CHƯƠNG III
GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

I. GÓC Ở TÂM. SỐ ĐO CUNG

1. Góc ở tâm

• *Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn đgl* ***góc ở tâm****.*

• *Nếu* $0^0 < a < 180^0$ *thì cung nằm bên trong góc đgl* ***cung nhỏ****, cung nằm bên ngoài góc được gọi là* ***cung lớn****.*

• *Nếu* $a = 180^0$ *thì mỗi cung là một nửa đường tròn.*

• *Cung nằm bên trong góc được gọi là* ***cung bị chắn****. Góc bẹt* ***chắn nửa đường tròn****.*

• *Kí hiệu cung AB là* AB.

2. Số đo cung

• *Số đo của cung AB được kí hiệu là* $sđ\,AB$.

• *Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.*

• *Số đo của cung lớn bằng* ***hiệu*** *giữa* 360^0 *và số đo của cung nhỏ (có chung 2 mút với cung lớn).*

• *Số đo của nửa đường tròn bằng* 180^0*. Cung cả đường tròn có số đo* 360^0.

Cung không có số đo 0^0 *(cung có 2 mút trùng nhau).*

3. So sánh hai cung

Trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:

• *Hai cung đgl bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.*

• *Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn đgl cung lớn hơn.*

4. Định lí

Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì $sđ\,AB = sđ\,AC + sđ\,CB$.

Bài 1. Cho đường tròn (O; R). Vẽ dây $AB = R\sqrt{2}$. Tính số đo của hai cung AB.

ĐS: $90^0; 270^0$.

Bài 2. Cho đường tròn (O; R). Vẽ dây AB sao cho số đo của cung nhỏ AB bằng $\frac{1}{2}$ số đo của cung lớn AB. Tính diện tích của tam giác AOB.

ĐS: $S = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

Bài 3. Cho hai đường tròn đồng tâm (O; R) và $\left(O; \dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)$. Trên đường tròn nhỏ lấy một điểm M. Tiếp tuyến tại M của đường tròn nhỏ cắt đường tròn lớn tại A và B. Tia OM cắt đường tròn lớn tại C.

a) Chứng minh rằng $CA = CB$.

b) Tính số đo của hai cung AB.

HD: b) $60^0; 300^0$.

Bài 4. Cho (O; 5cm) và điểm M sao cho OM = 10cm. Vẽ hai tiếp tuyến MA và MB. Tính góc ở tâm do hai tia OA và OB tạo ra.

HD: 120^0.

Bài 5. Cho tam giác đều ABC, vẽ nửa đường tròn đường kính BC cắt AB tại D và AC tại E. So sánh các cung BD, DE và EC.

HD: $BD = DE = EC$.

Bài 6. Cho hai đường tròn đồng tâm (O; R) và (O; R′) với R > R′. Qua điểm M ở ngoài (O; R), vẽ hai tiếp tuyến với (O; R′). Một tiếp tuyến cắt (O; R) tại A và B (A nằm giữa M và B); một tiếp tuyến cắt (O; R) tại C và D (C nằm giữa D và M). Chứng minh hai cung AB và CD bằng nhau.

II. LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY

1. Định lí 1

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

a) Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.

b) Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

2. Định lí 2

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

a) Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.

b) Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

3. Bổ sung

a) Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.

b) Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy.

Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây (không đi qua tâm) thì đi qua điểm chính giữa của cung bị căng bởi dây ấy.

c) Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn (O). Biết $A = 50^0$, hãy so sánh các cung nhỏ AB, AC và BC.

HD: $B = C > A \Rightarrow AC = AB > BC$.

Bài 2. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O′) cắt nhau tại hai điểm A, B. Vẽ các đường kính AOE, AO′F và BOC. Đường thẳng AF cắt đường tròn (O) tại một điểm thứ hai là D. Chứng minh rằng các cung nhỏ AB, CD, CE bằng nhau.

HD: Chứng minh E, B, F thẳng hàng; BC // AD.

Bài 3. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Vẽ hai dây AM và BN song song với nhau sao cho sđ $BM < 90^0$. Vẽ dây MD song song với AB. Dây DN cắt AB tại E. Từ E vẽ một đường thẳng song song với AM cắt đường thẳng DM tại C. Chứng minh rằng:

a) AB $\perp$ DN b) BC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 4. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Từ A và B vẽ hai dây cung AC và BD song song với nhau. Qua O vẽ đường thẳng vuông góc AC tại M và BD tại N. So sánh hai cung AC và BD.

Bài 5. Cho đường tròn (O) và dây AB chia đường tròn thành hai cung thỏa: $AmB = \frac{1}{3} AnB$.

a) Tính số đo của hai cung AmB, AnB.

b) Chứng minh khoảng cách từ tâm O đến dây AB là $\frac{AB}{2}$.

Bài 6. Trên đường tròn (O) vẽ hai cung AB và CD thỏa: $AB = 2CD$. Chứng minh: AB < 2.CD.

III. GÓC NỘI TIẾP

1. Định nghĩa

Góc nội tiếp *là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.*

Cung nằm bên trong góc đgl ***cung bị chắn****.*

2. Định lí

Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

3. Hệ quả

Trong một đường tròn:

a) Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.

b) Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.

c) Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90^0) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

d) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

Bài 1. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và dây AC căng cung AC có số đo bằng 60^0.

a) So sánh các góc của tam giác ABC.

b) Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của các cung AC và BC. Hai dây AN và BM cắt nhau tại I. Chứng minh rằng tia CI là tia phân giác của góc ACB.

HD: a) $B = 30^0 < A = 60^0 < C = 90^0$

b) Chứng minh các tia AN, BM là các tia phân giác của các góc A và B.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A ($A < 90^0$). Vẽ đường tròn đường kính AB cắt BC tại D, cắt AC tại E. Chứng minh rằng:

a) Tam giác DBE cân. b) $CBE = \frac{1}{2} BAC$.

HD: a) $DB = DE \Rightarrow DB = DE$ *b)* $CBE = DAE$.

