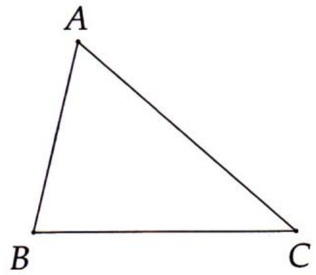
CHUYÊN ĐỀ III. QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC VÀ CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC

CHỦ ĐỀ 1. QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lý 1



Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.

Trong tam giác ABC, nếu AC > AB thì $B > C$

2. Định lý 2

Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

Trong tam giác ABC, nếu $B > C$ thì AC > AB.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. So sánh hai góc trong một tam giác

Phương pháp giải:

- Xét hai góc cần so sánh là hai góc của một tam giác.
- Tìm cạnh lớn hơn trong hai cạnh đối diện của hai góc ấy.
- Kết luận.

1A. So sánh các góc của tam giác ABC, biết rằng AB = 2 cm, BC = 4 cm, AC = 5 cm.

1B. So sánh các góc của tam giác MNP, biết rằng MN = 8cm, NP = 3 cm, MP = 10 cm.

2A. Cho tam giác ABC có AC > AB. So sanh hai góc ngoài tại các đỉnh B và C.

2B. Cho tam giác DEF có DE = 5 cm, DF = 7 cm. So sánh hai góc ngoài tại các đỉnh E và F.

3A. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, AB < AC. Kẻ BD vuông góc với AC tại D, CE vuông góc với AB tại E. So sánh hai DBC và ECB

3B. Cho tam giác ABC có AB < AC. Tia phân giác của các góc B và C cắt nhau tại I. So sánh IBC và ICB

Dạng 2. So sánh hai cạnh trong một tam giác

Phương pháp giải:

- Xét hai cạnh cần so sánh là hai cạnh của một tam giác.
- Tìm góc lớn hơn trong hai góc đối diện với hai cạnh ấy.
- Kết luận.

4A. So sánh các cạnh của tam giác ABC, biết $A = 80°$, $B = 40°$.

4B. So sánh các cạnh của tam giác PQR, biết $P = 70°$, $R = 50°$.

5A. Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm K nằm giữa A và C. So sánh độ dài BK và BC

5B. Cho tam giác MNP vuông tại N. Trên tia đối của tia PN lấy điểm Q. So sánh độ dài MP và MQ.

6A. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, AB < AC. Kẻ BD vuông góc với AC tại D, CE vuông góc với AB tại E. Gọi H là giao điểm cửa BD và CE. So sánh độ dài HB và HC.

6B. Cho tam giác ABC có AB < AC. Tia phân giác của các góc B và C cắt nhau tại I. Từ I vẽ IH vuông góc với BC. So sánh độ dài HB và HC.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

7. Cho tam giác QMN có OM = 3 cm, ON = 4 cm, MN = 5 cm.
So sánh các góc của tam giác OMN.

8. Chứng minh trong tam giác vuông, cạnh huyền lớn hơn mỗi cạnh góc vuông

9. Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 50°$. So sánh độ dài AB và BC.

10. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, AB < AC. Kẻ AH vuông góc với BC tại H. So sánh HAB và HAC.

11. Cho tam giác ABC có AB < AC. Tia phân giác góc A cắt BC tại D. So sánh ADB và ADC.

12. Cho tam giác ABC có $A = 90°$, $C = 30°$. Điểm D thuộc cạnh AC sao cho $ABD = 20°$. So sánh các độ dài các cạnh của ΔBDC.

13. Cho tam giác đều ABC, điểm M thuộc cạnh AB. So sánh độ dài các cạnh của tam giác BMC.

14. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tia phân giác góc B cắt AC ở D. Kẻ DH vuông góc vói BC tại H. So sánh:
a) BA và BH; b) DA và DC.

15. Cho tam giác ABC có $A > 90°$. Lấy điểm D thuộc cạnh AB, điểm E thuộc cạnh AC. Chứng minh DE < DC <BC.

16. Cho tam giác ABC cân tại A. Kẻ tia Bx nằm giữa hai tia BA và BC. Trên tia Bx lấy điểm D nằm ngoài tam giác ABC. Chứng minh
DC < DB.

