểm các đường trung trực. K là điểm đối xứng với H qua trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh K đối xứng với A qua I.

HD:

Gọi P là điểm đối xứng với C qua I,M là trung điểm của BC. IM là đường trung bình ΔPBC nên 2IM=PB(1)

Gọi Q là trung điểm AC, IQ vuông góc AC mà IQ là đường trung bình của ΔPAC nên AP vuông góc AC.

Ta có: AP//BH (cùng vuông góc AC); PB//AH (cùng vuông BC) nên BPHA là hình bình hành nên AH=PB (2)

Từ (1)(2)=> 2MI=AH mà MI//AH (cùng vuông BC) nên M là trung điểm HK suy ra I là trung điểm AK.

Bài 9. Cho hình bình hành ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Trên AB lấy điểm E, trên CD lấy điểm F sao cho AE = CF.

a) Chứng minh E đối xứng với F qua O.

b) Từ E dựng Ex // AC cắt BC tại I, dựng Fy // AC cắt AD tại K. Chứng minh rằng: EI = FK; I và K đối xứng với nhau qua O.

HD:

a, ΔAOE=ΔCOF (c.g.c) nên OF=OE (1) và $\widehat{AOE} = \widehat{COF}$ *mà* $\widehat{AOE} + \widehat{EOC} = 180$ *nên* $\widehat{EOC} + \widehat{COF} = 180$ *suy ra O,E,F thẳng hàng (2). Từ (1)(2) suy ra đpcm.*

b, ΔDOF=ΔBOE nên EB=FD; ΔDKF=ΔBIE(g.c.g) nên KF=IE mà KF//IE nên EIFK là hình bình hành. Suy ra K,I đối xứng nhau qua O.

Bài 10. Cho tam giác ABC. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua C, B' là điểm đối xứng với B qua A, C' là điểm đối xứng với C qua B. Gọi BM là trung tuyến của tam giác ABC, B'M' là trung tuyến của tam giác A'B'C'.

a) Chứng minh rằng ABM'M là hình bình hành.

b) Gọi G là giao điểm của BM và B'M'. Chứng minh rằng G là trọng tâm của hai tam giác ABC và tam giác A'B'C'.

HD:

a, Xét ΔCC'A' có M'B là đường trung bình nên M'B//AA' hay M'B//AM (1).

Vì M'B là đường trung bình của ΔCC'A' nên M'B=A'C:2=AC:2 hay M'B=AM (2)

Từ (1)(2) suy ra đpcm.

HÌNH CHỮ NHẬT

1. Định nghĩa

Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.

2. Tính chất

Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

3. Dấu hiệu nhận biết

- *Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.*
- *Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.*
- *Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.*
- *Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.*

4. Áp dụng vào tam giác

- *Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.*
- *Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.*

Dạng 1. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình chữ nhật

Bài 1. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AC, E là điểm đối xứng với H qua I. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của HC, CE. Các đường thẳng AM, AN cắt HE tại G và K.

a) Chứng minh tứ giác AHCE là hình chữ nhật.

b) Chứng minh HG = GK = KE.

HD:

a, AHCE là hình bình hành(hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường) mà AH vuông góc CB nên AHCE là hình chữ nhật.

b, ΔEAC có K là trọng tâm nên EK=2KI, tương tự: GH=2GI mà IE=IH nên HG=GK=KE

Bài 2. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tứ giác EFGH là hình gì?

HD: Dùng tính chất đường trung bình chứng minh EFGH là hình bình hành mà hai cạnh kề vuông góc nên EFGH là hình chữ nhật.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Về phía ngoài tam giác ABC, vẽ hai tam giác vuông cân ADB (DA = DB) và ACE (EA = EC). Gọi M là trung điểm của BC, I là giao điểm của DM với AB, K là giao điểm của EM với AC. Chứng minh:

a) Ba điểm D, A, E thẳng hàng.

b) Tứ giác IAKM là hình chữ nhật.

c) Tam giác DME là tam giác vuông cân.

HD:

a, $\widehat{DAE} = 45^0 + 90^0 + 45^0 = 180^0$.

b, ΔAMB và ΔDAB cân nên DM là trung trực AB, suy ra DM vuông góc AB.

Tương tự: ME vuông góc AC

c, $\widehat{EDM} = \widehat{DEM} = 45^0$

Bài 4. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD, AB < CD). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AD, BD, AC, BC.

a) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

b) Chứng minh tứ giác ABPN là hình thang cân.

c) Tìm một hệ thức liên hệ giữa AB và CD để ABPN là hình chữ nhật.

HD:

c) Ta có: 2MN=AB+DC ⇔ 2(MN+NP+PQ)=AB+CD

Thay NM=AB:2; PQ=AB:2; NP=AB (do ABPN là HCN) ta được DC=3AB.

Bài 5. Cho tam giác ABC. Gọi O là một điểm thuộc miền trong của tam giác, M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OB, OC, AC, AB.

a) Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành.

b) Xác định vị trí của điểm O để tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

HD:

b) O thuộc đường cao AH của ΔABC.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông cân tại C. Trên các cạnh AC, BC lấy lần lượt các điểm P, Q sao cho AP = CQ. Từ điểm P vẽ PM song song với BC (M $\in$ AB).

a) Chứng minh tứ giác PCQM là hình chữ nhật.

b) Gọi I là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng khi P di chuyển trên cạnh AC, Q di chuyển trên cạnh BC thì điểm I di chuyển trên một đoạn thẳng cố định.

HD:

b) Vì I là trung điểm QP nên I là trung điểm CM.

Gọi E và F là trung điểm AC và BC, suy ra :

IE//MA; FI//MB; mà EF//AB suy ra E,F,I thẳng hàng nên I di chuyển trên đường trung bình của ΔABC.

Bài 7. Cho hình chữ nhật ABCD. Nối C với một điểm E bất kỳ trên đường chéo BD. Trên tia đối của tia EC lấy điểm F sao cho EF = EC. Vẽ FH và FK lần lượt vuông góc với AB và AD. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác AHFK là hình chữ nhật.

b) AF song song với BD và KH song song với AC.

c) Ba điểm E, H, K thẳng hàng.

HD:

b, Gọi O là giao AC và DB suy ra EO là đường trung bình của ΔFAC nên EO//FA hay FA//DB.

c, Gọi HK giao FA tại I, vì I là trung điểm AF nên IE là đường trung bình của tam giác AFC suy ra IE//AC , mà HK//AC nên H,K,E thẳng hàng.

Bài 8. Cho tam giác ABC và H là trực tâm. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và CA; D, E, F lần lượt là trung điểm các đoạn HA, HB và HC.

a) Chứng minh rằng các tứ giác MNFD và MEFP là các hình chữ nhật.

b) Để các đoạn MD, ME và DP bằng nhau thì tam giác ABC phải là tam giác gì?

HD:

a, MNFD là hình bình hành mà MD//BH; DF//AC mà BH vuông góc AC nên MD vuông góc DF suy ra MNFD là hình chữ nhật.

b, 2MD=BH; 2EM=HA; 2DP=HC nên MD=ME=DP khi HA=HB=HC suy ra ΔABC là tam giác đều.

Dạng 2. Vận dụng kiến thức hình chữ nhật để giải toán

Bài 1. Tính độ dài trung tuyến ứng với cạnh huyền của một tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng 7cm và 24cm.

HD:

Biết hai cạnh góc vuông, dùng Pytago để tính cạnh huyền , trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền nên trung tuyến $AM = 12,5(cm)$.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A, CH là đường cao (H $\in$ AB). Gọi D là điểm đối xứng với điểm B qua A.

a) Chứng minh tam giác DCB là tam giác vuông.

b) Chứng minh $\widehat{DCA} = \widehat{HCB}$.

HD:

a, Vì A là trung điểm BD mà AB=AC=AD nên ΔDCB vuông tại C(tính chất trung tuyến)

b, $\widehat{DCA} = \widehat{CDA}$ *mà* $\widehat{CDA} = \widehat{HCB}$ *(cùng phụ góc B) nên* $\widehat{DCA} = \widehat{HCB}$.

Bài 3. Cho hình chữ nhật ABCD. Vẽ BH $\perp$ AC (H $\in$ AC). Gọi M, K lần lượt là trung điểm của AH và DC; I, O lần lượt là trung điểm của AB và IC.

a) Chứng minh $IC = KB$ và $MO = \frac{1}{2}IC$.

b) Tính số đo góc $\widehat{BMK}$.

HD

a) IBCK là hình chữ nhật.

MI là đường trung bình tam giác AHB nên MI vuông góc AH,

Tam giác IMC vuông tại M có MO là trung tuyến nên MO=IC:2.

b)Vì MO=IC:2=BK:2 mà O là trung điểm KB nên tam giác BMK vuông (tính chất đường trung tuyến) $\widehat{BMK} = 90$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A. M là điểm bất kì thuộc cạnh BC. Vẽ MD $\perp$ AB, ME $\perp$ AC. O là trung điểm của DE.

a) Chứng minh ba điểm A, O, M thẳng hàng.

b) Khi điểm M di chuyển trên cạnh BC thì điểm O di chuyển trên đường nào?

c) Điểm M ở vị trí nào trên cạnh BC thì AM có độ dài ngắn nhất.

HD:

b) O di chuyển trên đường trung bình của ΔABC

c) M ≡ H (AH ⊥ BC).

Bài 5. Cho hình chữ nhật ABCD, AB = 2AD. Vẽ tia AM (M thuộc cạnh DC) sao cho $\widehat{DAM} = 15^0$. Chứng minh tam giác ABM là tam giác cân.

HD:

Lấy I là trung điểm AB, dựng vào phía trong hình chữ nhật góc $\widehat{IAK} = \widehat{IBK} = 15^0$, suy ra AK=KB

ΔIAK= ΔDAM (cgv-gnk) nên AK=AM mà $\widehat{KAM} = 60^0$ nên ΔAKM đều suy ra $\widehat{AKM} = 60^0$ và MK=KB.

Vì MK=KB mà $\widehat{AKM} = 60^0$; $\widehat{AKB} = 150^0$ suy ra $\widehat{MKB} = 150^0$ hay $\widehat{KMB} = 15^0$.

Suy ra $\widehat{BAM} = \widehat{BMA} = 75^0$

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, AC > AB. AH là đường cao. Trên tia HC lấy HD = HA, đường vuông góc với BC tại D cắt AC ở E .

a) Chứng minh AE = AB.

b) Gọi M trung điểm BE . Tính số đo góc $\widehat{AHM}$.

HD:

a, Kẻ EK vuông AH suy ra EK=HD,

Xét ΔABH và ΔAEK có AH=KE và $\widehat{HAB} = \widehat{KEA}$ (cùng phụ $\widehat{HAE}$) nên ΔABH = ΔAEK (cgv-gnk) suy ra AB=AE.

b, Nối AM, MD. Ta có: AM=MD=BE:2 (tính chất trung tuyến tam giác vuông)

suy ra ΔAHM = ΔDHM (c.c.c) nên $\widehat{AHM} = 45^0$

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A và AC = 3AB. Trên cạnh góc vuông AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho AD = DE = EC. Tính $\widehat{ACB} + \widehat{AEB}$.

HD:

Trên tia đối AB lấy I sao cho AB=AI, vẽ hình chữ nhật AINC.

Ta có: ΔBIM=ΔMNC=ΔEAB nên : $\widehat{BEA} = \widehat{MBI} = \widehat{CMN} = \widehat{MCA}$ và ΔBMC vuông cân.

$\widehat{ACB} + \widehat{AEB} = \widehat{ACB} + \widehat{MCA} = \widehat{BCM} = 45^0$.

Bài 8. Cho hình chữ nhật ABCD. Kẻ AH ⊥ BD. Gọi I là trung điểm của DH. Kẻ đường thẳng vuông góc với AI tại I cắt cạnh BC ở K. Chứng minh K là trung điểm cạnh BC.

HD:

Gọi N là trung điểm AH suy ra IN là đường trung bình của tam giác AHD suy ra IN//AD hay IN//BK(1)

Trong tam giác ABI có NI vuông AB (vì IN//AD); AH vuông IB nên N là trực tâm tam giác hay NB vuông góc AI, suy ra NB//IK (2)

Từ (1)(2) suy ra NBKI là hình bình hành nên KB=IN mà IN=AD:2 (tính chất đường trung bình) hay KB=BC:2 suy ra K là trung điểm BC.

HÌNH THOI

1. Định nghĩa

Hình thoi là một tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

2. Tính chất

Trong hình thoi:

- *Hai đường chéo vuông góc với nhau.*
- *Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi.*

3. Dấu hiệu nhận biết

- *Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.*
- *Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.*
- *Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.*
- *Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.*

Dạng 1. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình thoi

Bài 1. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, AD. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình thoi.

HD: MN//=PQ ; NP//=MQ ; MN=NP (vì AC=BD)

Bài 2. Cho tứ giác ABCD có $\hat{C} = 40, \hat{D} = 80$, , AD=BC. Gọi E, F, M, N lần lượt là trung điểm của AB, DC, DB, AC.

a) Chứng minh tứ giác EMFN là hình thoi.

b) Tính góc $\widehat{MFN}$.

HD: b) $\widehat{MFN} = 60$.

Bài 3. Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Gọi E, F, G, H lần lượt là các giao điểm của các phân giác trong của các tam giác OAB, OBC, ODC, ODA.

a) Chứng minh: ba điểm E, O, G thẳng hàng, ba điểm H, O, F thẳng hàng.

b) Chứng minh các tam giác AEB và CGD bằng nhau.

c) Chứng minh tứ giác EFGH là hình thoi.

HD:

a, Vì $\widehat{AOB}$ và $\widehat{COD}$ là hai góc đối đỉnh mà OE là phân giác góc $\widehat{AOB}$,

OG là phân giác góc $\widehat{COD}$ nên E,O,G thẳng hàng.

Chứng minh tương tự: H, O, F thẳng hàng.

b, ΔAEB=ΔCGD (g.c.g)

c, ΔOEB=ΔOGD (c.g.c) nên OE=OG, tương tự OF=OH nên EFGH là hình bình hành,

mà EG vuông góc HF (phân giác hai góc kề bù) nên EFGH là hình thoi.

Bài 4. Cho tam giác ABC và một điểm M thuộc cạnh BC. Qua M vẽ đường thẳng song song với AB, cắt AC ở E và đường thẳng song song với AC, cắt AB ở F.

a) Chứng minh tứ giác AFME là hình bình hành.

b) Xác định vị trí điểm M trên cạnh BC để tứ giác AFME là hình thoi.

HD:

b) M là chân đường phân giác góc A của ΔABC.

Bài 5. Cho hình bình hành ABCD có AB = 2AD , $\widehat{D} = 70^0$. Vẽ BH ⊥ AD (H ∈ AD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh CD, AB.

a) Chứng minh tứ giác ANMD là hình thoi.

b) Tính góc $\widehat{HMC}$.

HD:

b) $\widehat{HAB} = 70^0$,

Vì ΔHNA cân tại N (tính chất trung tuyến) nên $\widehat{HNA} = 40^0$,

mà $\widehat{ANM} = 70^0$ nên $\widehat{HNM} = 110^0$,

Δ HNM cân tại N (vì HN=NM=AN) nên $\widehat{NMH} = 35^0$, mà $\widehat{NMC} = 70^0$ suy ra $\widehat{HMC} = 105$.

Bài 6. Cho tam giác đều ABC. Gọi H là trực tâm của tam giác, AD là đường cao. Trên cạnh BC lấy điểm M. Từ M vẽ ME ⊥ AB (E ∈ AB) và MF ⊥ AC (F ∈ AC). Gọi I là trung điểm của AM.

a) Chứng minh tứ giác DEIF là hình thoi.

b) Chứng minh các đường thẳng MH, ID, EF đồng quy.

HD:

a, Ta có: EI=ID=IF =AM:2 (tính chất trung tuyến)

$\widehat{EIM} = 2\widehat{EAM}$; $\widehat{MID} = 2\widehat{MAD}$ nên $\widehat{EID} = 2\widehat{EAD} = 60^0$ *nên ΔIED đều,*

chứng minh tương tự ΔIDF đều nên IFDE là hình thoi.

b, EF giao ID tại trung điểm của ID (tính chất hình thoi) (1)

Gọi K là trung điểm AH, IK là đường trung bình của tam giác AMH nên IK//MH

Xét ΔIKD có MH // IK mà H là trung điểm KD nên MH đi qua trung điểm ID (2).

Từ (1)(2) suy ra MH,ID,EF đồng quy.