Bài 3. Cho tam giác ABC (AB < AC) nội tiếp trong đường tròn (O). Vẽ đường kính MN ⊥ BC (điểm M thuộc cung BC không chứa A). Chứng minh rằng các tia AM, AN lần lượt là các tia phân giác trong và ngoài tại đỉnh A của tam giác ABC.

HD: $MN \perp BC \Rightarrow MB = MC$.

Bài 4. Cho đường tròn (O) và hai dây MA, MB vuông góc với nhau. Gọi I, K lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ MA và MB. Gọi P là giao điểm của AK và BI.

a) Chứng minh rằng ba điểm A, O, B thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB.

c*) Giả sử MA = 12 cm, MB = 16 cm, tính bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác MAB.

HD: a) $AOB = 180^0$ *b) AK, BI là các đường phân giác của ΔMAB*

c) AB = 20 cm. Chứng minh $r = p - a \Rightarrow r = 4cm$.

Bài 5. Cho đường tròn (O) đường kính AB và một điểm C di động trên một nửa đường tròn đó.

Vẽ đường tròn tâm I tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đường kính AB tại D, đường tròn này cắt CA và CB lần lượt tại các điểm thứ hai là M và N. Chứng minh rằng:

a) Ba điểm M, I, N thẳng hàng.

b) ID $\perp$ MN.

c) Đường thẳng CD đi qua một điểm cố định, từ đó suy ra cách dựng đường tròn (I) nói trên.

HD: a) $MCN = 90^0 \Rightarrow$ *MN là đường kính.*

b) Chứng minh O, I, C thẳng hàng; $INC = OBC \Rightarrow MN // AB; ID \perp AB.$

c) Gọi E là giao điểm của đường thẳng CD với (O) $\Rightarrow EA = EB \Rightarrow$ *E cố định.*

Bài 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Vẽ đường kính AF.

a) Tứ giác BFCH là hình gì?

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm H, M, F thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng $OM = \frac{1}{2}AH$.

HD: a) Chứng minh $ABF = ACF = 90^0 \Rightarrow CE // BF, BD // CF \Rightarrow$ *BFCH là hình bình hành.*

b) Dùng tính chất hai đường chéo của hình bình hành.

c) Dùng tính chất đường trung bình của tam giác AHF.

Bài 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB, M là điểm chính giữa của một nửa đường tròn, C là điểm bất kì trên nửa đường tròn kia, CM cắt AB tại D. Vẽ dây AE vuông góc với CM tại F.

a) Chứng minh rằng tứ giác ACEM là hình thang cân.

b) Vẽ CH $\perp$ AB. Chứng minh rằng tia CM là tia phân giác của góc HCO.

c) Chứng minh rằng $CD \le \frac{1}{2}AE$.

HD: a) Chứng minh ΔFAC *và* ΔFEM *vuông cân tại F* $\Rightarrow AE = CM;$

$CAE = AEM = 45^0 \Rightarrow AC // ME \Rightarrow$ *ACEM là hình thang cân.*

b) $HCM = OMC = OCM$

c) $\Delta HDC \backsim \Delta ODM \Rightarrow \frac{CD}{MD} = \frac{CH}{MO} = \frac{DH}{DO} \le 1 \Rightarrow CD \le MD \Rightarrow CD \le \frac{1}{2}CM = \frac{1}{2}AE.$

Bài 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Biết $A = a < 90^0$. Tính độ dài BC.

HD: Vẽ đường kính BD. $BDC = BAC = a$. $BC = BD.\sin D = 2R\sin a$.

Bài 9. Cho đường tròn (O) có hai bán kính OA và OB vuông góc. Lấy điểm C trên đường tròn (O) sao cho $\frac{sdAC}{sdBC}=\frac{4}{5}$. Tính các góc của tam giác ABC.

Bài 10. Cho tam giác ABC cân tại A và có góc A bằng 50^0. Nửa đường tròn đường kính AC cắt AB tại D và BC tại H. Tính số đo các cung AD, DH và HC.

Bài 11. Cho đường tròn (O) có đường kính AB vuông góc dây cung CD tại E. Chứng minh rằng: $CD^2=4AE.BE$.

IV. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

1. Định lí

Số đo của góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.

2. Hệ quả

Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

3. Định lí (bổ sung)

Nếu góc BAx (với đỉnh A nằm trên đường tròn, một cạnh chứa dây cung AB), có số đo bằng nửa số đo của cung AB căng dây đó và cung này nằm bên trong góc đó thì cạnh Ax là một tia tiếp tuyến của đường tròn.

Bài 1. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia đối của tia AB lấy một điểm M. Vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn. Gọi H là hình chiếu của C trên AB.

a) Chứng minh rằng tia CA là tia phân giác của góc MCH.

b) Giả sử MA = *a*, MC = 2*a*. Tính AB và CH theo *a*.

HD: a) $ACH=ACM=B$

b) Chứng minh $MA.MB=MC^2 \Rightarrow MB=4a$, $AB=3a$. $MC.OC=CH.OM \Rightarrow CH=\frac{6}{5}a$.

Bài 2. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn trên các cạnh AB, BC, CA. Gọi M, N, P lần lượt là các giao điểm của đường tròn (O) với các ti OA, OB, OC. Chứng minh rằng các điểm M, N, P lần lượt là tâm của đường tròn nội tiếp các tam giác ADF, BDE và CEF.

HD: Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau.

Bài 3. Cho hai đường tròn (O) và (O′) cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đường tròn (O′) tại D. Vẽ đường tròn (I) qua ba điểm A, C, D, cắt đường thẳng AB tại một điểm thứ hai là E. Chứng minh rằng:

a) $CAD + CBD = 180^0$. b) Tứ giác BCED là hình bình hành.