17*. Cho tam giác ABC có AB < AC. Tia phân giác góc A cắt cạnh BC tại D. Chứng minh DB < DC.

18*. Cho tam giác ABC có AB < AC. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh $MAB > MAC$.

HƯỚNG DẪN

1A. Ta có AB < BC < AC => $C < A < B$

1B. Ta có NP < MN < MP => $M < P < N$

2A. Ta có AC > AB => $B > C$, do đó góc ngoài tại đỉnh B nhỏ hơn góc ngoài tại đỉnh C.

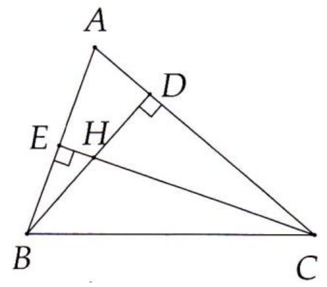
2B. Ta có DE < DE => $F < E$, do đó góc ngoài tại đỉnh E nhỏ hơn góc ngoài tại đỉnh F.

3A. Vì AB < AC nên $ACB < ABC$.

Lại có $DBC = 90° - ABC$ và

$ECB = 90° - ABC$, từ đó ta có

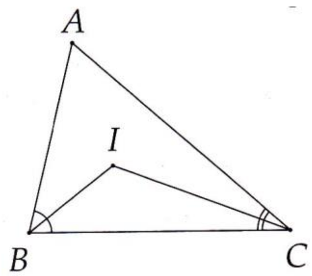
$DBC > ECB$



3B. Vì AB < AC nên $ACB < ABC$, với

chú ý rằng $IBC = \frac{ABC}{2}, ICB = \frac{ACB}{2}$

Từ đó ta có $IBC > ICB$



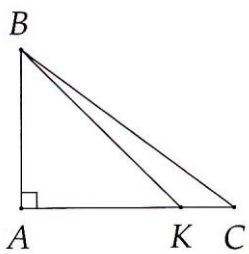
4A. Tính được $C = 60°$, do đó $B < C < A$ => AC < AB < BC.

4B. Tính được $Q = 60°$, do đó $R < Q < P$ => PQ < PR < QR.

5A. Chú ý BKC là góc ngoài của ΔAKB

nên $BKC > A = 90° > C$.

⇨ BK < BC



5B. Tương tự 5A, ta có MP < MQ.

6A. Áp dụng **3A**, ta có $HBC > HCB$ => HB < HC.

6B. Dùng kết quả bài **3B**, ta có $IBC > ICB$ => IB < IC.

Mà $HB^2 = IB^2 - IH^2$, $HC^2 = IC^2 - IH^2$. Suy ra HB < HC.

7. Ta có OM < ON < MN => $N < M < O$.

8. Trong tam giác vuông, góc vuông là góc lớn nhất nên cạnh huyền (đối diện với góc vuông) là cạnh lớn nhất.

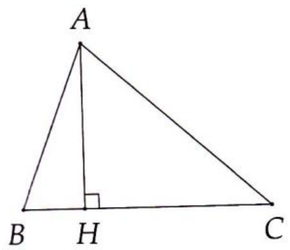
9. Tính được $B = C = 65°$, do đó $C > A$ => AB > BC.

10. Ta có AB < AC => $ABC > ACB$.

Chú ý $HAB = 90° - ABC$ và

$HAC = 90° - ACB$, từ đó ta có

$HAB < HAC$

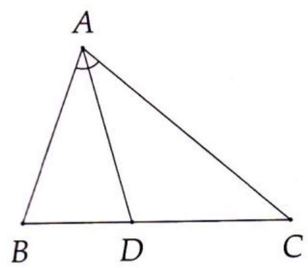


11. Chú ý: $ADB = ACB + \frac{BAC}{2}$

$ADC = ABC + \frac{BAC}{2}$

Mà AB < AC => $ABC > ACB$

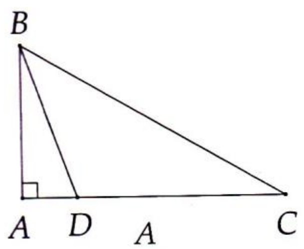
nên $ADB < ADC$



12. Tính được $DBC = 40°$, $BDC = 110°$

và $DCB = 30°$, từ đó ta có

DB < DC < BC.