Bài 7. Cho hình bình hành ABCD, hai đường chéo cắt nhau ở O. Hai đường thẳng d_1 và d_2 cùng đi qua O và vuông góc với nhau. Đường thẳng d_1 cắt các cạnh AB và CD ở M và P. Đường thẳng d_2 cắt các cạnh BC và AD ở N và Q. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình thoi.

HD:

MNPQ là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường) mà MP vuông góc NQ nên MNPQ là hình thoi.

Dạng 2. Vận dụng kiến thức hình thoi để giải toán

Bài 1. Cho hình thoi ABCD có AC = 8cm, BD = 10cm. Tính độ dài của cạnh hình thoi.

HD: $AB = \sqrt{41}\ (cm)$.

Bài 2. Cho hình thoi ABCD có $\hat{A} = 60$. Trên các cạnh AB, BC lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho BM = CN. Chứng minh tam giác MDN là tam giác đều.

HD:

ΔABD đều nên AB=BD=DA, ΔMBD=ΔNCD (c.g.c) nên MD=ND và $\widehat{MDN} = 60^0$.

Bài 3. Cho hình thoi ABCD có $\hat{A} = 60$. Trên AD và CD lấy các điểm M, N sao cho AM + CN = AD. Gọi P là điểm đối xứng của N qua BC, MP cắt BC tại Q. Tứ giác MDCQ là hình gì ?

Bài 4. Cho P là một điểm chuyển động trong tam giác ABC sao cho $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$. Hạ PM ⊥ AB; PN ⊥ AC (M ∈ AB; N ∈ AC). Gọi K, S là hai đỉnh khác của hình thoi KMSN. Chứng minh KS đi qua một điểm cố định.

HD:

Gọi Q, I, R lần lượt là trung điểm BP, BC, PC. Ta có: MQ=IR (cùng bằng BP:2)

QI=NR (cùng bằng PC:2)

ΔBQM cân tại Q nên $2\widehat{QBM} = \widehat{MQN}$; ΔNRC cân tại R nên $2\widehat{RCN} = \widehat{NRM}$ (1)

$\widehat{NQI} = \widehat{QBI} + \widehat{QIB}$;

$\widehat{MRI} = \widehat{MCI} + \widehat{CIR}$; mà $\widehat{QBI} = \widehat{CIR}$; $\widehat{QIB} = \widehat{MCI}$ (đồng vị) (2)

Mà $\widehat{QBM} = \widehat{RCN}$ (3).

Từ (1)(2)(3) suy ra $\widehat{MQI} = \widehat{IRN}$. Suy ra ΔMQI=ΔIRN (c.g.c) nên MI=IN hay I nằm trên trung trực MN. Vậy KS đi qua trung điểm I của BC.

HÌNH VUÔNG

1. Định nghĩa

Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau.

2. Tính chất

Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

3. Dấu hiệu nhận biết

- *Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.*
- *Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.*
- *Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông.*
- *Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.*
- *Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.*
- *Một tứ giác vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi thì tứ giác đó là hình vuông.*

Dạng 1. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình vuông

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Phân giác trong AD của góc A (D ∈ BC). Vẽ DF ⊥ AC, DE ⊥ AB. Chứng minh tứ giác AEDF là hình vuông.

HD:

AEDF là hình chữ nhật mà AD là phân giác góc A nên AEDF là hình vuông.

Bài 2. Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm E, F, G, H sao cho AE = BF = CG = DH. Chứng minh tứ giác EFGH là hình vuông.

HD:

ΔBEF=ΔCFG (2cgv) nên EF=FG và $\widehat{BEF} = \widehat{CFG}$; *mà* $\widehat{BEF} + \widehat{CFG} = 90^0$

nên $\widehat{BFE} + \widehat{CFG} = 90^0$ *hay* $\widehat{EFG} = 90^0$.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, M là một điểm thuộc cạnh BC. Qua M vẽ các đường thẳng song song với AB và AC, chúng cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại E và F.

a) Tứ giác AFME là hình gì?

b) Xác định vị trí điểm M trên cạnh BC để tứ giác AFME là hình vuông.

HD:

a, AFME là hình chữ nhật.

b, Vì AFME là hcn, để AFME là hình vuông thì AM phải là phân giác góc A . Vậy M là chân đường phân giác kẻ từ đỉnh A.

Bài 4. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2AD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE.

a) Tứ giác ADFE là hình gì?

b) Tứ giác EMFN là hình gì?

HD:

a, ADFE là hình vuông.

b, ME=MF=FN=NE nên MFNE là hình thoi mà $\widehat{EMF} = 90^0$ *nên EMFN là hình vuông.*

Bài 5. Cho tam giác ABC. Dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông ABC'D và ACEF. Gọi Q, N lần lượt là giao điểm các đường chéo của ABC'D và ACEF; M, P lần lượt là trung điểm BC và DF. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình vuông.

HD:

ΔABF=ΔADC (c.g.c) nên DC=BF và DC vuông góc BF (1)

MN, QP là đường trung bình của ΔBFC và ΔBFD nên QP//MN//BF và 2QP=2MN=BF (2)

MQ, BN là đường trung bình của ΔBDC và ΔFDC nên QM//PN//DC và 2QM=2PN=DC (3)

Từ (1)(2)(3) suy ra PNMQ là hình vuông.

Dạng 2. Vận dụng kiến thức hình vuông để giải toán

Bài 1. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh các AD, DC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho AE = DF. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của EF, BF.

a) Chứng minh các tam giác ADF và BAE bằng nhau.

b) Chứng minh MN vuông góc với AF.

HD:

a, ΔADF=ΔBAE (2cgv)

b, $\widehat{EBA} = \widehat{FAD}$ *mà* $\widehat{EBA} + \widehat{AEB} = 90^0$ *nên mà* $\widehat{FAD} + \widehat{AEB} = 90^0$

suy ra EB vuông góc AF.(1)

Vì MN là đường trung bình của tam giác FEB nên MN//EM (2). Từ (1)(2) suy ra: MN vuông góc AF.

Bài 2. Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E, trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho AE = CF.

a) Chứng minh tam giác EDF vuông cân.

b) Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh BI = DI.

c) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh O, C, I thẳng hàng.

HD:

a, ΔAED=ΔCFD (2cgv) nên DE=DF và $\widehat{ADE} = \widehat{CDF}$*, mà* $\widehat{ADE} + \widehat{EDC} = 90^0$

Nên $\widehat{CDF} + \widehat{EDC} = 90^0$ *Suy ra:* $\widehat{EDF} = 90^0$.

b, BI=DI=EF:2 (tính chất trung tuyến tam giác vuông).

c, Ta có: OC vuông góc DB (1), ΔBDI cân tại I nên IO vuông góc OB (2).

Từ (1)(2) suy ra O,C,I thẳng hàng.

Bài 3. Cho tam giác ABC, dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông ABC'D và ACEF. Vẽ đường cao AH kéo dài HA gặp DF tại I. Chứng minh rằng DI = IF.

HD:

Dựng hình bình hành AFGD. Xét ΔGDA và ΔCAB có : AC=AF=DG; AB=DA, $\widehat{GDA} = \widehat{CAB}$ *(cùng bù với góc* $\widehat{DAF}$ *) nên ΔGDA = ΔCAB (c.g.c) suy ra* $\widehat{DAG} = \widehat{ABC}$ *(hai góc tương ứng) mà* $\widehat{ABC} + \widehat{HAB} = 90^0$ *nên* $\widehat{DAG} + \widehat{HAB} = 90^0$ *hay G, A, H thẳng hàng, mà AFGD là hình bình hành nên AG cắt DF tại trung điểm I của DF.*

Bài 4. Cho hình bình hành ABCD. Vẽ về phía ngoài hình bình hành, hai hình vuông ABEF và ADGH. Chứng minh:

a) AC = FH và AC ⊥ FH.

b) Tam giác CEG là tam giác vuông cân.

HD:

a, Xét ΔAFH và ΔBAC có: HA=BC; AF=AB; $\hat{B} = \widehat{HAF}$ *(cùng bù với góc* $\widehat{DAB}$ *)*

nên ΔAFH = ΔBAC (c.g.c) nên HF=AC.

Kéo dài AC giao HF tại P. Ta có: $\widehat{PHA} = \widehat{BCA}$ *(cmt) ;* $\widehat{BCA} = \widehat{CAD}$ *(sole trong)*

suy ra $\widehat{PHA} = \widehat{CAD}$ *mà* $\widehat{HAD} = 90^0$ *nên* $\widehat{PAH + PHA} = 90^0$ *hay* $\widehat{HPA} = 90^0$.

b, ΔGDC=ΔCBE nên GC=CE.

$\widehat{ECG} = \widehat{ECB} + \widehat{BCG}$. *Mà* $\widehat{ECB} = \widehat{CGD}$ *nên* $\widehat{ECB} + \widehat{BCG} = \widehat{CGD} + \widehat{BCG} = 90^0$.

(Vì CD vuông góc AD mà AD//BC nên GD vuông góc BC).

Bài 5. Cho đoạn thẳng AB và điểm M thuộc đoạn thẳng đó. Vẽ về một phía của AB, các hình vuông AMCD, BMEF.

a) Chứng minh AE vuông góc với BC.

b) Gọi H là giao điểm của AE và BC. Chứng minh ba điểm D, H, F thẳng hàng.

c) Chứng minh đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên đoạn thẳng cố định AB.

HD: c) DF đi qua K (K = AF ∩ AC)

Bài 6. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh CD lấy điểm M. Tia phân giác của góc $\widehat{ABM}$ cắt AD ở I. Chứng minh rằng: BI ≤ 2 MI.

HD:

Trên tia đối của tia CD lấy điểm J sao cho CJ = AI.

Qua M vẽ đường thẳng song song với BI cắt BJ tại N

Tam giác vuông ABI = Tam giác vuông CBJ => BI = BJ

Mặt khác dễ cm BI vuông góc BJ => MN vuông góc BJ

$\widehat{MBJ} = 90^0 - \widehat{MBI} => 90^0 - \widehat{ABI} = 90^0 - \widehat{CBJ} = \widehat{MJB}$ *=> tam giác MBJ cân tại M*

=> N là trung điểm của BJ

Ta có MI ≥ BN = BJ/2 = BI/2 (vì BIMN là hình thang vuông tại B và N)

Hay BI ≤ 2MI (đpcm)

Bài 7. Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm E thuộc đường chéo AC. Kẻ EF ⊥ AD, EG ⊥ CD.

a) Chứng minh rằng: EB = FG và EB ⊥ FG.

b) Chứng minh rằng: Các đường thẳng BE, AG, CF đồng quy.

HD:

a, ΔEBD cân tại E nên EB=ED. Vì EFDG là hcn nên DE=FG suy ra EB=FG.

Gọi AB giao EG tại H, EB giao FG tại P, ΔHBE=ΔFEG (2cgv) nên $\widehat{HBE} = \widehat{EGF}$.

Mà $\widehat{HBE} + \widehat{HEB} = 90^0$ *nên* $\widehat{EGF} + \widehat{PEG} = 90^0$ *hay* $\widehat{EPG} = 90^0$

Bài 8. Cho tam giác ABC. Vẽ ra phía ngoài tam giác ABC, các hình vuông ABDE và ACFG. Vẽ hình bình hành EAGH. Chứng minh rằng:

a) AH = BC và AH ⊥ BC.

b) Các đường thẳng HA, BF, CD đồng quy.

HD:

a, Xét ΔHEA và ΔCAB có : AC=AG=EH; AB=EA; $\widehat{HEA} = \widehat{CAB}$ *(cùng bù với góc* $\widehat{EAG}$ *)*

nên ΔHEA = ΔCAB (c.g.c) suy ra AH=BC (hai cạnh tương ứng).

b, Gọi AH giao BC tại M. Ta có: $\widehat{EAH} = \widehat{ABM}$ *(cmt) mà* $\widehat{EAH} + \widehat{BAM} = 90^0$

nên $\widehat{ABM} + \widehat{BAM} = 90^0$ *hay AM vuông góc BC.*

DC, BF, AH là ba đường cao của tam giác HBC nên DC, BF, AH đồng quy.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

Bài 1. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Các đường chéo AC, BD của tứ giác ABCD thoả điều kiện gì thì tứ giác EFGH là:

a) Hình chữ nhật.

b) Hình thoi.

c) Hình vuông.

HD:

a, AC ⊥ BD.

b, AC = BD.

c, AC = BD và AC ⊥ BD.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A, trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AC, K là điểm đối xứng của điểm M qua điểm I.

a) Tứ giác AMCK là hình gì?

b) Tứ giác AKMB là hình gì?

c) Có trường hợp nào của tam giác ABC để tứ giác AKMB là hình thoi.

HD:

a) AMCK là hình chữ nhật

b) AKMB là hình bình hành

c) Không.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Về phía ngoài tam giác, vẽ các hình vuông ABDE, ACGH.

a) Chứng minh tứ giác BCHE là hình thang cân.

b) Vẽ đường cao AK của tam giác ABC. Chứng minh AK, DE, GH đồng quy.

HD: b) Đồng quy tại F với $F = DE \cap GH$.

Bài 4. Cho hình thang cân ABCD với AB // CD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

a) Tứ giác MNPQ là hình gì?

b) Cho biết diện tích tứ giác ABCD bằng $30cm^2$. Tính diện tích tứ giác MNPQ.

HD:

a) MNPQ là hình thoi

b) $S_{MNPQ} = 15cm^2$.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, trung tuyến AM. Gọi D là trung điểm của AB, E là điểm đối xứng của điểm M qua điểm D.

a) Chứng minh điểm E đối xứng với điểm M qua đường thẳng AB.

b) Các tứ giác AEMC, AEBM là hình gì?

c) Cho BC = 4cm. Tính chu vi tứ giác AEBM.

d) Tam giác vuông thoả điều kiện gì thì AEBM là hình vuông.

HD: b) AEMC là hình bình hành, AEBM là hình thoi

c) $P_{AEBM} = 8cm$ *d) ΔABC vuông cân.*

Bài 6. Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm hai đường chéo. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC. Các đường thẳng BM, DN cắt đường chéo AC tại P, Q.

a) Chứng minh AP = PQ = QC.

b) Tứ giác MPNQ là hình gì?

c) Xác định tỉ số $\frac{CA}{CD}$ để MPNQ là hình chữ nhật.

d) Xác định góc $\widehat{ACD}$ để MPNQ là hình thoi.

e) Tam giác ACD thoả mãn điều kiện gì để MPNQ là hình vuông.

HD:

b) MPNQ là hình bình hành nên MP//NQ. Trong ΔAQD có MP//DQ mà MA=MD nên QP=PA. Tương tự: CQ=QP nên AP=PQ=QC.

c)Để MPNQ là hcn thì MN=PQ mà 3MN=AC; PQ=DC nên CA=3CD.

d) Để MPNQ là hình thoi thì MN vuông góc PQ mà MN//DC nên $\widehat{ACD} = 90$

e) ΔACD vuông tại C và CA=3CD.

Bài 7. Cho hình thoi ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Vẽ đường thẳng qua B song song với AC, đường thẳng qua C song song với BD, hai đường thẳng đó cắt nhau ở K.

a) Tứ giác OBKC là hình gì?

b) Chứng minh AB = OK.

c) Tìm điều kiện của hình thoi ABCD để OBKC là hình vuông.

HD:

a) OBKC là hình chữ nhật

c) ABCD là hình vuông.

Bài 8. Cho hình bình hành ABCD có BC = 2AB và $\hat{A} = 60$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC và AD.

a) Tứ giác ECDF là hình gì?

b) Tứ giác ABED là hình gì?

c) Tính số đo của góc $\widehat{AED}$.

HD: a) ECDF là hình thoi

b) ABED là hình thang cân

c) $\widehat{AED} = 90$.

Bài 9. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi O là trung điểm của EF. Qua O vẽ đường thẳng song song với AB, cắt AD và BC theo thứ tự tại M và N.

a) Tứ giác EMFN là hình gì?

b) Hình thang ABCD có thêm điều kiện gì để EMFN là hình thoi.

c) Hình thang ABCD có thêm điều kiện gì để EMFN là hình vuông.

HD:

a) EMFN là hình bình hành

b) ABCD là hình thang cân

c) ABCD là hình thang cân và có hai đường chéo vuông góc

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A với AB = AC = a.

a) Lấy điểm D trên cạnh AC và điểm E trên cạnh AB sao cho AD = AE. Các đường thẳng vuông góc với EC vẽ từ A và D lần lượt cắt cạnh BC ở K và L. Chứng minh BK = KL.

b) Một hình chữ nhật APMN thay đổi có đỉnh P trên cạnh AB, đỉnh N trên cạnh AC và có chu vi luôn bằng $2a$. Điểm M di chuyển trên đường nào?

c) Chứng minh khi hình chữ nhật APMN thay đổi thì đường vuông góc vẽ từ M xuống đường chéo PN luôn đi qua một điểm cố định.