HD: a) Chứng minh $BAC = BCD$, $BAD = BDC$ $\Rightarrow CAD + CBD = BCD + BDC + CBD = 180^0$

b) Chứng minh $BCD = EDC\ (= BAC)$, $ECD = BDC\,(= BAD)$ $\Rightarrow BC \,//\, DE,\ BD \,//\, CE.$

Bài 4. Trên một cạnh của góc xMy lấy điểm T, trên cạnh kia lấy hai điểm A, B sao cho $MT^2 = MA.MB$. Chứng minh rằng MT là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác TAB.

HD: Chứng minh $\Delta MAT \# \Delta MTB \Rightarrow ATM = B = \frac{1}{2} sd\,AT$ $\Rightarrow$ *MT là tiếp tuyến.*

Bài 5. Cho hai đường tròn (O) và (O′) cắt nhau tại A và B. Vẽ dây BC của đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn (O′). Vẽ dây BD của đường tròn (O′) tiếp xúc với đường tròn (O). Chứng minh rằng:

a) $AB^2 = AC.AD$ b) $\frac{BC}{BD} = \sqrt{\frac{AC}{AD}}$.

HD: a) $\Delta ABC \# \Delta ADB \Rightarrow$ *đpcm.* *b)* $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow \left(\frac{BC}{BD}\right)^2 = \frac{AB}{AD}.\frac{AC}{AB} = \frac{AC}{AD}$.

Bài 6. Cho đường tròn (O) và một điểm M ở bên ngoài đường tròn. Tia M*x* quay quanh M, cắt đường tròn tại A và B. Gọi I là một điểm thuộc tia m*x* sao cho $MI^2 = MA.MB$. Hỏi điểm I di động trên đường nào?

HD: $MT^2 = MA.MB = MI^2$ $\Rightarrow MI = MT \Rightarrow$ *Điểm I di động trên đường tròn (M, MT).*

Bài 7. Cho đường tròn (O) và ba điểm A, B, C trên (O). Dây cung CB kéo dài gặp tiếp tuyến tại A ở M. So sánh các góc: AMC, ABC, ACB.

Bài 8. Cho hai đường tròn (O, R) và (O′, R′) (R > R′) tiếp xúc ngoài nhau tại A. Qua A kẽ hai cát tuyến BD và CE (B, C ∈ (O′); D, E ∈ (O)). Chứng minh: $ABC = ADE$.

Bài 9. Cho đường tròn (O, R) có hai đường kính AB và CD vuông góc. Gọi I là điểm trên cung AC sao cho khi vẽ tiếp tuyến qua I và cắt DC kéo dài tại M thì IC = CM.

a) Tính góc AOI. b) Tính độ dài OM.

V. GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN.
GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN.

Định lí 1

Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

Định lí 2

Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Trên các cung nhỏ AB và AC lần lượt lấy các điểm I và K sao cho $AI = AK$. Dây IK cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D và E.

a) Chứng minh rằng $ADK = ACB$.

b) Tam giác ABC phải có thêm điều kiện gì thì tứ giác DECB là hình thang cân.

HD: a) $ADK = \dfrac{sd\,AK + sd\,BI}{2} = sd\dfrac{AB}{2} = C$ *b)* $C = B$.

Bài 2. Cho đường tròn (O) và một dây AB. Vẽ đường kính CD vuông góc với AB (D thuộc cung nhỏ AB). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm N. Các đường thẳng CN và DN lần lượt cắt đường thẳng AB tại E và F. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại N cắt đường thẳng AB tại I. Chứng minh rằng:

a) Các tam giác INE và INF là các tam giác cân. b) $AI = \dfrac{AE + AF}{2}$.

HD: a) $INE = \dfrac{1}{2} sdCN = E$ *b)* $AI = AE - IE, AI = AF + IF \Rightarrow$ *đpcm.*

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau tại I và cắt đường tròn (O) lần lượt tại D và E. Dây DE cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng:

a) Tam giác AMN là tam giác cân.

b) Các tam giác EAI và DAI là những tam giác cân.

c) Tứ giác AMIN là hình thoi.

HD: a) $DA = DC, EA = EB, FB = FC \Rightarrow AMN = ANM$

b) $DAI = DIA \Rightarrow DA = DI$ *c) Chứng minh NI // AM, MI // AN, AM = AN ⇒ đpcm.*

Bài 4. Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn (O), ta vẽ hai tiếp tuyến MB, MC. Vẽ đường kính BD. Hai đường thẳng CD và MB cắt nhau tại A. Chứng minh rằng M là trung điểm của AB.

HD: $A = sd\dfrac{CD}{2} = MAC \Rightarrow MA = MC = MB.$

Bài 5. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), ta vẽ hai cát tuyến ABC và ADE (B nằm giữa A và C; D nằm giữa A và E). Cho biết $A = 50^0$, $sdBD = 40^0$. Chứng minh CD $\perp$ BE.

HD: $A = \dfrac{sdCE - sdBD}{2} \Rightarrow sdCE = 140^0$. *Gọi* $H = CD \cap BE \Rightarrow CHE = \dfrac{sdCE + sdBD}{2} = 90^0$.

Bài 6. Cho 4 điểm A, B, C và D theo thứ tự trên đường tròn (O) sao cho số đo các cung như sau: $sdAB = 40^0$, $sdCD = 120^0$. Gọi I là giao điểm của AC và BD. M là giao điểm của DA và CB kéo dài. Tính các góc CID và AMB.

Bài 7. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M ở ngoài (O), ta vẽ các cát tuyến MAC và MBD sao cho $CMD = 40^0$. Gọi E là giao điểm của AD và BC. Biết góc $AEB = 70^0$, tính số đo các cung AB và CD.

Bài 8. Cho đường tròn (O) và một điểm M ở ngoài (O). Vẽ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC đi qua O (B nằm giữa M và C). Đường tròn đường kính MB cắt MA tại E. Chứng minh: $sdAnC = sdBmA + sdBkE$ với AnC, BmA và BkE là các cung trong góc AMC.

VI. CUNG CHỨA GÓC

1. Quỹ tích cung chứa góc

Với đoạn thẳng AB và góc α $(0^0 < a < 180^0)$ *cho trước thì quỹ tích các điểm M thoả mãn* $AMB = a$ *là hai cung chứa góc* α *dựng trên đoạn AB.*

Chú ý:

- *Hai cung chứa góc α nói trên là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB.*
- *Hai điểm A, B được coi là thuộc quỹ tích.*
- ***Đặc biệt:*** *Quỹ tích các điểm M nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB.*

2. Cách vẽ cung chứa góc α

– *Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB.*

– *Vẽ tia Ax tạo với AB một góc α.*

– *Vẽ đường thẳng Ay vuông góc với Ax. Gọi O là giao điểm của Ay với d.*

– *Vẽ cung AmB, tâm O, bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax.*

AmB được vẽ như trên là một cung chứa góc α.

3. Cách giải bài toán quỹ tích

Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) các điểm M thoả mãn tính chất T là một hình H nào đó, ta phải chứng minh hai phần:

*– **Phần thuận:** Mọi điểm có tính chất T đều thuộc hình H.*

*– **Phần đảo:** Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất T.*

– Kết luận: Quỹ tích các điểm M có tính chất T là hình H.

Bài 1. Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Vẽ dây MN = R (điểm M ở trên cung AN). Hai dây AN và BM cắt nhau tại I. Hỏi khi dây MN di động thì điểm I di động trên đường nào?

HD: Chứng minh ΔMON đều $MON = 60^0$ $\Rightarrow$ $AIB = 120^0$ $\Rightarrow$ I nằm trên cung chứa góc 120^0 dựng trên đoạn AB.

Bài 2. Cho nửa đường tròn đường kính AB và một dây AC quay quanh A. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B ta vẽ hình vuông ACDE. Hỏi:

a) Điểm D di động trên đường nào? b) Điểm E di động trên đường nào?

HD: a) $ADB = ADC = 45^0$ $\Rightarrow$ D di động trên cung chứa góc 45^0 dựng trên đoạn AB (nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa C).

b) Vẽ $Ax \perp AB$. DE cắt Ax tại F $\Rightarrow \Delta EAF = \Delta CAB \Rightarrow AF = AB \Rightarrow$ AF cố định. $AEF = 90^0$ $\Rightarrow$ E nằm trên đường tròn đường kính AF.

Bài 3. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm E, trên tia đối của tia CD lấy điểm F sao cho CE = CF. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng DE và BF. Tìm quỹ tích của điểm M khi E di động trên cạnh BC.

HD: Phần thuận: $\Delta CBF = \Delta CDE \Rightarrow BMD = BME = 90^0 \Rightarrow$ M nằm trên đường tròn đường kính BD. Mặt khác $E \to C$ thì $M \to C$, $E \to B$ thì $M \to B \Rightarrow$ M thuộc cung nhỏ BC.

Phần đảo: DM cắt BC tại E, BM cắt DC tại F. $\Delta CBF = \Delta CDE \Rightarrow CE = CF$.

Kết luận: Quỹ tích của điểm M là cung nhỏ BC của đường tròn đường kính BD.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ hai nửa đường tròn đường kính AB và AC ra phía ngoài tam giác. Qua A vẽ cát tuyến MAN (M thuộc nửa đường tròn đường kính AB, N thuộc nửa đường tròn đường kính AC).

a) Tứ giác BMNC là hình gì?

b) Tìm quỹ tích trung điểm I của MN khi cát tuyến MAN quay quanh A.

HD: a) BMNC là hình thang vuông

b) Gọi K là trung điểm của BC. Quỹ tích điểm I là cung DAE của đường tròn đường kính AK.

Bài 5. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Gọi M là điểm chính giữa của cung AB. Trên cung AM lấy điểm N. Trên các tia AM, AN và BN lần lượt lấy các điểm C, D, E sao cho MC = MA, ND = NB, NE = NA. Chứng minh rằng năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

HD: $ACB = ADB = AEB = 45^0$ $\Rightarrow$ *C, D, E nằm trên cung chứa góc* 45^0 *dựng trên đoạn AB.*

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác BF. Từ một điểm I nằm giữa B và F, vẽ một đường thẳng song song với AC cắt AB và BC lần lượt tại M và N. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác BIN cắt đường thẳng AI tại một điểm thứ hai là D. Hai đường thẳng DN và BF cắt nhau tại E.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, B, D, E cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng năm điểm A, B, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn. Từ đó suy ra BE $\perp$ CE.

HD: a) $ABE = ADE$ $\Rightarrow$ *B, D thuộc cung chứa góc dựng trên đoạn AE* $\Rightarrow$ *A, B, D, E* $\in$ *(P).*

b) $ACB = ADB$ $\Rightarrow$ *A, B, C, D* $\in$ *(P′). (P) và (P′) có 3 điểm chung A, B, D* $\Rightarrow$ *(P)* $\equiv$ *(P′)*

$\Rightarrow BEC = BAC = 90^0$.

Bài 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm C di động trên (O). Gọi M là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác ABC. Điểm M di động trên đường nào?

Bài 8. Dựng tam giác ABC biết BC = 3*cm*, $A = 50^0$, AB = 3,5*cm*.

HD: Bài toán có hai nghiệm hình.

Bài 9. Dựng tam giác ABC biết BC = 4*cm*, đường cao BD = 3*cm* và đường cao CE = 3,5*cm*.

VII. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

1. Định nghĩa

*Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn đgl **tứ giác nội tiếp** đường tròn.*

2. Định lí

• *Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng* 180^0.

• *Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng* 180^0 *thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.*

3. Một số dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp

- *Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn là tứ giác nội tiếp đường tròn.*
- *Tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^0 thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.*
- *Tứ giác ABCD có hai đỉnh C và D sao cho $ACB = ADB$ thì tứ giác ABCD nội tiếp được.*

Chú ý: *Trong các tứ giác đã học thì hình chữ nhật, hình vuông, hình thang cân nội tiếp được đường tròn.*

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) và $A = a\ (0^0 < a < 90^0)$. Gọi M là một điểm tuỳ ý trên cung nhỏ AC. Vẽ tia B$x \perp$ AM, cắt tia CM tại D.

a) Tính số đo góc AMD.

b) Chứng minh rằng MD = MB.