HD:

b) M di chuyển trên cạnh BC

c) HM đi qua điểm I cố định (với ACIB là hình vuông).

Bài 11. Cho hình vuông ABCD. E là điểm trên cạnh DC, F là điểm trên tia đối của tia BC sao cho BF = DE.

a) Chứng minh tam giác AEF vuông cân.

b) Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh I thuộc BD.

c) Lấy điểm K đối xứng với A qua I. Chứng minh tứ giác AEKF là hình vuông.

HD:

a, $\Delta ABF = \Delta ADE$ *(2cgv) nên AF=AE và* $\widehat{DAF} = \widehat{BAE}$

mà $\widehat{DAE} + \widehat{EAB} = 90^0$ *nên* $\widehat{BAF} + \widehat{EAB} = 90^0$ *nên* ΔAEF *vuông cân.*

b, Từ E kẻ EM vuông góc DC (M thuộc BD). Gọi giao điểm BD và EF là I.

Suy ra ΔDEM vuông cân tại E suy ra ME=ED => EM=BF.

ΔEMI=ΔFBI (g.c.g) nên IF=IE.

Vậy trung điểm EF thuộc BD.

c, Tứ giác AEKF là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường) mà ΔAEF vuông cân nên AEKF là hình vuông.

Bài 12. Cho hình bình hành ABCD có AD = 2AB, $\hat{A} = 60^0$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BC và AD.

a) Chứng minh AE ⊥ BF.

b) Chứng minh tứ giác BFDC là hình thang cân.

c) Lấy điểm M đối xứng của A qua B. Chứng minh tứ giác BMCD là hình chữ nhật.

d) Chứng minh ba điểm M, E, D thẳng hàng.

HD:

a, ABEF là hình thoi.

b, BFDC là hình thang có $\hat{B} = \hat{C} = 60^0$.

c, Xét ΔABD có AF=FD=BF nên $\widehat{ABD} = 90^0$ *(tính chất trung tuyến tam giác vuông) (1).*

Vì BM//=DC nên BMCD là hình bình hành (2).

Từ (1)(2) => đpcm.

d, Vì BMCD là hình chữ nhật mà E là trung điểm BC suy ra E là trung điểm MD.

Vậy M, E, D thẳng hàng.

Bài 13. Cho ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi K là giao điểm của AC và DM, L là giao điểm của BP và AC.

a) Tứ giác MNPQ là hình gì?

b) Tứ giác MDPB là hình gì?

c) Chứng minh: AK = KL = LC.

HD:

a, MNPQ là hình bình hành.

b, MDPB là hình bình hành.

c, MK // LB mà M là trung điểm AB suy ra K là trung điểm AL.

Tương tự L là trung điểm KC.

Vậy AK=KL=LC.

Bài 14. Cho hình bình hành ABCD có AB = 2AD. Gọi E, F thứ tự là trung điểm của AB và CD.

a) Các tứ giác AEFD, AECF là hình gì?

b) Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE. Chứng minh rằng tứ giác EMFN là hình chữ nhật.

c) Hình bình hành ABCD nói trên có thêm điều kiện gì để EMFN là hình vuông?

HD:

a, AEFD là hình thoi, AECF là hình bình hành.

b, Vì AEFD và EBCF là hình thoi nên $\widehat{M} = \widehat{N} = 90^0$ *(1).*

Xét ΔDEC có DF=FC=EF nên ΔDEC vuông tại E (2). Từ (1)(2) => đpcm.

c, ABCD là hình chữ nhật.

Bài 15: Cho hình bình hành ABCD có A=120^0, phân giác góc D đi qua trung điểm I của cạnh AB, kẻ AH vuông DC.

a. CMR: AB=2AD.

b. CMR: DI=2AH

c. CMR: AC vuông AD

d. Gọi M là điểm bất kì trên cạnh CD thì trung điểm O của đoạn AM duy chuyển trên đường nào?

HD:

a. *ΔADI cân,*

b. K là giao AH và DI,Gọi P,Q là trung điểm DK và DI, HK=1/2AK, KA=1/2KI.

c. ΔCIB đều nên góc $\widehat{CAI} = 30^0$.

Bài 16: Cho hình bình hành ABCD vẽ các tam giác đều ABE và ADF nằm ngoài hình bình hành. O là giao điểm hai đường chéo.

a. CM: *ΔDFC=ΔBCE*

b. ΔFCE đều

c. M và N là trung điểm AE và AF, tính góc NOM.

HD: a. *ΔDFC=ΔBCE(c.g.c) b. ΔDFC=ΔAFE (góc FAE+DAB=FDC+DAB=240)*

c.MN,NO,MO là đường trung bình nên MO=MN=ON suy ra MON=60

Bài 17: Cho ΔABC vuông A, AC>AB, đường cao AH, K thuộc HC sao cho HK=AH, kẻ Ax//BC, Kt//AH, Ax giao Kt tại E, AC giao KE tại P.

a. AHKE là hình gì?

b. ΔAPB vuông cân.

c. Q là điểm thứ 4 của hình bình hành APQB, I là giao PB và AQ. CM: *ΔAIK cân và* H,I,E thẳng hàng.

d. HE//QK.

Bài 18: Cho tam giác ABC cân tại A, M,N,P là trung điểm AB,AC,BC.CMR:

a. Tứ giác MNCB là hình gì?

b. MP đi qua trung điểm O của BN.

c. AMPN là hinh thoi

d. Tìm điều kiện tam giác ABC để AMPN là hình vuông.

Bài 19: Cho hình thang vuông MNPQ(M=90) có QP=2MN, các cạnh bên kéo dài cắt nhau tại A, gọi B,C là trung điểm MN,PQ.

a. MNCQ la hình gì?

b. CM: MANC là hình bình hành.

c. MN giao PQ tại H, CMR: B,H,C thẳng hàng và CH=2BH

HD:

a. hình CN

b. Dùng tc đường trung bình suy ra M,N là trung điểm

c. H là trong tâm tam giác QAP.

Bài 20: Cho hình vuông ABCD. M là điểm bất kì trên BC, Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa C dựng hình vuông AMHN, qua M vẽ d//AB cắt AH tại E, AH giao DC tại F.

a. CM: BM=ND

b. N,D,C thẳng hàng.

c. EMFN là hình gì?

d. CM: DF+BM=FM và chu vi tam giác FMC không đổi khi M thay đổi.

Bài 21: Cho tam giác ABC vuông A, đường cao AH. Dựng phía ngoài tam giác hình vuông ABDG và ACEF, DG giao EF tại I. CMR:

a. I,A,H thẳng hàng.

b. IH,DC,BE đồng quy.

Bài 22: Cho hình chữ nhật ABCD. M la điểm bất kì trên BC. CMR:

a. $S_{ABCD} = 2S_{AMD}$

b. $Cho\ AB = 3cm, AD = 5cm,$ *Tìm vị trí* M để $S_{MCD} = S_{ABM}$

Bài 23: Cho tam giác ABC vuông A. Gọi D,E,F là trung điểm AB,AC,BC

a. So sánh diện tích ABC và ADEF,

b. Cho AB=6cm, BC=10cm,. Gọi M,N,K là trung điểm DF, CD,DE, Tính diện tích MFNK?

CHƯƠNG II: ĐA GIÁC

1. Định nghĩa

- ***Đa giác lồi*** *là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.*
- ***Đa giác đều*** *là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.*

2. Một số kết quả

- *Tổng các góc của đa giác n cạnh bằng* $(n-2).180^0$.
- *Mỗi góc của đa giác đều n cạnh bằng* $\dfrac{(n-2).180^0}{n}$.
- *Số các đường chéo của đa giác n cạnh bằng* $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

3. Diện tích

- ***Diện tích tam giác*** *bằng nửa tích một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó:* $S = \dfrac{1}{2}a.h$.
- ***Diện tích tam giác vuông*** *bằng nửa tích hai cạnh góc vuông:* $S = \dfrac{1}{2}ab$.
- ***Diện tích hình chữ nhật*** *bằng tích hai kích thước của nó:* $S = ab$.
- ***Diện tích hình vuông*** *bằng bình phương cạnh của nó:* $S = a^2$.
- ***Diện tích hình thang*** *bằng nửa tích của tổng hai đáy với chiều cao:* $S = \dfrac{1}{2}(a+b)h$.

- ***Diện tích hình bình hành*** *bằng tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó:* $S = ah$.

- ***Diện tích hình thoi*** *bằng nửa tích hai đường chéo:* $S = \frac{1}{2}d_1d_2$.

Bài 1. Cho hình thoi ABCD có $\hat{A} = 60$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh đa giác EBFGDH là lục giác đều.

HD: ΔAHE đều, góc H=E=B=F=G=D=120^0, HE=EB=.....

Bài 2. Cho tam giác ABC đều, O là trọng tâm của tam giác. Gọi E, F, G lần lượt là các điểm đối xứng với điểm O qua trung điểm của AB, BC, AC. Chứng minh lục giác AEBFCG là lục giác đều.

Bài 3. Cho ngũ giác ABCDE có các cạnh bằng nhau và $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$.

a) Chứng minh tứ giác ABCD là hình thang cân.

b) Chứng minh ngũ giác ABCDEF là ngũ giác đều.

Bài 4. Cho ngũ giác đều ABCDE. Gọi K là giao điểm của hai đường chéo AC và BE.

a) Tính số đo mỗi góc của ngũ giác.

b) Chứng minh CKED là hình thoi.

Bài 5. Cho hình chữ nhật ABCD. E là điểm bất kì nằm trên đường chéo AC. Đường thẳng qua E, song song với AD cắt AB, DC lần lượt tại F, G. Đường thẳng qua E, song song với AB cắt AD, BC lần lượt tại H, K. Chứng minh hai hình chữ nhật EFBK và EGDH có cùng diện tích.

HD: $\Delta HEA \sim \Delta KEC$ *nên* $\frac{HE}{EK} = \frac{AH}{KC}$

Bài 6. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Vẽ BP ⊥ MN, CQ ⊥ MN (P, Q ∈ MN).

a) Chứng minh tứ giác BPQC là hình chữ nhật.

b) Chứng minh $S_{BPQC} = S_{ABC}$.

HD: a, MN là đường trung bình. b.Kẻ AH vuông BC, AH=2BP

Bài 7. Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh các tứ giác ADCM và ABCN có diện tích bằng nhau.

Bài 8. Cho hình thang vuông ABCD ($\hat{A} = \hat{D} = 90$), AB = 3cm, AD = 4cm và $\widehat{ABC} = 135$. Tính diện tích của hình thang đó.

HD: Kẻ BH vuông CD, ΔBHC vuông cân. $S_{ABCD} = 20cm^2$.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A. Về phía ngoài tam giác, vẽ các hình vuông ABDE, ACFG, BCHI. Chứng minh $S_{BCHI} = S_{ABDE} + S_{ACFG}$.

HD: Dùng Pitago.

Bài 10. Diện tích hình bình hành bằng $24cm^2$. Khoảng cách từ giao điểm của hai đường chéo đến các đường thẳng chứa các cạnh hình bình hành bằng $2cm$ và $3cm$. Tính chu vi của hình bình hành.

HD: $P_{ABCD} = 20cm$.

Bài 11. Cho hình bình hành ABCD. Gọi K, O, E, N là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Các đoạn thẳng AO, BE, CN và DK cắt nhau tại L, M, R, P. Chứng minh $S_{ABCD} = 5.S_{MLPR}$.

Bài 12. Cho tam giác ABC. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BA, BC. Lấy điểm M trên đoạn thẳng EF (M ≠ E, M ≠ F). Chứng minh $S_{AMB} + S_{BMC} = S_{MAC}$.

Bài 13. Cho tam giác ABC cân tại A, điểm M thuộc đáy BC. Gọi BD là đường cao của tam giác ABC; H và K chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC. Chứng minh: $MH + MK = BD$.

Bài 14. Cho hình bình hành ABCD. Gọi K và L là hai điểm thuộc cạnh BC sao cho BK = KL = LC. Tính tỉ số diện tích của:

a) Các tam giác DAC và DCK.

b) Tam giác DAC và tứ giác ADLB.

c) Các tứ giác ABKD và ABLD.

HD: a) $\dfrac{S_{DAC}}{S_{DCK}} = \dfrac{3}{2}$ *b)* $\dfrac{S_{DAC}}{S_{ADLB}} = \dfrac{3}{5}$ *c)* $\dfrac{S_{ABKD}}{S_{ABLD}} = \dfrac{4}{5}$.

Bài 15. Cho tam giác ABC, hai đường trung tuyến AM, BN cắt nhau tại G. Diện tích tam giác AGB bằng $336cm^2$. Tính diện tích tam giác ABC.

HD: $S_{ABC} = 1008cm^2$.

Bài 16. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho BD = 3DA, trên cạnh BC lấy điểm E sao cho BE = 4EC. Gọi F là giao điểm của AE và CD.

a) Chứng minh: FD = FC.

b) Chứng minh: $S_{ABC} = 2S_{AFB}$.

Bài 17. Cho tam giác đều ABC, đường cao AH và điểm M thuộc miền trong của tam giác. Gọi P, Q, R lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M đến BC, AC, AB.

Chứng minh: MP + MQ + MR = AH.

Bài 18. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AB. Từ N kẻ đường thẳng song song với BM cắt đwòng thẳng BC tại D. Biết diện tích tam giác ABC bằng $a(cm^2)$.

a) Tính diện tích hình thang CMND theo *a*.

b) Cho $a = 128cm^2$ và $BC = 32cm$. Tính chiều cao của hình thang CMND.

HD:

a) $S_{CMND} = a(cm^2)$

b) $h = 4(cm)$.

Bài 19. * Cho tứ giác ABCD. Kéo dài AB một đoạn BM = AB, kéo dài BC một đoạn CN = BC, kéo dài CD một đoạn DP = CD và kéo dài DA một đoạn AQ = DA. Chứng minh $S_{MNPQ} = 5.S_{ABCD}$

HD:

Từ $S_{PDQ} = 2S_{DAC}$, $S_{MNB} = 2S_{ABC}$, $S_{QAM} = 2S_{DAB}$, $S_{PNC} = 2S_{DBC}$ $\Rightarrow$ *đpcm.*

Bài 20. * Cho tam giác ABC với BC = *a*, CA = *b*, AB = *c* và ba đường cao ứng với ba cạnh lần lượt có độ dài h_a, h_b, h_c. Gọi *r* là khoảng cách từ giao điểm của ba đường phân giác của tam giác đến một cạnh của tam giác. Chứng minh $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$.

Bài 21. * Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác sao cho các đường thẳng AM, BN, CP đồng quy tại điểm O. Chứng minh

Chứng minh: $\frac{AP}{PB}.\frac{BM}{MC}.\frac{CN}{NA}=1$.

HD:

Từ $\frac{S_{ACP}}{S_{BCP}}=\frac{S_{AOP}}{S_{BOP}}=\frac{AP}{PB}\Rightarrow\frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}=\frac{AP}{PB}$ *(1). Tương tự* $\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}=\frac{BM}{MC}$ *(2),* $\frac{S_{BOC}}{S_{AOB}}=\frac{CN}{NA}$ *(3)*

Nhân (1), (2), (3), vế theo vế, ta được đpcm.

Bài 22. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, P, N, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, AD; O là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh:

a) $S_{AOQ}+S_{BOP}=S_{MPQ}$.

b) $S_{AOD}+S_{BOC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

HD: Vẽ AA′, BB′, MM′ vuông góc với PQ.

Bài 23. Cho tứ giác ABCD. Qua điểm B vẽ đường thẳng song song với đường chéo AC. Đường thẳng đó cắt cạnh DC ở E. Chứng minh: $S_{ADE}=S_{ABCD}$.

HD: Chú ý: $S_{BAC}=S_{EAC}$.

Bài 24. Cho tứ giác ABCD có AC = 10cm, BD = 12cm. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Biết $\widehat{AOB}=30$. Tính diện tích tứ giác ABCD.

HD: $S_{ABCD}=30cm^2$.

Bài 25. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD). Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

a) Tứ giác IJKL là hình gì?

b) Cho biết diện tích hình thang ABCD bằng $20cm^2$. Tính diện tích tứ giác IJKL.

HD: a) IJKL là hình thoi *b)* $S_{IJKL}=10cm^2$.

Bài 26. Cho hình bình hành ABCD. Vẽ phân giác AM của góc A (M $\in$ CD), phân giác CN của góc C (N $\in$ AB). Các phân giác AM, CN lần lượt cắt BD tại E và F. Chứng minh diện tích hai tứ giác AEFN và CFEM bằng nhau.