HD: a) $AMD = 90^0 - \frac{a}{2}$ *b) ΔMBD cân $\Rightarrow$ MD = MB.*

Bài 2. Cho tam giác ABC không có góc tù. Các đường cao AH và đường trung tuyến AM không trùng nhau. Gọi N là trung điểm của AB. Cho biết $BAH = CAM$.

a) Chứng minh tứ giác AMHN nội tiếp.

b) Tính số đo của góc BAC.

HD: a) $AHN = AMN \Rightarrow AMHN$ *nội tiếp* *b)* $BAC = ANM = 90^0$.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Điểm E di động trên cạnh AB. Qua B vẽ một đường thẳng vuông góc với tia CE tại D và cắt tia CA tại H. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác ADBC nội tiếp.

b) Góc ADH có số đo không đổi khi E di động trên cạnh AB.

c) Khi E di động trên cạnh AB thì $BA.BE + CD.CE$ không đổi.

HD: a) $BAC = BDC = 90^0$ *b)* $ADH = ACB$

c) Vẽ EK $\perp$ BC. $\Delta KBE \# \Delta ABC \Rightarrow$ BE.BA = BK.BC; $\Delta KCE \# \Delta DCB \Rightarrow$ CE.CD = CK.CB.

Bài 4. Cho nửa đường tròn đường kính AB và dây AC. Từ một điểm D trên AC, vẽ DE $\perp$ AB. Hai đường thẳng DE và BC cắt nhau tại F. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác BCDE nội tiếp.

b) $AFE = ACE$.

HD: a) $DCB + DEB = 180^0$ *b) AECF nội tiếp* $\Rightarrow AFE = ACE$.

Bài 5. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Lấy hai điểm C và D trên nửa đường tròn sao cho $AC = CD = DB$. Các tiếp tuyến vẽ từ B và C của nửa đường tròn cắt nhau tại I. Hai tia AC và BD cắt nhau tại K. Chứng minh rằng:

a) Các tam giác KAB và IBC là những tam giác đều.

b) Tứ giác KIBC nội tiếp.

HD: a) Chứng minh mỗi tam giác có hai góc 60^0 *b)* $BKC = BIC = 60^0$.

Bài 6. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và tia tiếp tuyến B*x* của nửa đường tròn. Trên tia B*x* lấy hai điểm C và D (C nằm giữa B và D). Các tia AC và BD lần lượt cắt đường tròn tại E và F. Hai dây AE và BF cắt nhau tại M. Hai tia AF và BE cắt nhau tại N. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác FNEM nội tiếp. b) Tứ giác CDFE nội tiếp.

HD: a) $MEN = MFN = 90^0$ *b)* $D + CEF = 180^0$.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Gọi D là điểm đối xứng của H qua trung điểm M của BC.

a) Chứng minh rằng tứ giác ABDC nội tiếp được đường tròn. Xác định tâm O của đường tròn đó.

b) Đường thẳng DH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là I. Chứng minh rằng năm điểm A, I, F, H, E cùng nằm trên một đường tròn.

HD: a) BHCD là hình bình hành $\Rightarrow ACD = ABD = 90^0$. *O là trung điểm của AD.*

b) $AIH = AFH = AEH = 90^0$.

Bài 8. Cho tam giác ABC. Dựng ra ngoài tam giác đó các tam giác đều BCD, ACE và ABF. Chứng minh rằng:

a) Ba đường tròn ngoại tiếp ba tam giác đều nói trên cùng đi qua một điểm.

b) Ba đường thẳng AD, BE, CF cùng đi qua một điểm.

c) Ba đoạn thẳng AD, BE, CF bằng nhau.

HD: a) Gọi O là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (ABF) và (ACE)

$\Rightarrow AOB = AOC = BOC = 120^0 \Rightarrow$ *BODC nội tiếp* $\Rightarrow$ *đường tròn (BCD) cũng đi qua O.*

b) $AOB + BOD = 180^0 \Rightarrow$ *A, O, D thẳng hàng. Tương tự B, O, E thẳng hàng; C, O, F thẳng hàng* $\Rightarrow$ *Ba đường thẳng AD, BE, CF đồng qui.*

c) $\Delta ABD = \Delta FBC \Rightarrow AD = CF$; $\Delta ACF = \Delta AEB \Rightarrow CF = BE$.

Bài 9. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABI. Tiếp tuyến của đường tròn này tại I cắt AD và BC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng:

a) MN // CD. b) Tứ giác ABNM nội tiếp.

HD: a) $\widehat{BIN} = \widehat{BDC} \Rightarrow MN // CD$ *b)* $\widehat{BAM} + \widehat{BNM} = 180^0$.

Bài 10. Cho góc nhọn x*Oy*. Trên tia O*x* lấy hai điểm A và B sao cho OA = 2*cm*, OB = 6*cm*. Trên tia O*y* lấy hai điểm C và D sao cho OC = 3*cm*, OD = 4*cm*. Nối BD và AC. Chứng minh tứ giác ABCD nội tiếp.

Bài 11. Cho đường tròn (O) và một điểm A trên đường tròn (O). Từ một điểm M trên tiếp tuyến tại A, vẽ cát tuyến MBC. Gọi I là trung điểm BC. Chứng minh tứ giác AMIO nội tiếp.

VIII. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

1. Định nghĩa

a) Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác đgl ***đường tròn ngoại tiếp*** *đa giác và đa giác đgl* ***đa giác nội tiếp*** *đường tròn.*

b) Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác đgl ***đường tròn nội tiếp*** *đa giác và đa giác đgl* ***đa giác ngoại tiếp*** *đường tròn.*

2. Định lí

Bất kì đa giác đều nào cũng có một và chỉ một đường tròn ngoại tiếp, có một và chỉ một đường tròn nội tiếp.

Tâm của hai đường tròn này trùng nhau và đgl ***tâm*** *của đa giác đều.*

Tâm này là giao điểm hai đường trung trực của hai cạnh hoặc là hai đường phân giác của hai góc.

Chú ý:

- *Bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác là khoảng cách từ tâm đến đỉnh.*
- *Bán kính đường tròn nội tiếp đa giác là khoảng cách từ tâm O đến 1 cạnh.*
- *Cho n_ giác đều cạnh a. Khi đó:*

  – *Chu vi của đa giác:* $2p = na$ *(p là nửa chu vi).*

  – *Mỗi góc ở đỉnh của đa giác có số đo bằng* $\dfrac{(n-2).180^0}{n}$.

  – *Mỗi góc ở tâm của đa giác có số đo bằng* $\dfrac{360^0}{n}$.

  – *Bán kính đường tròn ngoại tiếp:* $R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^0}{n}} \Rightarrow a = 2R.\sin\dfrac{180^0}{n}$.

– *Bán kính đường tròn nội tiếp:* $r = \dfrac{a}{2\tan\dfrac{180^0}{n}} \Rightarrow a = 2r.\tan\dfrac{180^0}{n}$.

– *Liên hệ giữa bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp:* $R^2 - r^2 = \dfrac{a^2}{4}$.

– *Diện tích đa giác đều:* $S = \dfrac{1}{2}nar$.

Bài 1. Một đường tròn có bán kính $R = 3cm$. Tính diện tích hình vuông nội tiếp đường tròn đó.

HD: $a = R\sqrt{2} = 3\sqrt{2}(cm) \Rightarrow S = 18cm^2$.

Bài 2. Một đa giác đều nội tiếp đường tròn $(O;2cm)$. Biết độ dài mỗi cạnh của nó là $2\sqrt{3}cm$. Tính diện tích của đa giác đều đó.

HD: $R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^0}{n}} \Rightarrow n = 3 \Rightarrow S = 3\sqrt{3}(cm^2)$.

Bài 3. Cho lục giác đều ABCDEF, độ dài mỗi cạnh là *a*. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M, cắt đường thẳng EF theo thứ tự tại N và P.

a) Chứng minh ΔMNP là tam giác đều.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔMNP.

HD: a) ΔMNP có 3 góc bằng $60^0 \Rightarrow$ *ΔMNP là tam giác đều cạnh* $3a$ *b)* $R = a\sqrt{3}$.

Bài 4. Cho ngũ giác đều ABCDE cạnh *a*. Hai đường chéo AC và AD cắt BE lần lượt tại M và N.

a) Tính tỉ số giữa các bán kính của đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp ngũ giác đó.

b) Chứng minh rằng các tam giác AMN và CMB là các tam giác cân.

c) Chứng minh rằng $AC.BM = a^2$.

HD: a) $\dfrac{r}{R} = \left(\dfrac{a}{2\tan\dfrac{180^0}{5}}\right) : \left(\dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^0}{5}}\right) \approx 0,8$.

b) Vẽ đường tròn ngoại tiếp ngũ giác đều $\Rightarrow AB = BC = CD = DE = EA$. *Dùng các định lí về góc trong đường tròn, chứng minh mỗi tam giác có hai góc bằng nhau.*

c) $\Delta ABM \# \Delta ACB \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BM}{BC}$.

Bài 5. Cho đường tròn (O; R). Từ một điểm A trên đường tròn (O) vẽ các cung AB, AC sao cho $sdAB = 30^0$, $sdAC = 90^0$ (điểm A nằm trên cung BC nhỏ). Tính các cạnh và diện tích của tam giác ABC.

HD: $BC = R\sqrt{3}$, $AC = R\sqrt{2}$, $AB = 2R\sin 15^0$, $S = R^2\dfrac{\sqrt{6}}{2}\sin 15^0$.

IX. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN

1. Công thức tính độ dài đường tròn (chu vi đường tròn)

Độ dài C của một đường tròn bán kính R được tính theo công thức:

$$C = 2\pi R \qquad \textit{hoặc} \quad C = \pi d \qquad (d = 2R)$$

2. Công thức tính độ dài cung tròn

Trên đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung n^0 *được tính theo công thức:*

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

Bài 1. Cho $\pi = 3{,}14$. Hãy điền vào các bảng sau:

Bán kính R	Đường kính d	Độ dài C	Diện tích S
5			
	6		
		94,2	
			28,26

Bài 2. Cho đường tròn (O) bán kính OA. Từ trung điểm M của OA vẽ dây BC ⊥ OA. Biết độ dài đường tròn (O) là $4\pi(cm)$. Tính:

a) Bán kính đường tròn (O). b) Độ dài hai cung BC của đường tròn.

Bài 3. Tam giác ABC có AB = AC = 3*cm*, $A = 120^0$. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài 4. Một tam giác đều và một hình vuông có cùng chu vi là 72*cm*. Hỏi độ dài đường tròn ngoại tiếp hình nào lớn hơn? Lớn hơn bao nhiêu?

Bài 5. Cho hai đường tròn (O; R) và (O′; R′) tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một đường thẳng qua A cắt đường tròn (O) tại B, cắt đường tròn (O′) tại C. Chứng minh rằng nếu $R' = \frac{1}{2}R$ thì độ dài của cung AC bằng nửa độ dài của cung AB (chỉ xét các cung nhỏ AC, AB).

Bài 6. Cho đường tròn đường kính $BC = 2R$. Trên đường tròn lấy một điểm A sao cho $AB = R\sqrt{3}$

. Gọi P_1, P_2, P_3 là chu vi các đường tròn có đường kính lần lượt là CA, AB, BC. Chứng minh rằng:

$$\frac{P_1^2}{1} = \frac{P_2^2}{3} = \frac{P_3^2}{4}.$$

Bài 7. Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O). Vẽ ra phía ngoài tứ giác này bốn nửa đường tròn có đường kính lần lượt là bốn cạnh của tứ giác. Chứng minh rằng tổng độ dài của hai nửa đường tròn có đường kính là hai cạnh đối diện bằng tổng độ dài hai nửa đường tròn kia.