HD:

AEFN và CFEM là hai hình thang có các cạnh đáy tương ứng bằng nhau và cùng chiều cao nên có diện tích bằng nhau.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

Bài 1. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 12 cm, AD = 6,8 cm. Gọi H, I, E, K là các trung điểm tương ứng của BC, HC, DC, EC.

a) Tính diện tích tam giác DBE.

b) Tính diện tích tứ giác EHIK.

HD: a) $S_{DBE} = 20,4\,cm^2$.

Bài 2. Cho hình vuông ABCD có tâm đối xứng O, cạnh *a*. Một góc vuông xOy có tia Ox cắt cạnh AB tại E, tia Oy cắt cạnh BC tại F. Tính diện tích tứ giác OEBF

HD: $S_{OEBF} = S_{AOB} = \dfrac{a^2}{4}$.

Bài 3. Tính diện tích một hình thang vuông, biết hai đáy có độ dài 6 cm và 9 cm, góc tạo bởi cạnh bên và đáy lớn có số đo bằng 45^0.

HD: $S_{ABCD} = 22,5\,cm^2$.

Bài 4. Cho hình thang ABCD có độ dài hai đáy AB = 5cm, CD = 15cm, độ dài hai đường chéo AC = 16cm, BD = 12cm. Từ A vẽ đường thẳng song song với BD, cắt CD tại E.

a) Chứng minh tam giác ACE là tam giác vuông.

b) Tính diện tích hình thang ABCD.

HD: b) $S_{ABCD} = 96\,cm^2$.

Bài 5. Gọi O là điểm nằm trong hình bình hành ABCD. Chứng minh: $S_{ABO} + S_{CDO} = S_{BCO} + S_{DAO}$

HD: $S_{ABO} + S_{CDO} = S_{BCO} + S_{DAO} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Bài 6. Cho hình chữ nhật ABCD, O là điểm nằm trong hình chữ nhật, $AB = a,\ AD = b$. Tính tổng diện tích các tam giác OAB và OCD theo *a* và *b*.

HD: $S_{OAB} + S_{ODC} = \frac{1}{2} AB.AD = \frac{1}{2} ab$.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Trên cạnh AC, lấy điểm N sao cho AN = 2NC. Gọi I là giao điểm của BN và CM. Chứng minh:

a) $S_{BIC} = S_{AIC}$. b) $BI = 3IN$.

HD:

a, $S_{CMB} = S_{CMA}$ *mà* $S_{IMB} = S_{IMA}$ *nên* $S_{CIB} = S_{CIA}$.

b, Vì $S_{AIC} = 3S_{INC}$ *nên* $S_{BIC} = 3S_{INC}$ *suy ra BI=3IN.*

Bài 8. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC. Chứng minh $S_{ABNM} = \frac{3}{4} S_{ABC}$.

HD: Từ $S_{ABM} = \frac{1}{2} S_{ABC},\ S_{BMN} = \frac{1}{4} S_{ABC} \Rightarrow$ *đpcm.*

Bài 9. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi E, F là hai điểm lần lượt trên hai cạnh AB và DC sao cho AE = CF; I là điểm trên cạnh AD; IB và IC lần lượt cắt EF tại M và N.

Chứng minh: $S_{IMN} = S_{MEB} + S_{NFC}$.

HD: Từ $S_{BEFC} = S_{IBC} = S_{DBC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \Rightarrow$ *đpcm.*

Bài 10. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng ta luôn vẽ được một tam giác mà diện tích của nó bằng diện tích tứ giác ABCD.

HD: Qua B, vẽ đường thẳng song song với AC, cắt DC tại E. Suy ra được $S_{ADE} = S_{ABCD}$

Bài 11. Cho tam giác ABC và điểm D trên cạnh BC. Hãy chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau bởi một đường thẳng đi qua D.

HD: Xét hai trường hợp:

– Nếu D là trung điểm của BC thì AD là đường thẳng cần tìm.

– Nếu D không là trung điểm của BC. Gọi I là trung điểm BC, vẽ IH // AD (H $\in$ *AB).*

Từ $S_{ADH} = S_{ADI} \Rightarrow$ *DH là đường thẳng cần tìm.*

Bài 12. Cho tam giác ABC có BC = *a*, đường cao AH = *h*. Từ điểm I trên đường cáo AH, vẽ đường thẳng song song với BC, cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại M và N. Vẽ MQ, NP vuông góc với BC. Đặt AI = *x*.

a) Tính diện tích tứ giác MNPQ theo *a*, *h*, *x*.

b) Xác định vị trí điểm I trên AH để diện tích tứ giác MNPQ lớn nhất.

HD: a) $S_{MNPQ} = \dfrac{ax(h-x)}{h}$ *b)* $\max S = \dfrac{ah}{4}$ *khi* $x = \dfrac{h}{2}$ $\Rightarrow$ *I là trung điểm của AH.*

Bài 13. Cho tam giác ABC và ba đường trung tuyến AM, BN, CP. Chứng minh rằng sáu tam giác tạo thành trong tam giác ABC có diện tích bằng nhau.

Bài 14. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Một đường thẳng song song với hai đáy cắt AD ở E, MN ở I, BC ở F. Chứng minh IE = IF.

HD: Từ $S_{AMND} = S_{BMNC}, S_{EAM} = S_{FBM}, S_{EDN} = S_{FCN} \Rightarrow S_{EMN} = S_{FMN} \Rightarrow EK = FH$

$\Rightarrow \Delta EKI = \Delta FHI \Rightarrow EI = FI.$

Bài 15. Cho tứ giác ABCD. Qua trung điểm K của đường chéo BD, vẽ đường thẳng song song với đường chéo AC, cắt AD tại E. Chứng minh CE chia tứ giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.

HD: Xét các trường hợp:

a) E thuộc đoạn AD b) AC qua trung điểm K của BD c) E nằm ngoài đoạn thẳng AD.

Bài 16. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AC lấy các điểm M, N sao cho AM = MN = NC. Đường thẳng qua M, song song với AB, cắt đường thẳng qua N song song với BC tại O. Chứng minh OA, OB, OC chia tam giác ABC thành ba phần có diện tích bằng nhau.

Bài 17. * Cho ngũ giác ABCDE. Hãy vẽ một tam giác có diện tích bằng diện tích ngũ giác ABCDE.

HD: Vẽ BH // AC (H $\in$ *DC), EI // AD (I* $\in$ *DC)* $\Rightarrow S_{ABCDE} = S_{AIH}$.

CHƯƠNG III: TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

I. ĐỊNH LÍ TA-LÉT TRONG TAM GIÁC – TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

1. Tỉ số của hai đoạn thẳng

- *Tỉ số của hai đoạn thẳng là tỉ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.*
- *Tỉ số của hai đoạn thẳng không phụ thuộc vào cách chọn đơn vị đo.*

2. Đoạn thẳng tỉ lệ

Hai đoạn thẳng AB và CD là tỉ lệ với hai đoạn thẳng A′B′ và C′D′ nếu có tỉ lệ thức:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'} \quad hay \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{CD}{C'D'}$$

3. Định lí Ta-lét trong tam giác

Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

B'C'//BC thì $\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC};\ \frac{AB'}{BB'}=\frac{AC'}{CC'};\ \frac{AB}{B'B}=\frac{AC}{C'C}$

4. Định lí Ta-lét đảo

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

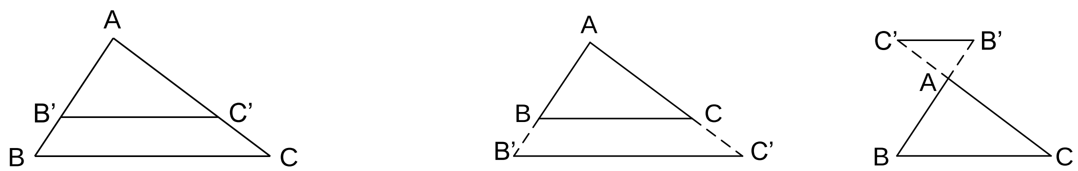
$$\frac{AB'}{B'B}=\frac{AC'}{C'C} => B'C'//BC$$

5. Hệ quả

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

Nếu $B'C'//BC$ *thì* $\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$

Chú ý: *Hệ quả trên vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng song song với một cạnh và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.*



6. Tính chất đường phân giác trong tam giác

Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.

$$AD,\ AE \text{ là các phân giác trong và ngoài của góc } \widehat{BAC} \Rightarrow \frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{EB}{EC}$$

7. Nhắc lại một số tính chất của tỉ lệ thức

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases} ad=bc \\ \dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d} \\ \dfrac{a\pm b}{b}=\dfrac{c\pm d}{d} \\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a-c}{b-d} \end{cases}$$

Dạng 1. Tính độ dài đoạn thẳng

Bài 27. Cho tam giác ABC, G là trọng tâm. Qua G vẽ đường thẳng song song với cạnh AC, cắt các cạnh AB, BC lần lượt ở D và E. Tính độ dài đoạn thẳng DE, biết DA+EC=16cm và chu vi tam giác ABC bằng 75*cm*.

HD: Vẽ DN // BC ⇒ DNCE là hbh ⇒ DE = NC. Và DB=2DA, DE = 18 cm.

Bài 28. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Đường thẳng song song hai đáy cắt cạnh AD tại M, cắt cạnh BC tại N sao cho MD = 3MA.

a) Tính tỉ số $\frac{NB}{NC}$.

b) Cho AB = 8cm, CD = 20cm. Tính MN.

HD:

a) Vẽ AQ // BC, cắt MN tại P ⇒ ABNP, PNCQ là các hbh $\Rightarrow \frac{NB}{NC}=\frac{1}{3}$.

b) Vẽ PE // AD ⇒ MPED là hbh ⇒ MN = 11 cm.

Bài 29. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm B′, C′ sao cho $\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}$. Qua B′ vẽ đường thẳng *a* song song với BC, cắt cạnh AC tại C″.

a) So sánh độ dài các đoạn thẳng AC′ và AC″.

b) Chứng minh B′C′ // BC.

HD:

a) $AC'=AC''$

b) C' *trùng với* $C'' \Rightarrow B'C' // BC$.

Bài 30. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Đường thẳng *a* song song với BC cắt các cạnh AB, AC và đường cao AH lần lượt tại B′, C′, H′.

a) Chứng minh $\frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$.

b) Cho $AH' = \frac{1}{3}AH$ và diện tích tam giác ABC là $67,5cm^2$. Tính diện tích tam giác AB′C′.

HD: b) $S_{AB'C'} = \frac{1}{9}S_{ABC} = 7,5cm^2$.

Bài 31. Cho tam giác ABC. Gọi D là điểm chia cạnh AB thành hai đoạn thẳng có độ dài AD = 13,5cm, DB = 4,5cm. Tính tỉ số các khoảng cách từ các điểm D và B đến cạnh AC.

HD: Vẽ $BM \perp AC, DN \perp AC \Rightarrow \frac{DN}{BM} = 0,75$.

Bài 32. Cho tam giác ABC có BC = 15cm. Trên đường cao AH lấy các điểm I, K sao cho AK = KI = IH. Qua I và K vẽ các đường thẳng EF // BC, MN // BC (E, M $\in$ AB; F, N $\in$ AC).

a) Tính độ dài các đoạn thẳng MN và EF.

b) Tính diện tích tứ giác MNFE, biết rằng diện tích của tam giác ABC là $270cm^2$.

HD:

a) EF = 10 cm, MN = 5cm

b) $S_{MNFE} = \frac{1}{3}S_{ABC} = 90cm^2$.

Bài 33. Cho tứ giác ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Qua điểm I thuộc đoạn OB, vẽ đường thẳng song song với đường chéo AC, cắt các cạnh AB, BC và các tia DA, DC theo thứ tự tại các điểm M, N, P, Q.

a) Chứng minh: $\frac{IM}{OA} = \frac{IB}{OB}$ và $\frac{IM}{IP} = \frac{IB}{ID}.\frac{OD}{OB}$.

b) Chứng minh: $\frac{IM}{IP} = \frac{IN}{IQ}$.

HD: Sử dụng định lí Ta-lét.

Bài 34. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là trung điểm của cạnh AB, F là trung điểm của cạnh CD. Chứng minh rằng hai đoạn thẳng DE và BF chia đường chéo AC thành ba đoạn bằng nhau.

HD:

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của DE và BF với AC. Chứng minh: AM = MN = NC.

Bài 35. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Vẽ đường thẳng song song với cạnh AB, cắt cạnh AD ở M, cắt cạnh BC ở N. Biết rằng $\frac{DM}{MA}=\frac{CN}{NB}=\frac{m}{n}$. Chứng minh rằng: $MN=\frac{mAB+nCD}{m+n}$.

HD:

Gọi E là giao điểm của MN với AC. Tính được $EN=\frac{m}{m+n}AB, ME=\frac{n}{m+n}CD$.

Bài 36. Cho tứ giác ABCD có các góc B và D là góc vuông. Từ một điểm M trên đường chéo AC, vẽ MN ⊥ BC, MP ⊥ AD. Chứng minh: $\frac{MN}{AB}+\frac{MP}{CD}=1$.

HD:

Tính riêng từng tỉ số $\frac{MN}{AB};\frac{MP}{CD}$*, rồi cộng lại.*

Bài 37. Cho hình bình hành ABCD. Một cát tuyến qua D, cắt đường chéo AC ở I và cắt cạnh BC ở N, cắt đường thẳng AB ở M.

a) Chứng minh rằng tích AM.CN không phụ thuộc vào vị trí của cát tuyến qua D.

b) Chứng minh hệ thức: $ID^2=IM.IN$.

HD:

a) $\frac{AM}{DC}=\frac{AI}{IC}=\frac{AD}{CN}$

b) $\frac{IC}{IA}=\frac{ID}{IM}=\frac{IN}{IB}$

Bài 38. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm B′, C′.

Chứng minh: $\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}}=\frac{AB}{AB'}.\frac{AC}{AC'}$.

HD: Vẽ các đường cao CH và C′H′ $\Rightarrow \frac{AC}{AC'}=\frac{CH}{C'H'}$.

Bài 39. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, BC, CD lấy lần lượt các điểm D, E, F sao cho $AD = \frac{1}{4}AB$, $BE = \frac{1}{4}BC$, $CF = \frac{1}{4}CA$. Tính diện tích tam giác DEF, biết rằng diện tích tam giác ABC bằng $a^2(cm^2)$.

HD: $S_{BED} = S_{CEF} = S_{ADF} = \frac{3}{16}S_{ABC} \Rightarrow S_{DEF} = \frac{7}{16}a^2(cm^2)$.

Bài 40. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy điểm K sao cho $\frac{AK}{BK} = \frac{1}{2}$. Trên cạnh BC lấy điểm L sao cho $\frac{CL}{BL} = \frac{2}{1}$. Gọi Q là giao điểm của các đường thẳng AL và CK. Tính diện tích tam giác ABC, biết diện tích tam giác BQC bằng $a^2(cm^2)$.

HD: Vẽ LM // CK. $\frac{S_{BLQ}}{S_{BLA}} = \frac{S_{CLQ}}{S_{CLA}} = \frac{4}{7} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{7}{4}S_{BQC} = \frac{7}{4}a^2(cm^2)$.

Bài 41. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, BC, CA lấy lần lượt các điểm D, E, F sao cho:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CA} = \frac{1}{3}$$

Tính diện tích tam giác tạo thành bởi các đường thẳng AE, BF, CD, biết diện tích tam giác ABC là S.

HD:

Gọi M, P, T lần lượt là giao điểm của AE và CD, AE và BF, BF và CD.

Qua D vẽ DD′// AE. Tính được $\frac{DD'}{ME} = \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{CM}{CD} = \frac{6}{7} \Rightarrow S_{CMA} = \frac{6}{7}S_{CAD} = \frac{2}{7}S_{ABC} = \frac{2}{7}S$.

$S_{MPT} = S_{ABC} - (S_{CMA} + S_{APB} + S_{BTC}) = \frac{1}{7}S$.

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng song song

Bài 1. Cho hình chữ nhật ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm E, F, G, H sao cho $\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD} = \frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD}$.

a) Chứng minh tứ giác EFGH là hình bình hành.

b) Chứng minh hình bình hành EFGH có chu vi không đổi.

HD: b) Gọi I, J là giao điểm của AC với HE và GF $\Rightarrow P_{EFGH} = 2(AI + IJ + JC) = 2AC$.