Bài 8. Cho nửa đường tròn (O; 10cm) có đường kính AB. Vẽ hai nửa đường tròn đường kính OA và OB ở trong nửa đường tròn (O; 10cm). Tính diện tích của phần nằm giữa ba đường tròn.

Bài 9. Cho nửa đường tròn (O) đường kính BC. Lấy một điểm A trên (O) sao cho AB < AC. Vẽ hai nửa đường tròn đường kính AB và AC ở phía ngoài tam giác ABC. Chứng minh diện tích tam giác ABC bằng tổng hai diện tích của hai hình trăng khuyết ở phía ngoài (O).

X. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN

1. Công thức tính diện tích hình tròn

Diện tích S của một hình tròn bán kính R được tính theo công thức: $S = \pi R^2$

2. Công thức tính diện tích hình quạt tròn

Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung n^0 được tính theo công thức:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \quad hay \quad S = \frac{lR}{2}$$ *(l là độ dài cung n^0 của hình quạt tròn).*

Bài 1. Một hình vuông và một hình tròn có cùng chu vi. Hỏi hình nào có diện tích lớn hơn.

HD: Gọi chu vi mỗi hình là 4a $\Rightarrow S_{hv} = a^2, S_{ht} = \frac{4}{\pi}a^2 \Rightarrow S_{ht} > S_{hv}$.

Bài 2. Chứng minh rằng diện tích hình tròn ngoại tiếp hình vuông bằng hai lần diện tích hình tròn nội tiếp hình vuông đó.

HD: Gọi độ dài cạnh hình vuông là a $\Rightarrow S_{ngoại\,tiếp} = \frac{\pi a^2}{2}; S_{nội\,tiếp} = \frac{\pi a^2}{4}$.

Bài 3. Tính diện tích hình vành khăn tạo thành bởi đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh $6cm$.

HD: $R_{ngoại\,tiếp} = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^0}{3}} = 2\sqrt{3}$, $R_{nội\,tiếp} = \dfrac{a}{2\tan\dfrac{180^0}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow S = 9\pi\,(cm^2)$.

Bài 4. Một tam giác đều cạnh *a* nội tiếp trong đường tròn (O). Tính diện tích hình viên phân tạo thành bởi một cạnh của tam giác và một cung nhỏ căng cạnh đó.

HD: $S = \dfrac{\pi a^2}{9} - \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

Bài 5. Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH = 2*cm*. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A ta vẽ ba nửa đường tròn có đường kính lần lượt là BH, CH và BC. Tính diện tích miền giới hạn bởi ba nửa đường tròn đó.

HD: Đặt $HB = 2R, HC = 2r \Rightarrow AH^2 = HB.HC = 4Rr \Rightarrow Rr = 1 \Rightarrow S = \pi Rr = \pi\,(cm^2)$.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

Bài 1. Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Từ A và B vẽ các tiếp tuyến A*x* và B*y* với nửa đường tròn. Một góc vuông quay quanh O, hai cạnh của góc cắt A*x* và B*y* lần lượt tại C và D. Hai đường thẳng OD và A*x* cắt nhau tại E. Chứng minh rằng:

a) $AC.BD = R^2$.

b) Tam giác CDE là tam giác cân.

c) CD là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).

HD: a) $\Delta AOC \,\#\, \Delta BDO \Rightarrow AC.BD = OA.OB = R^2$.

b) ΔCDE có CO vừa là đường cao, vừa là trung tuyến.

c) Vẽ $OF \perp CD \Rightarrow \Delta FOD = \Delta AOE \Rightarrow OF = OA = R \Rightarrow$ *CD là tiếp tuyến của (O).*

Bài 2. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB, tia tiếp tuyến A*x*. Trên tia A*x* lấy điểm M sao cho $AM = R\sqrt{3}$. Vẽ tiếp tuyến MC (C là tiếp điểm). Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt tia BC tại D.

a) Chứng minh rằng BD // OM.

b) Xác định dạng của các tứ giác OBDM và AODM.

c) Gọi E là giao điểm của AD với OM, F là giao điểm của MC với OD. Chứng minh rằng EF là tiếp tuyến của đường tròn (O).

HD: a) $AOM = B \Rightarrow BD\,//\,OM$. *b) OBDM là hình bình hành, AODM là hình chữ nhật.*

c) OE = R, FE $\perp$ OE $\Rightarrow$ EF là tiếp tuyến của (O).

Bài 3. Cho hai đường tròn (O) và (O′) cắt nhau tại A và B. Vẽ các đường kính AOC và AO′D. Đường thẳng AC cắt đường tròn (O′) tại E. Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại F. Chứng minh rằng:

a) Ba điểm C, B, D thẳng hàng.

b) Tứ giác CDEF nội tiếp.

c) A là tâm đường tròn nội tiếp (hoặc bàng tiếp) của tam giác BEF.

HD: a) $ABC = ABD = 90^0$. *b)* $CED = CFD = 90^0$.

c) Chứng minh FA là tia phân giác trong (hoặc ngoài) của góc F, EA là tia phân giác trong (hoặc ngoài) của góc E của $\Delta BEF \Rightarrow$ A là tâm đường tròn nội tiếp (hoặc bàng tiếp) của tam giác BEF.

Bài 4. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến AT và cát tuyến ABC với đường tròn (B nằm giữa A và C). Gọi H là hình chiếu của T trên OA. Chứng minh rằng:

a) $AT^2 = AB.AC$ b) $AB.AC = AH.AO$ c) Tứ giác OHBC nội tiếp.

HD: a) $\Delta ATB \# \Delta ACT \Rightarrow AT^2 = AB.AC$. *b)* $AB.AC = AH.AO = AT^2$.

c) $\Delta AOC \# \Delta ABH \Rightarrow ACO = AHB \Rightarrow ACO + BHO = 180^0 \Rightarrow$ *OHBC nội tiếp.*

Bài 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) (AB < AC). Vẽ dây AD // BC. Tiếp tuyến tại A và B của đường tròn cắt nhau tại E. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng:

a) $AIB = AOB$.

b) Năm điểm E, A, I, O, B cùng nằm trên một đường tròn.

c) IO $\perp$ IE.

HD: a) $AIB = sd AB = AOB$. *b) ABOI, AOBE nội tiếp.* *c)* $EIO = EAO = 90^0 \Rightarrow IO \perp IE$

Bài 6. Cho hình vuông ABCD. Trên hai cạnh CB và CD lần lượt lấy hai điểm di động M và N sao cho CM = CN. Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với BN, cắt BN tại E và AD tại F.

a) Chứng minh tứ giác FMCD là hình chữ nhật.

b) Chứng minh nam điểm A, B, M, E, F cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm O của đường tròn đó.

c) Đường tròn (O) cắt AC tại một điểm thứ hai là I. Chứng minh tam giác IBF vuông cân.

d) Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt đường thẳng FI tại K. Chứng minh ba điểm K, C, D thẳng hàng.

HD: a) $\Delta FDC = \Delta NCB \Rightarrow FD = CN = CM$

b) A, B, M, E, F nằm trên đường tròn đường kính BF. O là trung điểm của BF.

c) $IF = IB \Rightarrow IF = IB$ *d) IBKC nội tiếp* $\Rightarrow BCK = BIK = 90^0 \Rightarrow BCK + BCD = 180^0$.

Bài 7. Cho đường tròn (O). Vẽ hai dây AC và BD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I (điểm B nằm trên cung nhỏ AC). Chứng minh rằng:

a) Tứ giác ABCD là hình thang cân.

b) Tổng diện tích hai hình quạt tròn AOB và COD bằng tổng diện tích hai hình quạt tròn AOD và BOC (các hình quạt tròn ứng với các cung nhỏ).

HD: a) $BDC = ABD \Rightarrow AB // CD$

b) $S_{quạt\,AOB} + S_{quạt\,COD} = \dfrac{\pi R^2}{360}\left(sđ AB + sđ CD\right)$, $S_{quạt\,AOD} + S_{quạt\,BOC} = \dfrac{\pi R^2}{360}\left(sđ AD + sđ BC\right)$.

Bài 8. Cho nửa đường tròn đường kính BC = 10*cm* và dây BA = 8*cm*. Vẽ ra phía ngoài của tam giác ABC các nửa đường tròn đường kính AB và AC.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính tổng diện tích hai hình viên phân.

c) Tính tổng diện tích hai hình trăng khuyết.

HD: a) $S_{ABC} = 24(cm^2)$ *b)* $S_{vp} = \dfrac{25}{2}\pi - 24(cm^2)$ *c)* $S_{tk} = 24(cm^2)$.

Bài 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Biết BC = 2*cm*, $A = 45^0$.

a) Tính diện tích hình tròn (O).

b) Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây BC và cung nhỏ BC.

c) Xác định vị trí của điểm A để diện tích tam giác ABC là lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.

HD: a) $R = OB = \sqrt{2} \Rightarrow S = 2\pi(cm^2)$ *b)* $S_{vp} = \dfrac{\pi - 2}{2}(cm^2)$

c) S_{ABC} *lớn nhất* $\Leftrightarrow$ *A là điểm chính giữa cung lớn BC. Khi đó* $S_{ABC} = \sqrt{2} + 1(cm^2)$.

Bài 10. Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn đường kính BC cắt AB ở N và cắt AC ở M. Gọi H là giao điểm của BM và CN.

a) Tính số đo các góc BMC và BNC.

b) Chứng minh AH vuông góc BC.

c) Chứng minh tiếp tuyến tại N đi qua trung điểm AH.

Bài 11. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R và điểm M trên đường tròn sao cho góc $MAB = 90^0$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại H.

a) Chứng minh AM và AN là các tiếp tuyến của đường tròn (B; BM).

b) Chứng minh $MN^2 = 4AH.HB$.

c) Chứng minh tam giác BMN là tam giác đều và điểm O là trọng tâm của nó.

d) Tia MO cắt đường tròn (O) tại E, tia MB cắt (B) tại F.Chứng minh N, E, F thẳng hàng.

Bài 12. Cho đường tròn (O; R) và điểm A cách O một khoảng bằng 2R, kẻ tiếp tuyến AB tới đường tròn (B là tiếp điểm).

a) Tính số đo các góc của tam giác OAB.

b) Gọi C là điểm đối xứng với B qua OA. Chứng minh điểm C nằm trên đường tròn O và AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) AO cắt đường tròn (O) tại G. Chứng minh G là trọng tâm tam giác ABC.

Bài 13. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O; R), kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC.

a) Chứng minh OA $\perp$ BC và tính tích OH.OA theo R.

b) Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Chứng minh CD//OA.

c) Gọi E là hình chiếu của C trên BD, K là giao điểm của AD và CE. Chứng minh K là trung điểm CE.

Bài 14. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O; R), kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Kẻ BE $\perp$ AC và CF $\perp$ AB (E $\in AC, F \in AB$), BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác BOCH là hình thoi.

b) Chứng minh ba điểm A, H, O thẳng hàng.

c) Xác định vị trí điểm A để H nằm trên đường tròn (O).

Bài 15. Cho đường tròn (O; 3cm) và một điểm A có OA = 6 cm. Kẻ các tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC.

a) Tính độ dài OH.

b) Qua điểm M bất kì thuộc cung nhỏ BC, kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt AB và AC theo thứ tự tại E và F. Tính chu vi tam giác ADE.

c) Tính số đo góc DOE.

Bài 16. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi Ax, By là các tia vuông góc với AB (Ax, By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Qua điểm M bất kì thuộc tia Ax, kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt By ở N.

a) Tính số đo góc MON.

b) Chứng minh MN = AM + BN. c) Tính tích AM.BN theo R.