Bài 2. Cho hình thang ABCD (AB // CD), M là trung điểm của CD. Gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của BM và AC.

a) Chứng minh IK // AB.

b) Đường thẳng IK cắt AD, BC lần lượt ở E và F. Chứng minh EI = IK = KF.

HD: a) Chứng minh $\frac{MI}{IA}=\frac{MK}{KB}\Rightarrow IK \,//\, AB$.

Bài 3. Cho hình thang ABCD có đáy nhỏ CD. Từ D, vẽ đường thẳng song song với cạnh BC, cắt AC tại M và AB tại K. Từ C, vẽ đường thẳng song song với cạnh bên AD, cắt cạnh đáy AB tại F. Qua F, vẽ đường thẳng song song với đường chéo AC, cắt cạnh bên BC tại P. Chứng minh rằng:

a) MP song song với AB.

b) Ba đường thẳng MP, CF, DB đồng quy.

HD: b) Gọi I là giao điểm của DB với CF. Chứng minh P, I, M thẳng hàng.

Bài 4. Cho tứ giác ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Đường thẳng song song với BC qua O, cắt AB ở E và đường thẳng song song với CD qua O, cắt AD ở F.

a) Chứng minh đường thẳng EF song song với đường chéo BD.

b) Từ O vẽ các đường thẳng song song với AB và AD, cắt BC và DC lần lượt tại G và H. Chứng minh hệ thức: CG.DH = BG.CH.

HD: a) Chứng minh $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AD}$ *b) Dùng kết quả câu a) cho đoạn GH.*

Dạng 3. Tính chất đường phân giác của tam giác

Bài 1. Cho tam giác ABC cân ở A, BC = 8cm, phân giác của góc B cắt đường cao AH ở K, $\frac{AK}{AH}=\frac{3}{5}$.

a) Tính độ dài AB.

b) Đường thẳng vuông góc với BK cắt AH ở E. Tính EH.

HD:

a) AB = 6cm b) EH = 8,94 cm.

Bài 2. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh AB = *m*, AC = *n*; AD là đường phân giác trong của góc A. Tính tỉ số diện tích của tam giác ABD và tam giác ACD.

HD: $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{m}{n}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân ở A, phân giác trong BD, BC = 10cm, AB = 15cm.

a) Tính AD, DC.

b) Đường phân giác ngoài của góc B của tam giác ABC cắt đường thẳng AC tại D′. Tính D′C.

HD:

a) DA = 9cm, DC = 6cm

b) D′C = 10cm.

Bài 4. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM và đường phân giác trong AD.

a) Tính diện tích tam giác ADM, biết AB = m, AC = n ($n > m$) và diện tích ΔABC bằng S.

b) Cho n = 7cm, m = 3cm. Diện tích tam giác ADM chiếm bao nhiêu phần trăm diện tích tam giác ABC?

HD:

a) $S_{ADM} = \dfrac{n-m}{2(m+n)} S_{ABC}$

b) $S_{ADM} = 20\% S_{ABC}$.

Bài 5. Cho tam giác ABC có AB = 5cm, AC = 6cm, BC = 7cm. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, O là giao điểm của hai đường phân giác BD, AE.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AD.

b) Chứng minh OG // AC.

HD:

a) $AD = 2,5cm$

b) OG // DM ⇒ OG // AC.

Bài 6. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM, đường phân giác của góc $\widehat{AMB}$ cắt AB ở D, đường phân giác của góc $\widehat{AMC}$ cắt cạnh AC ở E. Chứng minh DE // BC.

HD: $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{EA}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$.

Bài 7. Cho tam giác ABC (AB < AC), AD là phân giác trong của góc A. Qua trung điểm E của cạnh BC, vẽ đường thẳng song song với AD, cắt cạnh AC tại F, cắt đường thẳng AB tại G. Chứng minh CF = BG.

HD: $\dfrac{BG}{CF} = \dfrac{BE.CD.BA}{BD.CE.AC} = \dfrac{CD.AB}{BD.AC} = 1$.

Bài 8. Cho tam giác ABC và ba đường phân giác AM, BN, CP cắt nhau tại O. Ba cạnh AB, BC, CA tỉ lệ với 4, 7, 5.

a) Tính MC, biết BC = 18cm.

b) Tính AC, biết NC – NA = 3cm.

c) Tính tỉ số $\dfrac{OP}{OC}$.

d) Chứng minh: $\dfrac{MB}{MC}.\dfrac{NC}{NA}.\dfrac{PA}{PB} = 1$.

e) Chứng minh: $\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{BN} + \dfrac{1}{CP} > \dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{CA} + \dfrac{1}{AB}$.

HD:

a) MC = 10cm

b) AC = 11cm

c) $\dfrac{OP}{OC} = \dfrac{1}{3}$

e) Vẽ BD // AM $\Rightarrow BD < 2AB \Rightarrow AM < \dfrac{2AC.AB}{AC + AB} \Rightarrow \dfrac{1}{AM} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}\right)$.

Tương tự: $\dfrac{1}{BN} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{BC}\right)$, $\dfrac{1}{CP} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{BC}\right) \Rightarrow$ *đpcm.*

Bài 9. Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Đường phân giác của góc AIB cắt cạnh AB ở M. Đường phân giác của góc AIC cắt cạnh AC ở N.

a) Chứng minh rằng MM // BC.

b) Tam giác ABC phải thoả điều kiện gì để có MN = AI?

c) Tam giác ABC phải thoả điều kiện gì để có MN ⊥ AI?

HD:

a) Chứng minh $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{AN}{CN}$.

Bài 10. Cho hình thang cân ABCD, đáy lớn DC, góc $\widehat{D} = 60$. Đường phân giác của góc D cắt đường chéo AC tại I, chia AC thành hai đoạn theo tỉ số $\dfrac{4}{11}$ và cắt đáy AB tại M. Tính các cạnh đáy AB, DC, biết MA – MB = 6cm.

HD:

Chứng minh $DC = AB + AD \Rightarrow DC = AB + AM \Rightarrow \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow DC = 66cm,\ AB = 42cm.$

Bài 11. Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng cắt AB ở E, AD ở F và cắt đường chéo AC ở G. Chứng minh hệ thức: $\dfrac{AB}{AE} + \dfrac{AD}{AF} = \dfrac{AC}{AG}$.

HD: Vẽ DM // EF, BN // EF. Áp dụng định lí Ta-lét vào các tam giác ADM, ABN.

Bài 12. Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh AB lấy một điểm M và trên cạnh CD lấy một điểm N sao cho DN = BM. Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, DB, AC đồng quy.

TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

1. Khái niệm hai tam giác đồng dạng

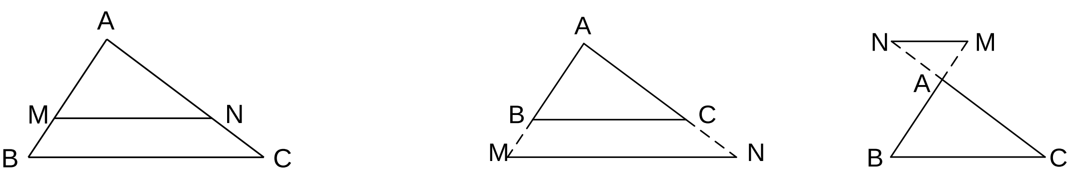
a) Định nghĩa: *Tam giác A'B'C' gọi là đồng dạng với tam giác ABC nếu:*

$$\hat{A} = \widehat{A'};\ \hat{B} = \widehat{B'};\ \hat{C} = \widehat{C'};\ \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$$

Chú ý: *Khi viết kí hiệu hai tam giác đồng dạng, ta phải viết theo đúng thứ tự các cặp đỉnh tương ứng:* $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.

b) Định lí: *Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với hai cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.*

Chú ý: *Định lí trên cũng đúng trong trường hợp đường thẳng a cắt phần kéo dài hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại.*



2. Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác

Trường hợp 1: *Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.*

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} \Rightarrow \Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$$

Trường hợp 2: *Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai* *góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.*

$\hat{A} = \hat{A}'; \frac{A'B'}{AB} = \frac{C'A'}{CA} \Rightarrow \Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$

Trường hợp 3: *Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.*

$\hat{A} = \hat{A}'; \hat{B} = \hat{B}'; \Rightarrow \Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$

3. Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông

Trường hợp 1: *Nếu tam giác vuông này có **một góc nhọn** bằng **góc nhọn** của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.*

Trường hợp 2: *Nếu tam giác vuông này có **hai cạnh góc vuông** tỉ lệ với **hai cạnh góc vuông** của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.*

Trường hợp 3: *Nếu **cạnh huyền và một cạnh góc vuông** của tam giác vuông này tỉ lệ với **cạnh huyền và cạnh góc vuông** của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.*

4. Tính chất của hai tam giác đồng dạng

Nếu hai tam giác đồng dạng với nhau thì:

- *Tỉ số hai đường cao tương ứng bằng tỉ số đồng dạng.*
- *Tỉ số hai đường phân giác tương ứng bằng tỉ số đồng dạng.*
- *Tỉ số hai đường trung tuyến tương ứng bằng tỉ số đồng dạng.*
- *Tỉ số các chu vi bằng tỉ số đồng dạng.*
- *Tỉ số các diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng.*

Dạng 1. Sử dụng tam giác đồng dạng để tính toán

Bài 1. Cho tam giác A′B′C′ đòng dạng với tam giác ABC theo tỉ số *k*.

a) Tính tỉ số chu vi của hai tam giác.

b) Cho $k = \frac{3}{5}$ và hiệu chu vi của hai tam giác là 40*dm*. Tính chu vi của mỗi tam giác.

HD: a) $\frac{P'}{P} = k$ *b)* $P' = 60(dm), P = 100(dm)$.

Bài 2. Cho tam giác A′B′C′ đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số $k = \frac{4}{3}$. Tính chu vi của tam giác ABC, biết chu vi của tam giác A′B′C′ bằng 27*cm*.

HD: $P = 20,25(cm)$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là AB = 3cm, AC = 5cm, BC = 7cm. Tam giác A′B′C′ đồng dạng với tam giác ABC và có chu vi bằng 75cm. Tính độ dài các cạnh của ΔA′B′C′.

HD: $A'B' = 15cm,\ B'C' = 25cm,\ A'C' = 35cm$.

Bài 4. Cho tam giác ABC và các đường cao BH, CK.

a) Chứng minh ΔABH ∽ ΔACK.

b) Cho $\widehat{ACB} = 40$. Tính $\widehat{AKH}$.

HD: b) $\widehat{AKH} = \widehat{ACB}$.

Bài 5. Cho hình vuông ABCD. Trên hai cạnh AB, BC lấy hai điểm P và Q sao cho BP = BQ. Gọi H là hình chiếu của B trên đường thẳng CP.

a) Chứng minh ΔBHP ∽ ΔCHB.

b) Chứng minh: $\dfrac{BH}{BQ} = \dfrac{CH}{CD}$.

c) Chứng minh ΔCHD ∽ ΔBHQ. Từ đó suy ra $\widehat{DHQ} = 90$.

HD: c) Chứng minh $\widehat{DHQ} = \widehat{CHD} + \widehat{CHQ} = \widehat{BHQ} + \widehat{CHQ} = \widehat{BHC}$.

Bài 6. Hai tam giác ABC và DEF có $\hat{A} = \hat{D};\ \hat{B} = \hat{E}$, AB = 8$cm$, BC = 10$cm$, DE = 6$cm$.

a) Tính độ dài các cạnh AC, DF, EF, biết rằng cạnh AC dài hơn cạnh DF là 3cm.

b) Cho diện tích tam giác ABC bằng $39{,}69cm^2$. Tính diện tích tam giác DEF.

HD: a) ΔABC ∽ ΔDEF ⇒ EF = 7,5cm, DF = 9cm, AC = 12cm b) $S_{DEF} = 22{,}33(cm^2)$.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, BH = 4cm, CH = 9cm. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC.

a) Chứng minh ΔAKI ∽ ΔABC.

b) Tính diện tích tam giác ABC.

c) Tính diện tích của tứ giác AKHI.

HD: b) $S_{ABC} = 39cm^2$ *c)* $S_{AKHI} = \dfrac{216}{13}cm^2$.

Bài 8. Cho tam giác ABC, có $\hat{A} = 90 + \hat{B}$, đường cao CH. Chứng minh:

a. $\widehat{CBA} = \widehat{ACH}$

b. $CH^2 = BH.AH$

Bài 9. Cho tam giác ABC, hai trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G. Tính diệnt ích tam giác GMN, biết diện tích tam giác ABC bằng S.

HD: $S_{GMN} = \dfrac{S}{12}$.

Bài 10. Cho hình vuông ABCD, cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng với C qua D, EB cắt AD tại I. Trên EB lấy điểm M sao cho DM = DA.

a) Chứng minh ΔEMC ∽ ΔECB. b) Chứng minh EB.MC = $2a^2$.

c) Tính diện tích tam giác EMC theo a.

HD: c) $S_{EMC} = \frac{4}{5}a^2$.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh AB, lấy điểm M sao cho $2AM = 3MB$. Một đường thẳng qua M, song song với BC, cắt AC tại N. Một đường thẳng qua N, song song với AB, cắt BC tại D.

a) Chứng minh ΔAMN ∽ Δ NDC.

b) Cho AN = 8*cm*, BM = 4*cm*. Tính diện tích các tam giác AMN, ABC và NDC.

HD:

b) $S_{AMN} = 24cm^2$, $S_{ABC} = \frac{200}{3}cm^2$, $S_{NDC} = \frac{32}{3}cm^2$.

Dạng 2. Chứng minh hai tam giác đồng dạng

Bài 1. Cho tam giác ABC. Gọi A′, B′, C′ lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA.

a) Chứng minh ΔA′B′C′ ∽ ΔCAB.

b) Tính chu vi của ΔA′B′C′, biết chu vi của ΔABC bằng 54*cm*.

HD: b) $P' = 27(cm)$.

Bài 2. Cho tam giác ABC, G là trọng tâm của tam giác. Gọi E, F, H lần lượt là trung điểm của AG, BG, CG. Chứng minh các tam giác EFH và ABC đồng dạng với nhau và G là trọng tâm của tam giác EFH.

HD: Sử dụng tính chất đường trung bình và trọng tâm tam giác.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho AM, BN, CP đồng quy tại O. Qua A và C vẽ các đường thẳng song song với BO cắt CO, OA lần lượt ở E và F.

a) Chứng minh: ΔFCM ∽ ΔOMB và ΔPAE ∽ ΔPBO.

b) Chứng minh: $\frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA}.\frac{PA}{PB} = 1$.

HD: b) Sử dụng định lí Ta-lét và tam giác đồng dạng.

Bài 4. Cho tam giác ABC có AB = 15*cm*, AC = 20*cm*. Trên hai cạnh AB, AC lần lượt lấy 2 điểm D, E sao cho AD = 8*cm*, AE = 6*cm*.

a) Chứng minh ΔAED ∽ ΔABC.

b) Tính chu vi của tam giác ADE, khi biết BC = 25*cm*.

c) Tính góc ADE, biết $\hat{C} = 20$.

HD: b) $P_{ADE} = 24(cm)$ *c)* $\widehat{ADE} = 20$.

Bài 5. Cho góc xOy . Trên cạnh Ox, lấy 2 điểm A, B sao cho OA = 5*cm*, OB = 16*cm*. Trên cạnh Oy, lấy 2 điểm C, D sao cho OC = 8*cm*, OD = 10*cm*.

a) Chứng minh: ΔOCB ∽ ΔOAD.

b) Gọi I là giao điểm của AD và BC. Chứng minh $\widehat{BAI} = \widehat{DCI}$.

HD:

a) $\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OD} = \frac{8}{5}$ *và* $\hat{O}$ *chung => ΔOCB ∽ ΔOAD*

b) Theo a => $\widehat{OBC} = \widehat{ODA}$ *=> ΔIBA ∽ ΔIDC*

Bài 6. Cho tam giác ABC có các cạnh AB = 24*cm*, AC = 28*cm*. Đường phân giác góc A cắt cạnh BC tại D. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của các điểm B, C trên đường thẳng AD.

a) Tính tỉ số $\frac{BM}{CN}$ b) Chứng minh $\frac{AM}{AN} = \frac{DM}{DN}$.

HD:

a) Chứng minh ΔBDM ∽ ΔCDN $\Rightarrow \frac{BM}{CN} = \frac{6}{7}$

b) Chứng minh ΔABM ∽ ΔCAN.

Bài 7. Cho hình bình hành ABCD. Vẽ CE ⊥ AB và CF ⊥ AD, BH ⊥ AC.

a) Chứng minh ΔABH ∽ ΔACE. b) Chứng minh: $AB.AE + AD.AF = AC^2$.

HD:b) Chứng minh: AB.AE = AC.AH, AD.AF = AC.CH ⇒ đpcm.

Bài 8. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

a) Chứng minh OA.OD = OB.OC.

b) Đường thẳng qua O, vuông góc với AB, CD theo thứ tự tại H, K. Chứng minh $\frac{OH}{OK} = \frac{AB}{CD}$.

HD: a) Chứng minh ΔOAB ∽ ΔOCD.

Bài 9. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi O là giao điểm của ba đường cao AH, BK, CI.

a) Chứng minh OK.OB = OI.OC b) Chứng minh ΔOKI ∽ ΔOCB

c) Chứng minh ΔBOH ∽ ΔBCK d) Chứng minh $BO.BK + CO.CI = BC^2$.

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông ở A, AB = 5,4*cm*, AC = 7,2*cm*.

a) Tính BC.

b) Từ trung điểm M của BC, vẽ đường thẳng vuông góc với BC, cắt đường thẳng AC tại H và cắt đường thẳng AB tại E. Chứng minh ΔEMB ∽ ΔCAB.

c) Tính EB và EM.

d) Chứng minh BH vuông góc với EC.

e) Chứng minh HA.HC = HM.HE.

HD:

a) $BC = 9(cm)$

c) $EM = 6(cm), EB = 7,5(cm)$

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH.

a) Hãy nêu từng cặp các tam giác đồng dạng.

b) Cho AB = 12,45*cm*, AC = 20,50*cm*. Tính độ dài các đoạn thẳng BC, AH, BH, CH.

HD:

b) BC = 23,98cm, AH = 10,64cm, HB = 6,45cm, HC = 17,53cm.

Bài 12. Cho tam giác ABC và đường cao AH, AB = 5*cm*, BH = 3*cm*, $AC = \frac{20}{3}cm$.

a) Tính độ dài AH b) Chứng minh ΔABH ∽ ΔCAH. Từ đó tính $\widehat{BAC}$.

HD:

a) AH = 4cm

b) $\widehat{BAC} = 90$

Bài 13. Cho tứ giác ABCD, có $\widehat{DBC} = 90$, $AD = \sqrt{20}cm$, $AB = 4cm$, $DB = 6cm$, $DC = 9cm$.

a) Tính góc $\widehat{BAD}$ b) Chứng minh ΔBAD ∽ ΔDBC c) Chứng minh DC // AB.

HD: a) $\widehat{BAD} = 90$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 15*cm*, AC = 20*cm*. Tia phân giác của góc A, cắt cạnh BC tại D.

a) Tính $\frac{DB}{DC}$.

b) Đường thẳng qua D, song song với AB, cắt AC tại E. Chứng minh ΔEDC ∽ ΔABC.

c) Tính DE và diện tích của tam giác EDC.

HD: a) $\frac{DB}{DC}=\frac{3}{4}$ *c)* $DE=\frac{60}{7}(cm)$, $S_{EDC}=\frac{2400}{49}(cm^2)$.

Bài 2. Cho tam giác cân ABC, AB = AC = *b*, BC = *a*. Vẽ các đường cao BH, CK.

a) Chứng minh BK = CH b) Chứng minh KH // BC c) Tính độ dài HC và HK.

HD: c) $HC=\frac{a^2}{2b}$, $KH=a-\frac{a^3}{2b^2}$.

Bài 3. Cho tam giác cân ABC (AB = AC), I là trung điểm của BC. Trên các cạnh AB, AC lấy lần lượt các điểm K, H sao cho $BK.CH=BI^2$. Chứng minh:

a) ΔKBI ∽ ΔICH b) ΔKIH ∽ ΔKBI

c) KI là phân giác của góc $\widehat{BKH}$ d) $IH.KB+HC.IK>HK.BI$.

HD: d) Chứng minh $IH.KB+HC.IK=BI(KI+IH)>HK.BI$.

Bài 4. Cho tam giác ABC (AB < AC). Vẽ đường cao AH, đường phân giác trong AD, đường trung tuyến AM.

a) Chứng minh $HD+DM=HM$.

b) Vẽ các đường cao BF, CE. So sánh hai đoạn thẳng BF và CE.

c) Chứng minh ΔAFE ∽ ΔABC.

d) Gọi O là trực tâm của ΔABC. Chứng minh $BO.BF+CO.CE=BC^2$.

HD:

a) $AB<AC\Rightarrow DC>MC$, $\widehat{CAH}>\frac{\hat{A}}{2}$

$\Rightarrow$ *D nằm giữa H và M* $\Rightarrow$ *đpcm.*

b) $BF<CE$

d) $BO.BF=BC.BH$, $CO.CE=BC.CH$

Bài 5. cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, AC lấy lần lượt các điểm D, E sao cho $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$. Đường trung tuyến AI (I $\in$ BC) cắt đoạn thẳng DE tại H. Chứng minh DH = HE.

HD: $\frac{DH}{BI}=\frac{HE}{IC}\Rightarrow$ *đpcm.*

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\hat{C}=30$ và đường phân giác BD (D $\in$ AC).

a) Tính tỉ số $\frac{DA}{CD}$

b) Cho AB = 12,5*cm*. Tính chu vi và diện tích tam giác ABC.

HD:

a) $\frac{DA}{DC}=\frac{1}{2}$

b) BC = 25cm, AC = 21,65cm.

Bài 7. Cho tam giác đều ABC cạnh *a*, M là trung điểm của BC. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $\widehat{DME}=60$.

a) Chứng minh $BD.CE=\frac{a^2}{4}$.

b) Chứng minh ΔMBD ∽ ΔEMD và ΔECM ∽ ΔEMD.∽

c) Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng DE.

HD:

c) Vẽ $MH\perp DE$, $MK\perp EC\Rightarrow MH=MK$; $MK=\sqrt{MC^2-CK^2}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A, $\hat{A}=20$, AB = AC = *b*, BC = *a*. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{DBC}$.

a) Chứng minh ΔBDC ∽ ΔABC.

b) Vẽ AE vuông góc với BD tại E. Tính độ dài các đoạn thẳng AD, DE, AE.

c) Chứng minh $a^3+b^3=3ab^2$.

HD:

b) $AE=\frac{b\sqrt{3}}{2}$, $DE=\frac{b}{2}-a$, $AD=b-\frac{a^2}{b}$

c) $AD^2=DE^2+AE^2\Rightarrow$ *đpcm.*

Bài 9. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM, K là điểm trên AM sao cho AM = 3AK, BK cắt AC tại N, P là trung điểm của NC.

a) Tính tỉ số diện tích của các tam giác ANK và AMP.

b) Cho biết diện tích ΔABC bằng S. tính diện tích tam giác ANK.

c) Một đường thẳng qua K cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại I và J. Chứng minh $\frac{AB}{AI}+\frac{AC}{AJ}=6$.

HD:

a) $\frac{S_{ANK}}{S_{AMP}}=\frac{1}{9}$

b) $S_{AMP}=\frac{3}{5}S_{AMC};S_{AMC}=\frac{1}{2}S_{ABC}\Rightarrow S_{ANK}=\frac{S}{30}$.

c) *Vẽ BE // IJ, CH // IJ (E, H* $\in$ *AM)* $\Rightarrow$ *ΔEBM = ΔHCM* $\Rightarrow$ *EM = MH;*

$\frac{AB}{AI}=\frac{AE}{AK},\frac{AC}{AJ}=\frac{AH}{AK}\Rightarrow$ *đpcm.*

Bài 10. Cho tam giác ABC. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, AC. O là giao điểm các đường trung trực, H là trực tâm, G là trọng tâm của tam giác ABC.

a) Chứng minh ΔOMN ∽ ΔHAB.

b) So sánh độ dài AH và OM.

c) Chứng minh ΔHAG ∽ ΔOMG.

d) Chứng minh ba điểm H, G, O thẳng hàng và GH = 2GO.

HD:

b) *AH = 2OM*

d) $\widehat{HGO}=\widehat{HGM}+\widehat{MGO}=\widehat{HGM}+\widehat{AGH}=\widehat{MGA}\Rightarrow$ *đpcm.*

Bài 11. Cho tam giác ABC, các đường cao AK và BD cắt nhau tại G. Vẽ các đường trung trực HE, HF của AC và BC. Chứng minh:

a) BG = 2HE b) AG = 2HF.

HD: ΔABG ∽ ΔFEH $\Rightarrow$ *đpcm.*

Bài 12. Cho hình thang vuông ABCD (AB // DC, $\hat{A}=\hat{D}=90$). Đường chéo BD vuông góc với cạnh bên BC. Chứng minh $BD^2=AB.DC$.

HD: Chứng minh ΔABD ∽ ΔBCD.

Bài 13. Cho tam giác cân ABC (AB = AC), O là trung điểm của cạnh đáy BC. Một điểm D di động trên cạnh AB. Trên cạnh AC lấy một điểm E sao cho $CE = \dfrac{OB^2}{BD}$. Chứng minh:

a) Hai tam giác DBO, OCE đồng dạng.

b) Tam giác DOE cũng đồng dạng với hai tam giác trên.

c) DO là phân giác của góc $\widehat{BDE}$, EO là phân giác của góc $\widehat{CED}$.

d) Khoảng cách từ điểm O đến đoạn ED không đổi khi D di động trên AB.

HD: d) Vẽ $OI \perp DE$, $OH \perp AC \Rightarrow OI = OH$.

Bài 14. Cho tam giác ABC, trong đó B,C là các góc nhọn. Các đường cao AA′, BB′, CC′ cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: A′A.A′H = A′B.A′C.

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Giả sử đường thẳng GH song song với cạnh đáy BC. Chứng minh: $A'A^2 = 3A'B.A'C$.

HD:

a) Chứng minh $\Delta BA'H \backsim BB'C$, $\Delta CAA' \backsim \Delta CB'B$

b) $GH // BC \Rightarrow A'H = \dfrac{A'A}{3}$.

Bài 15. Cho hình thang KLMN (KN // LM). gọi E là giao điểm của hai đường chéo. Qua E, vẽ một đường thẳng song song với LM, cắt MN tại F. Chứng minh: $\dfrac{1}{EF} = \dfrac{1}{KN} + \dfrac{1}{LM}$.

HD: Tính các tỉ số $\dfrac{EF}{LM}, \dfrac{EF}{KN}$.

Bài 16. Qua một điểm O tuỳ ý ở trong tam giác ABC, vẽ đường thẳng song song với AB, cắt AC và BC lần lượt tại D và E; đường thẳng song song với AC, cắt AB và BC lần lượt ở F và K; đường thẳng song song với BC, cắt AB và AC lần lượt ở M và N. Chứng minh:

$\dfrac{AF}{AB} + \dfrac{BE}{BC} + \dfrac{CN}{CA} = 1$.

HD: Chứng minh $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{KC}{BC}, \dfrac{CN}{CA} = \dfrac{KE}{BC} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 17. Qua một điểm O tuỳ ý ở trong tam giác ABC, vẽ các đường thẳng AO, BO, CO cắt BC, CA, AB lần lượt tại A′, B′, C′. Chứng minh: $\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}=1$.

HD: Vẽ $AH\perp BC,\ OI\perp BC \Rightarrow \frac{OA'}{AA'}=\frac{OI}{AH};\ \frac{S_{BOC}}{S_{ABC}}=\frac{OI}{AH} \Rightarrow \frac{S_{BOC}}{S_{ABC}}=\frac{OA'}{AA'}$.

Tương tự: $\frac{S_{COA}}{S_{ABC}}=\frac{OB'}{BB'},\ \frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}=\frac{OC'}{CC'} \Rightarrow$ *đpcm.*

Bài 18. Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC, lấy lần lượt các điểm P, Q, R. Chứng minh rằng nếu các đường thẳng AP, BQ, CR đồng quy tại O thì $\frac{PB}{PC}.\frac{QC}{QA}.\frac{RA}{RB}=1$ (*định lí Ceva*).

HD: Qua C và A vẽ các đường thẳng song song với BQ, cắt đường thẳng AP tại E và cắt đường thẳng CR tại D. Chứng minh $\frac{PB}{PC}=\frac{OB}{EC},\ \frac{RA}{RB}=\frac{AD}{OB},\ \frac{QC}{QA}=\frac{EC}{AD} \Rightarrow$ *đpcm.*

Bài 19. Trên các đường thẳng qua các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC, lấy lần lượt các điểm P, Q, R (không trùng với đỉnh nào của tam giác). Chứng minh rằng nếu ba điểm P, Q, R thẳng hàng thì $\frac{PB}{PC}.\frac{QC}{QA}.\frac{RA}{RB}=1$ (*định lí Menelaus*).

HD: Gọi các khoảng cách từ A, B, C đến đường thẳng PQR là m, n, p.

Ta có: $\frac{PB}{PC}=\frac{n}{p},\ \frac{QC}{QA}=\frac{p}{m},\ \frac{RA}{RB}=\frac{m}{n} \Rightarrow$ *đpcm.*

Bài 20: Cho ΔDEG vuông tại D có DE=6cm, DG=8cm, đường cao DH.

a. Chứng minh ΔGED∽ ΔDEH và DE^2=EH.EG.

b. Tính EG, DH.

c. Phân giác góc DEG cắt DG tại K, tính EK.

HD:

a, ΔGED∽ ΔDEH (g.g) nên $\frac{EH}{DE}=\frac{DE}{EG}$

b, Dùng Pytago cho tam giác DEG tính được EG=10cm, Theo a) suy ra : $\frac{EG}{DE}=\frac{DG}{DH}$ *từ đó tính DH=4,8cm.*

c, $\frac{DK}{KG}=\frac{DE}{EG}=\frac{3}{5}$ mà $ED+EG=8cm$ nên $ED=3cm, EG=5cm$. *Dùng Pytago cho tam giác DEK tính được EK=*$\sqrt{45}cm$

Bài 21: Cho hình bình hành MNPQ có E là trung điểm PQ, G là trọng tâm ΔMPQ, F thuộc cạnh MQ sao cho FG//NM.

a. Tính tỉ số $\frac{QE}{FG}$

b. Chứng minh $\Delta QGE \sim \Delta NGM$ và tìm tỉ số đồng dạng

HD:

a, FG//QE nên $\frac{QE}{FG} = \frac{ME}{MG} = \frac{3}{2}$ *(tính chất trọng tâm)*

b, ΔQGE ∽ ΔNGM (g.g) tỉ số đồng dạng k=$\frac{QE}{NM} = \frac{QE}{QP} = \frac{1}{2}$

Bài 22: Cho hình bình hành ABCD, F thuộc BC Tia AF cắt BD và DC ở E và G. CMR:

a. ΔBEF ∽ ΔDEA và ΔDGE ∽ ΔBAE.

b. AE^2=EF.EG.

c. BF.DG không thay đổi.

HD:

a, ΔBEF ∽ ΔDEA (g.g) và ΔDGE ∽ ΔBAE(g.g)

b, Theo a) $\frac{GE}{EA} = \frac{DE}{BE}$ *và* $\frac{BE}{DE} = \frac{EF}{EA}$ *suy ra* $\frac{AE}{GE} = \frac{EF}{EA}$

c, ΔBEF ∽ ΔDEA nên $\frac{BF}{DA} = \frac{BE}{DE}$; *ΔDGE ∽ ΔBAE nên* $\frac{BE}{DE} = \frac{BA}{DG}$ *suy ra* $\frac{BF}{DA} = \frac{BA}{DG}$ *hay BF.DG=AD.AB (không đổi)*

Bài 23: Cho ΔABC nhọn có các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H.

a. Chứng minh AB.AF=AC.AE

b. Chứng minh ΔAEF ∽ ΔABC.

c. Chứng minh $\widehat{BEF} = \widehat{BCF}$.

d. Chứng minh EH là phân giác $\widehat{DEF}$(bằng hai cách)

e. Chứng minh BH.BE+CH.CF=BC^2.

f. Cho AE=3cm, AB=6cm, AH=5cm: Chứng minh dt(ΔABC)=4.dt(ΔAEF); Tính dt(ΔBEC); kẻ HM//AC Tính HM.

g. Chứng minh : $\frac{AF}{FB}.\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA} = 1$.

HD:

a, ΔABE ∽ ΔACF (g..g) nên $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF}$;

b, Xét ΔAEF và ΔABC có $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF}$ và góc A chung nên $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (c.g.c)

c, Vì $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ nên $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ mà $\widehat{AEF} + \widehat{BEF} = \widehat{FCB} + \widehat{ABC}$ nên $\widehat{BEF} = \widehat{BCF}$.

d, Theo câu b) suy ra: $\widehat{AEF} = \hat{B}$; Chứng minh tương tự câu b) suy ra: $\Delta CED \backsim \Delta CBA$

nên $\hat{B} = \widehat{CED} => \widehat{CED} = \widehat{AEF}$ mà $\widehat{CED} + \widehat{DEH} = \widehat{HEF} + \widehat{AEF} = 90^0$ nên $\widehat{DEH} = \widehat{HEF}$.

e, $\Delta BHD \backsim \Delta BCE$ (g.g) nên BH.BE=BD.BC.(1) ; $\Delta CHD \backsim \Delta CBF$ nên CH.CF=BC.CD (2).

cộng 2 vế của (1) và (2) ta được: BH.BE+CH.CF=BC(CD+DB)=BC^2

f, Vì $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$(g.g) theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{AE}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ nên $S_{\Delta AEF} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC}$

- Dùng Pytago cho ΔAEB và ΔEAH tính được EB=$\sqrt{27}$; EH=4cm. Suy ra $S_{\Delta AEB} = AE.EB:2 = \frac{3}{2}\sqrt{27}$.. Vì $\Delta ABE \backsim \Delta HCE$ theo tỉ số k=$\frac{AE}{HE} = \frac{3}{4}$ nên $S_{\Delta EHC} = \frac{27}{32}\sqrt{27}$ suy ra EC=2. $S_{\Delta EHC}$:EB=$\frac{27}{16}$. Từ đó tính $S_{\Delta CEB}$.

g, $\frac{AF}{FB}.\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA} = \frac{AF}{EA}.\frac{BD}{FB}.\frac{CE}{DC} = \frac{AC}{AB}.\frac{BA}{BC}.\frac{BC}{AC} = 1$

Bài 24: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, AB=5cm, AC=12cm, Gọi D, E là hình chiếu của H trên AB,AC.

a. Tính BC,DE.

b. Chứng minh $\Delta ACB \backsim \Delta ADE$.

c. Đường vuông góc với DE tại D và E cắt BC tại M và N, Chứng minh M là trung điểm BH, N là trung điểm CH.

d. Chứng minh BN^2-CN^2=AB^2.

HD:

a, Pytago cho ΔABC: $AB^2+AC^2=BC^2$. Thay số được BC=13cm

Ta có: EHDA là hình chữ nhật nên AH=ED, mà AH.CB=AB.AC => AH=$\frac{60}{13}$cm.

b, $\widehat{EDA} = \widehat{HAD}$; $\widehat{HAD} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{B}$ nên $\widehat{HAD} = \hat{C} => \widehat{EAD} = \hat{C} => \Delta ACB \backsim \Delta ADE$ *(g.g)*

c, $\widehat{NEH} + \widehat{HED} = \widehat{NHE} + \widehat{EHA}$ mà $\widehat{EHA} = \widehat{HED}$ nên $\widehat{NEH} = \widehat{NHE} => HN = NE(1)$.

$\hat{C} + \widehat{CHE} = \widehat{NEH} + \widehat{NEC}$ mà $\widehat{NEH} = \widehat{NHE}$ nên $\hat{C} = \widehat{NEC} => NE = NC$ (2).

Từ (1)(2) suy ra N là trung điểm HC. Chứng minh tương tự M là trung điểm HB.

d, BN^2-CN^2=(BN+CN)(BN-CN)=BC.BH (3)

mà $\Delta ABC \backsim \Delta HBA$(g.g) nên $\frac{AB}{HB} = \frac{BC}{BA} => AB^2 = BC.HB(4)$

Từ (3)(4) suy ra BN^2-CN^2=AB^2. đpcm

Bài 25: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH,

a. Chứng minh ΔAHB ∽ ΔCAB.

b. Phân giác BD cắt AH tại E, cho AB=12cm, BC=16cm, Tính tỉ số diện tích của ΔEBH/ΔDBA.

c. Chứng minh EA.DA=EH.DC.

d. Giả sử ΔABC vuông cân tại A, lấy M là trung điểm AC, đường thẳng qua A vuông góc BM cắt BC ở F, chứng minh BF=2FC.

HD:

a, $\hat{C} + \hat{B} = \widehat{HAB} + \hat{B} = 90^0$ *nên* $\hat{C} = \widehat{HAB}$ *=> ΔAHB ∽ ΔCAB(g.g)*

b, Dùng Pytago cho ΔABC : $AB^2+AC^2=BC^2$ *=>* $AC=4\sqrt{7}cm$.

Có AH.BC=AB.AC => $AH=3\sqrt{7}cm$, *mà* $AH^2+HB^2=AB^2$ *nên HB= 9cm.*

Xét ΔEBH và ΔDBA có $\widehat{EBH} = \widehat{DBA}$ *(phân giác DB) nên ΔEBH ∽ ΔDBA(g.g) theo tỉ số* $k=\frac{BH}{BA} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ *nên* $\frac{S_{\Delta EBH}}{S_{\Delta DBA}} = \frac{9}{16}$.

$c,\ \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC};\ \frac{EH}{EA} = \frac{HB}{AB}(tính\ chất\ phân\ giác) mà\ \frac{HB}{AB} = \frac{AB}{BC}\ nên\ \frac{AD}{DC} = \frac{EH}{EA}$

$hay\ EA.DA = EH.DC.$

Bài 26: Cho hình chữ nhật ABCD kẻ AH vuông BD.

a. Chứng minh ΔAHD ∽ ΔBDC và BC^2=DH.DB.

b. Gọi S là trung điểm BH, R là trung điểm AH. Chứng minh: SH.BD=SR.DC

c. Gọi T là trung điểm DC. chứng minh DRST là hình bình hành.

d. Tính $\widehat{AST}$.

Bài 27: Cho ΔABC vuông A có góc B=2C, đường cao AD.

a. Chứng minh: ΔADB ∽ ΔABC.

b. Kẻ phân giác góc B cắt AD tại F và cắt AC tại E. CMR: AB^2=AE.AC.

c. Chứng minh: $\frac{DF}{FA} = \frac{AE}{EC}$.

d. Cho AB=2BD, Chứng minh : $S_{ABC} = 3.S_{BFC}$

Bài 28: Cho ΔABC nhọn , M và N là trung điểm BC và AC. Đường trung trực BC và AC cắt nhau tại O. Qua A kẻ đường thẳng // với OM, qua B kẻ đường thẳng song song với ON, chúng cắt nhau tại H. Gọi G là trọng tâm ΔABC.

a. ΔABH đồng dạng với tam giác nào?

b. Chứng minh ΔHAG ∽ ΔOMG.

c. Chứng minh H,G,O thẳng hàng.

Bài 29: Cho ΔABC vuông B, đường cao BK.

a. Chứng minh ΔAKB ∽ ΔABC.

b. Chứng minh AK.BC=AB.BK.

c. Cho AB=15cm, BK=12cm,

- Tính AK,KC,BC.

- Kẻ KM vuông AB tại M, KN vuông BC tại N, gọi O là giao điểm BK và MN, trung tuyến BQ của tam giác ABC cắt MN tại I. Tính diện tích ΔBOI.

Bài 30: Cho ΔABC nhọn, hai đường cao AK và BH cắt nhau tại O.

a. Chứng minh ΔAKC ∽ ΔBHC từ đó suy ra: CH.CA=CK.CB.

b. Chứng minh ΔCHK ∽ ΔCBA.

c. Cho $\widehat{AOB} = 120^0$ và $S_{\Delta ABC} = 200cm^2$, Tính $S_{\Delta CHK}$.

HD:

c, $\widehat{AOH} = 60^0$ *nên HK=1/2AC(cạnh đối diện với góc 30*^{0}*)*

mà ΔCHK ∽ ΔCBA theo k=$\frac{HK}{AC} = \frac{1}{2}$ *Nên* $S_{\Delta ABC} = 4.S_{\Delta CHK}$ => $S_{\Delta CHK} = 50cm^2$.

Bài 31: Chu vi tam giác ABC cân A là 80cm, phân giác góc A và góc B cắt nhau tại I, AI cắt BC tại D. Cho $\frac{AI}{ID} = \frac{4}{3}$. Tính các cạnh ΔABC.

Bài 32: Cho ΔABC, lấy D trên BC sao cho DC=2DB. Qua D kẻ đường thẳng //AC cắt AB tại F, qua D kẻ đường thẳng //AB cắt AC tại E, gọi M là trung điểm AC.

a. So sánh $\frac{BF}{AB}$ và $\frac{AE}{AC}$.

b. Chứng minh EF//BM.

c. Giả sử: $\frac{BD}{DC} = k$, Tìm k để EF//DC.

Bài 33: Cho ΔABC và điểm D trên cạnh AB, đường thẳng đi qua D và song song BC cắt AC tại E và cắt đường thẳng qua C song song với AB tại G, BG cắt AC tại H, qua H kẻ đường thẳng song song AB cắt BC tại I.

a. CMR: DA.EG=DB.DE

b. HC^2=HE.HA.

c. $\frac{1}{IH} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CG}$

HD:

a, $\frac{DE}{EG} = \frac{DA}{GC} = \frac{DA}{DB}$ *nên DE.DB=DA.EG.*

b, $\frac{HC}{HA} = \frac{IC}{IB} = \frac{HG}{BH} = \frac{EH}{HC}$ *nên* HC^2*=HA.HE.*

c, $\frac{GC}{AB} = \frac{HG}{HB} => \frac{GC}{HG} = \frac{AB}{HB} = \frac{GC+AB}{HG+HB} = \frac{GC+AB}{BG}$ *nên* $GC + AB = \frac{AB.BG}{HB}$ *chia 2 vế cho CG.AB ta được:*

$\frac{1}{AB} + \frac{1}{CG} = \frac{AB.BG}{HB.AB.CG}$ *mà BG.IH=HB.GC nên* $\frac{BG}{HB.CG} = \frac{1}{IH}$.

Vậy $\frac{1}{IH} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CG}$

Bài 34: Cho hình vuông ABCD và một điểm E bất kì trên BC. Kẻ Ax vuông AE cắt CD tại F. Trung tuyến AI của tam giác AEF cắt CD tại K. Qua E kẻ đường thẳng song song AB cắt AI tại G.

a. Chứng minh AE=AF.

b. Tứ giác EGFK là hình thoi.

c. ΔFIK đồng dạng ΔFCE.

d. $EK = BE + DK$ và chu vi tam giác ECK không đổi khi E duy chuyển trên BC.

HD:

a, $\widehat{FAD} + \widehat{DAE} = 90^0$; $\widehat{DAE} + \widehat{EAB} = 90^0 => \widehat{FAD} = \widehat{EAB}$ *=> ΔFAD=ΔEAB(ch-gn) nên AE=AF.*

b, ΔAEF cân nên AI là trung trực FE, Vì GE//FK nên $\widehat{IFK} = \widehat{IEG}(\,sole)$*=> ΔIEG=ΔIFK nên GI=IK mà GK vuông góc FE nên EGFK là hình thoi.*

c, Xét ΔFIK và ΔFCE Có: $\hat{F}$ *chung;* $\hat{I} = \hat{C} = 90^0$; *ΔFIK đồng dạng ΔFCE (g.g).*

d, Theo b) ta có: EK=KF=DK+DF=DK+BE(theo câu a thì DF=BE).

Ta có: EC+CK+KE=EC+CK+(BE+DK)=DC+BC=2BC không đổi.

Bài 35: Cho ΔABC vuông tại A, AB=8cm, AC=6cm, phân giác AD,

a. Tính CD và BD.

b. Từ D kẻ DE và DF lần lượt vuông góc với AB và AC. Tính chu vi và diện tích của AEDF.

HD:

a, Dùng Pytago: $BC^2=AB^2+AC^2$ nên BC=10cm, Vì AD là phân giác nên : $\frac{CD}{AC}=\frac{DB}{AB}=>\frac{CD}{6}=\frac{DB}{8}=\frac{CD+DB}{6+8}=\frac{10}{14}$ *nên CD=* $\frac{30}{7}$*cm; DB=* $\frac{40}{7}$*cm.*

b, ΔCFD∽ ΔCAB nên FD=AB.CD/CB=24/7 cm.

ΔBED∽ ΔBAC nên DE=CA.DB/BC=24/7 cm.

Chu vi : 96/7 cm, diện tích: 576/47 cm^2

Bài 36: Cho ΔABC có AC>AB, phân giác trong AD, Qua C kẻ Cx sao cho tia CB nằm giữa hai tia CA và Cx và $\widehat{BCx}=\widehat{BAD}$, AD giao Cx tại E.

a. ΔDCE ∽ ΔDAB.

b. ΔEBC cân.

c. ΔABD ∽ ΔAEC từ đó suy ra: $AB.AC=AD^2+BD.DC$

HD:

a, Xét ΔDCE và ΔDAB có: $\widehat{DCE}=\widehat{BAD}$ *(gt) và* $\widehat{EDC}=\widehat{BDA}$ *(đối đỉnh) nên ΔDCE ∽ ΔDAB(g.g)*

b, Xét ΔDEB và ΔDCA có: $\frac{BD}{ED}=\frac{DA}{DC}$ *(theo câu a) và* $\widehat{EDB}=\widehat{CDA}$ *(đối đỉnh) nên ΔDEB ∽ ΔDCA. Suy ra:* $\widehat{EBD}=\widehat{DAC}$ *mà* $\widehat{DCE}=\widehat{BAD}$ *và AD là phân giác nên* $\widehat{EBD}=\widehat{ECD}$ *. Vậy ΔEBC cân*

c, Vì ΔDCE ∽ ΔDAB nên $\widehat{DEC}=\widehat{DBA}$ *nên ΔABD ∽ ΔAEC(g.g)*

Có: $\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AC}$ *nên $AB.AC=AD.AE=AD(AD+DE)=AD^2+AD.DE$ mà AD.DE=DB.DC suy ra: $AB.AC=AD^2+BD.DC$.*

Bài 37: Cho hình bình hành ABCD có góc A nhọn, kẻ BH, CM, CN, DI lần lượt vuông góc với AC, AB, AD, và AC.

a. Chứng minh AH=CI

b. Chứng minh : AB.CM=CN.AD

c. Tứ giác BIDH là hình gì?

d. $AD.AN+AB.AM=AC^2$

HD:

a, Xét ΔAHB và ΔCID có AB=CD và $\widehat{BAH}=\widehat{DCI}$ $(sole\ trong)$ *nên ΔAHB = ΔCID(ch-gn) => AH=CI.*

b, $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ADC}$ *nên* $\frac{AB.CM}{2}=\frac{AD.CN}{2}$ *hay AB.CM=AD.CN (đpcm)* *c, Theo câu a, BH=ID và BH//ID (cùng vuông góc AC) nên BIDH là hình bình hành.*

d, $\Delta AID \backsim \Delta ANC$ nên AD.AN=AC.AI (1)

$\Delta ABH \backsim \Delta ACM$ nên AB.AM=AC.AH mà AH=IC nên AB.AM=AC.IC (2).

Lấy (1)+(2) theo vế ta được: AD.AN+AB.AM=AC.AI+AC.IC=AC(AI+IC)=AC^2 (đpcm).

Bài 38: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH chia cạnh huyền thành hai đoạn có độ dài là 4 và 9, gọi D và E là hình chiếu của H lên AB, AC.

a. Tính AB, AC, DE.

b. Các đường vuông góc với DE tại D và E cắt BC tại M và N, Chứng minh M là trung điểm BH, N là trung điểm CH.

c. Tính diện tích DEMN.

HD:

a, $\Delta AHC \backsim \Delta BAC$ nên AC^2=CH.CB=4.13=52 nên AC=$\sqrt{52}$cm, Tương tự: AB^2=HB.BC=9.13=117 nên AB=$\sqrt{117}$cm. Ta có AH=DE(vì AEHD là hình chữ nhật) mà $AH^2=AC^2-CH^2$ (pytago) nên AH=6cm hay DE=6cm.

b, $\widehat{MDB} = \widehat{HDE}$ (cùng phụ $\widehat{HDM}$) mà $\widehat{HDE} = \widehat{AHD}$ và $\widehat{AHD} = \widehat{HBD}$ (cùng phụ $\widehat{DHB}$) nên $\widehat{MDB} = \widehat{MBD}$ suy ra DM là đường trung tuyến của ΔDHB nên M là trung điểm BH.

Chứng minh tương tự: N là trung điểm HC.

c, DEMN là hình thang vuông nên: $S_{DEMN} = \frac{(EN+DM).ED}{2}$. với EN=CH:2=2cm, DM=HB:2=4,5cm. DE=6cm . Suy ra S_{DEMN} =19,5cm^2.

Bài 39: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, gọi E, F là hình chiếu của H lên AB và AC.

a. Chứng minh AEFH là hình chữ nhật.

b. Chứng minh AE.AB=AF.AC.

c. Đường thẳng qua A và vuông góc với EF cắt BC tại I, Chứng minh I là trung điểm BC.

d. Chứng minh rằng: Nếu diện tích tam giác ABC gấp đôi diện tích hình chữ nhật thì tam giác ABC là tam giác vuông cân.

Bài 40: Cho hình thang ABCD có AB//CD, góc A và D vuông, AB=2cm, AD=CD=8cm,

a. Tính BC.

b. Gọi O là trung điểm AD, chứng minh ΔBOC vuông.

c. Chứng minh ΔAOB ∽ ΔDOC; ΔABO ∽ ΔOBC

Bài 41: Cho ΔABC đều, gọi O là trung điểm BC. Tại O dựng góc xOy=60^0, Ox cắt AB tại M, Oy cắt AC tại N.

a. ΔBOM ∽ ΔCNO.

b. BC^2=4BM.CN.

c. ΔBOM ∽ ΔONM và OM là phân giác góc BMN.

d. Chứng minh ON^2=CN.MN

Bài 42: Cho ΔABC vuông tại C(AC<CB) . Lấy I bất kì trên AB, trên nửa mp bờ AB chứa C kẻ tia Ax và By cùng vuông góc AB, đường vuông góc với IC qua C cắt Ax , By ở M và N.

a. Chứng minh ΔCAI ∽ ΔCBN

b. Chứng minh: AB.NC=IN.CB

c. Chứng minh $\widehat{MIN} = 90^0$.

d. Tìm vị trí I để diện tích tam giác IMN gấp 2 lần diện tích tam giác ABC.

HD:

a, $\widehat{NBC} = \widehat{CAB}$ *(cùng phụ với góc* $\widehat{CBA}$ *).*

$\widehat{NCB} = \widehat{ICA}$ *(cùng phụ với góc* $\widehat{ICB}$ *) nên ΔCAI ∽ ΔCBN (g.g).*

CHƯƠNG IV: HÌNH LĂNG TRỤ – HÌNH CHÓP ĐỀU

I. Mở đầu về hình học không gian

1. Đường thẳng, mặt phẳng

– Qua ba điểm không thẳng hàng xác định một và chỉ một mặt phẳng.

– Qua hai đường thẳng cắt nhau xác định một và chỉ một mặt phẳng.

– Đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đó đều thuộc mặt phẳng.

2. Hai đường thẳng song song trong không gian

– Hai đường thẳng a, b gọi là ***song song*** *với nhau nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung. Kí hiệu a // b.*

– Hai đường thẳng phân biệt, cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Chú ý: *Hai đường thẳng phân biệt trong không gian có thể:*

– Cắt nhau – Song song – Chéo nhau (không cùng nằm trong một mặt phẳng)

3. Đường thẳng song song với mặt phẳng

– Một đường thẳng a gọi là song song với một mặt phẳng (P) nếu đường thẳng đó không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng.

Kí hiệu a // (P).

– Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì chúng không có điểm chung.

4. Hai mặt phẳng song song

– Nếu mặt phẳng (Q) chứa hai đường thẳng cắt nhau, cùng song song với mặt phẳng (P) thì mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P). Kí hiệu (Q) // (P).

– Hai mặt phẳng song song với nhau thì không có điểm chung.

– Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có chung một đường thẳng đi qua điểm chung đó (đường thẳng chung đó là giao tuyến của hai mặt phẳng).

5. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

– Đường thẳng a gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P). Kí hiệu a ⊥ (P).

– Nếu một đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) tại điểm A thì nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P) và đi qua điểm A.

6. Hai mặt phẳng vuông góc

– Mặt phẳng (Q) gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P). Kí hiệu (Q) ⊥ (P).

II. Hình hộp chữ nhật - Hình lập phương

- *Hình hộp chữ nhật có: 6 mặt đều là hình chữ nhật, 8 đỉnh, 12 cạnh.*
- *Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có 6 mặt đều là hình vuông.*
- *Thể tích hình hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c là:* $\boxed{V = abc}$.
- *Thể tích hình lập phương cạnh a là:* $\boxed{V = a^3}$.

III. Hình lăng trụ đứng

- *Hình lăng trụ đứng có:*

– Hai đáy là hai đa giác bằng nhau và nằm trên hai mặt phẳng song song.

– Các cạnh bên song song, bằng nhau và vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Độ dài cạnh bên là chiều cao của hình lăng trụ đứng.

– Các mặt bên là những hình chữ nhật và vuông góc với hai mặt phẳng đáy.

– Hình hộp chữ nhật, hình lập phương là những hình lăng trụ đứng.

– Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành là hình hộp đứng.

• *Diện tích - Thể tích*

– Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng bằng chu vi đáy nhân với chiều cao:

$\boxed{S_{xq} = 2ph}$ *(p: nửa chu vi đáy, h: chiều cao)*

– Diện tích toàn phần của hình lăng trụ đứng bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy.

$\boxed{S_{tp} = S_{xq} + 2S}$ *(S: điện tích đáy)*

– Thể tích của hình lăng trụ đứng bằng diện tích đáy nhân với chiều cao:

$\boxed{V = S.h}$ *(S: diện tích đáy, h: chiều cao)*

IV. Hình chóp - Hình chóp cụt

• *Hình chóp có:*

– Đáy là một đa giác, các mặt bên là những tam giác có chung một đỉnh.

– Đường thẳng đi qua đỉnh và vuông góc với mặt phẳng đáy gọi là đường cao.

• *Hình chóp đều là hình chóp có đáy là một đa giác đều, các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau có chung đỉnh.*

– Chân đường cao của hình chóp đều trùng với tâm của đường tròn đi qua các đỉnh của mặt đáy.

– Đường cao vẽ từ đỉnh của mỗi mặt bên của hình chóp đều là ***trung đoạn*** *của hình chóp đó.*

• *Hình chóp cụt đều là phần hình chóp đều nằm giữa mặt phẳng đáy của hình chóp và mặt phẳng song song với đáy và cắt hình chóp.*

– Mỗi mặt bên của hình chóp cụt đều là một hình thang cân.

• *Diện tích - Thể tích:*

– Diện tích xung quanh của hình chóp đều bằng tích của nửa chu vi đáy với trung đoạn:

$\boxed{S_{xq} = p.d}$ *(p: nửa chu vi đáy, d: trung đoạn)*

– Diện tích toàn phần của hình chóp bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích đáy:

$\boxed{S_{tp} = S_{xq} + S}$ *(S: diện tích đáy)*

– Thể tích của hình chóp bằng một phần ba của diện tích đáy nhân với chiều cao:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}S.h}$$ *(S: diện tích đáy, h: chiều cao)*

** Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác là đường tròn ngoại tiếp đa giác đó.*

Dạng 1: Chứng minh tính chất song song - vuông góc

Bài 42. Cho tam giác ABC và điểm S không thuộc mp(ABC). Nối S với A, B, C. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, SC, SA.

a) Chứng minh MQ // mp(SBC) và NP // mp(SAB).

b) Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Bài 43. Cho hình thang vuông ABCD, $\hat{B} = \hat{C} = 90^0$ và AD không song song với BC. Trên đường thẳng vuông góc với mp(ABCD) tại B, lấy điểm S và nối S với A, C, D.

a) Chứng minh AB ⊥ mp(SBC).

b) Chứng minh mp(SBC) ⊥ mp(ABCD).

c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

Bài 44. Cho hình vuông ABCD, O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Trên đường thẳng vuông góc với mp(ABCD) tại O, lấy điểm S và nối S với A, B, C, D.

a) Chứng minh mp(SAC) ⊥ mp(SBD).

b) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Chứng minh mp(MNPQ) // mp(ABCD).

c) Tứ giác MNPQ là hình gì? Tính diện tích của tứ giác khi biết AB = *a*.

HD: c) MNPQ là hình vuông; $S_{MNPQ} = \frac{1}{4}a^2$.

Bài 45. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.EFGH.

a) Đường thẳng BF vuông góc với những mặt phẳng nào?

b) Chứng minh mp(AEHD) ⊥ mp(CGHD).

c) Gọi M, P theo thứ tự là trung điểm của AE, CG. Chứng minh MP // AC.

d) Gọi N, Q theo thứ tự là trung điểm của BF, DH. Chứng tỏ M, N, P, Q cùng nằm trên một mặt phẳng và mp(MNPQ) song song với những mặt phẳng nào?

Dạng 2: Tính diện tích - thể tích

Bài 1. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′ có AB = 12cm, AD = 16cm, AA′ = 25cm.

a) Chứng minh ACC′A′, BDD′B′ là các hình chữ nhật.

b) Chứng minh $BD'^2 = AB^2 + AD^2 + AA'^2$.

c) Tính thể tích của hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′ .

Bài 2. Một cái thùng hình lập phương, cạnh 7dm, có chứa nước với độ sâu của nước là 4dm. Người ta thả 25 viên gạch có chiều dài 2dm, chiều rộng 1dm và chiều cao 0,5dm vào thùng. Hỏi nước trong thùng dâng lên cách miện thùng bao nhiêm dm? (giả thiết toàn bộ gạch đều ngập trong nước và gạch không thấm nước).

HD: Nước dâng lên cách miệng thùng là 2,49dm.

Bài 3. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A′B′C′ có đáy là tam giác đều cạnh *a*. M là trung điểm cạnh BC và $\widehat{A'MA} = 60$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AA′.

b) Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ.

HD: a) $AA' = \dfrac{3a}{2}$ *b)* $S_{xq} = \dfrac{9a^2}{2}$; $S_{tp} = (9+\sqrt{3})\dfrac{a^2}{2}$; $V = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.

Bài 4. Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A′B′C′D′ có đáy ABCD là hình thoi cạnh *a* và $\widehat{DAB} = 60$, AA′ = *a*.

a) Chứng minh mp(A′BD) // mp(CB′D′).

b) Chứng minh mp(ACCA′) ⊥ mp(BDD′B′).

c) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ.

HD: c) $S_{tp} = (4+\sqrt{3})a^2$; $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Bài 5. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A′B′C′ có đáy là tam giác đều, AA′ = 5cm và $\widehat{BAB'} = 45$. Tính diện tích xung quanh và thể tích của lăng trụ.

HD: $S_{xq} = 75cm^2$; $V = \dfrac{125\sqrt{3}}{4}cm^3$.

Bài 6. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′ có cạnh AB = *a*, AD = *b*. M và N lần lượt là hai điểm trên cạnh AB, BC. Mặt phẳng (MDD′) cắt A′B′ tại M′, mặt phẳng (NDD′) cắt B′C′ tại N′. Các mặt phẳng đó chia hình hộp thành ba phần có thể tích bằng nhau.

a) Tính AM, CN theo *a*, *b*.

b) Tính tỉ số thể tích hai hình lăng trụ đứng DMN.D′M′N′ và BMN.B′M′N′.

HD:

a) $AM = \dfrac{2a}{3}; CN = \dfrac{2}{3}b$. *Sử dụng giả thiết thể tích.*

b) $\dfrac{V_{DMN.D'M'N'}}{V_{BMN.B'M'N'}} = 5$.

Bài 7. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên bằng 25cm, đáy là hình vuông có cạnh 30cm.

a) Tính độ dài đường cao, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp.

b) Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp hình vuông, O′ là trung điểm của SO. Cắt hình chóp bởi một mặt phẳng đi qua O′ và song song với mp(ABCD) ta được hình chóp cụt ABCD.A′B′C′D′. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình chóp cụt.

HD:

a) $SO = 5\sqrt{43}cm;\ S_{tp} = 2100cm^2;\ V = 1500\sqrt{43}cm^3$

b) $S_{xq} = 900cm^2;\ V = \dfrac{2625\sqrt{43}}{2}cm^3$

Bài 8. Cho hình chóp đều S.ABC. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, bán kính R = OA = $2\sqrt{3}cm$ và M, N, P lần lượt là trùng điểm của các cạnh AB, BC, CA.

a) Chứng minh $\widehat{SMO} = \widehat{SNO} = \widehat{SPO}$.

b) Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp, biết $\widehat{SMO} = 60$.

Bài 9. Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ cạnh *a*. Gọi S là giao điểm hai đường chéo A′C′ và B′D′.

a) Chứng minh rằng hình chóp S.ABCD là hình chóp đều.

b) Tính tỉ số thể tích của hình chóp S.ABCD là hình lập phương.

HD: b) $\dfrac{V_{S.ABCD}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \dfrac{1}{3}$.

Bài 10. Cho hình chóp lục giác đều S.MNOPQR. H là tâm đường tròn ngoại tiếp lục giác đáy và có bán kính R = HM = 12cm, chiều cáo SH = 35cm.

a) Tính diện tích đáy và thể tích của hình chóp.

b) Tính độ dài cạnh bên SM và diện tích toàn phần của hình chóp.

HD:

a) $S_{MNOPQR} = 6\sqrt{108}cm^2;\ V = 70\sqrt{108}cm^3$

b) $SM = 37cm; S_{tp} = 36\sqrt{1333} + 6\sqrt{108}\,(cm^2)$

Bài 11. Cho hình chóp cụt đều ABC.A′B′C′ có các cạnh AB = 2*a*, A′B′ = *a*, đường cao của mặt bên bằng *a*.

a) Tính diện tích xung quanh của hình chóp cụt.

b) Tính cạnh bên, chiều cao và thể tích của hình chóp cụt.

HD:

a) $S_{xq} = \dfrac{9a^2}{2}$

b) $AA' = \dfrac{a\sqrt{5}}{2},\ OO' = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{17}{3}},\ V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{6}{5}a^3.$

Bài 12. Cho hình hộp đứng ABCD.A′B′C′D′, đáy ABCD là hình vuông cạnh *a*. Gọi S là giao điểm hai đường chéo A′C′ và B′D′, M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

a) Chứng minh hình chóp S.MNPQ là hình chóp đều.

b) Tính tỉ số thể tích của hình chóp đều S.MNPQ và hình hộp đứng.

HD: b) $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{1}{6}.$

Bài 13. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy là 8cm, chiều cao 10cm.

a) Tính diện tích toàn phần của hình chóp.

b) Tính thể tích của hình chóp.

HD: a) $S_{xq} = 16\sqrt{116}\,(cm^2), S_{tp} = 16\sqrt{116} + 64\,(cm^2)$ b) $V = \dfrac{640}{3}(cm^3).$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG IV

Bài 1. Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A′B′C′D′, đáy ABCD là hình thang vuông có $\hat{A} = \hat{D} = 90$, AB = BC = AA′ = 4cm, $\hat{C} = 60$.

a) Chứng minh mp(ABB′A′) ⊥ mp(ADD′A′).

b) Tính diện tích toàn phần, thể tích của hình lăng trụ đứng.

HD:

b) $S_{xq} \approx 34,92(cm^2),\ V \approx 69,20(cm^3)$.

Bài 2. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′.

a) Tứ giác AA′C′C là hình gì?

b) Gọi O là giao điểm của AC′ và A′C. Chứng minh ba điểm B, O, D′ thẳng hàng.

c) Tính thể tích của hình hộp, biết AD = 4cm, AB = 3cm, BD′ = 13cm.

HD:

a) AA′C′C là hình chữ nhật

b) O là trung điểm của BD′

c) $V = 144(cm^3)$.

Bài 3. Cho hình chóp đều S.ABC, đáy là tam giác đều có cạnh bằng 4cm. Gọi H là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

a) Chứng minh $\widehat{SAH} = \widehat{SBH} = \widehat{SCH}$.

b) Tính thể tích của hình chóp, biết $\widehat{SAH}$=45.

HD:

b) $V \approx 5,33(cm^3)$.

Bài 4. Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A′B′C′D′ có đáy là hình thoi cạnh 6cm, góc $\widehat{ABD} = 60$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AA′, CC′.

a) Tứ giác B′MDN là hình gì?

b) Khi tứ giác B′MDN là hình vuông, tính thể tích của hình lăng trụ.

HD:

a) B′MDN là hình thoi

b) $V \approx 264,72(cm^3)$

Bài 5. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′ có đáy ABCD là hình vuông, AB = 20cm, AA′ = 19,4cm.

a) Chứng minh các tứ giác ABC′D′, CDA′B′ là những hình chữ nhật.

b) Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình hộp.

c) Gọi S là giao điểm của hai đường chéo A′C′ và B′D′. Chứng minh S.ABCD là hình chóp đều.\

d) Tính độ dài cạnh bên SA, diện tích toàn phần và thể tích hình chóp.

HD:

b) $S_{tp} = 2352(cm^2), V = 7760(cm^3)$

d) $SA = 24(cm), S_{tp} = 1272(cm^2), V = 2586,7(cm^3)$