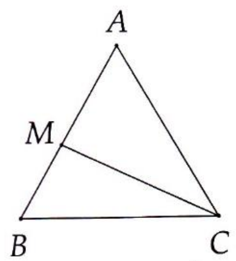
13. Ta có $DCM < BCA = 60°$

Chú ý BMC là góc ngoài của tam giác

AMC nên $BMC > BAC = 60°$

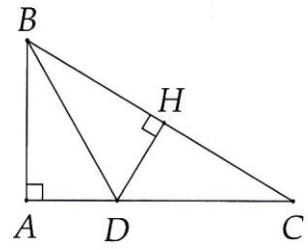
Do đó $BMC > MBC > MCB$

bởi vậy MB < MC < BC.



14. a) Ta có $\Delta ABD = \Delta HBD$ (cạnh huyền - góc nhọn), từ đó BA = BH.

b) Chứng minh được DA = DH, lại có tam giác DHC vuông tại H nên DH < DC => DA < DC.

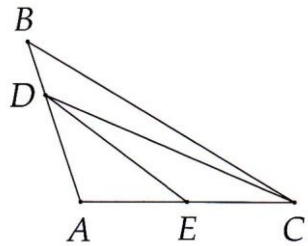


15. Chú ý DEC là góc ngoài của tam giác DAC nên $DEC > DAC > 90°$

=> DE < DC.

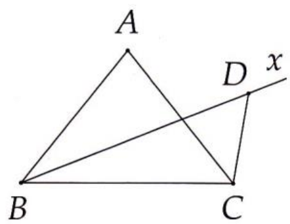
Tương tự ta có $BDC > DAC > 90°$

=> DC < BC, do đó DE < DC < BC.



16. Do Bx nằm giữa BA và BC nên $DBC < ABC$, chú ý D nằm ngoài tam giác ABC nên CA nằm giữa CD và CB, do đó $DCB > ACB$

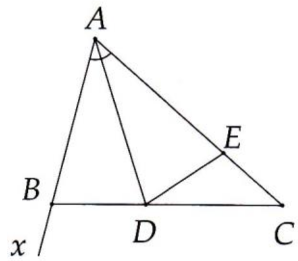
Từ đó DCB > DB $DCB > DBC$ =>DC < DB.



17*. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho AB = AE, chứng minh được $\Delta ABD = \Delta AED$ (c.g.c).

=> $DEC > xBD > ACB$ và DB = DE.

Từ đó DB = DE < DC.

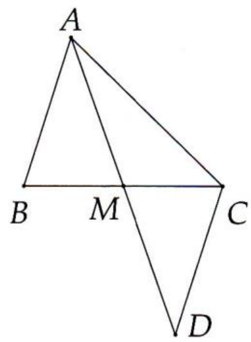


18*. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho MA = MD, chứng minh được $\Delta MAB = \Delta MDC$ (c.g.c).

$MAB = MDC$ => , chú ý rằng

CD = AB < AC => $MAC < MDC$

Do đó $MAB > MAC$

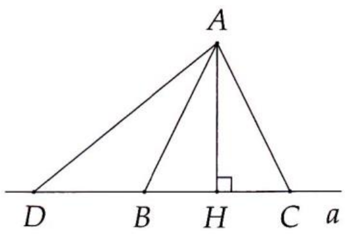


CHỦ ĐỀ 2. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN, ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên

Định lý 1. Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất



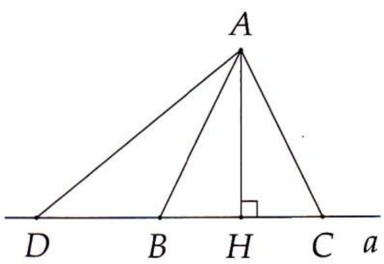
AH $\perp$a => AH < AC, AH < AD

(Với C, D là điểm bất kì thuộc a)

2. Quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu

Định lý 2. Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó:

• Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.



AH $\perp$a, HD > HC => AD > AC.

• Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.

AH $\perp$ a, AD > AC => HD > HC.

• Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau và ngược lại, nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

AB = AC ⇔ HB = HC (hình vẽ).

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. So sánh hai đường xiên hoặc hai hình chiếu

Phương pháp giải: Vận dụng *Định lý 2.*

1A. Cho tam giác ABC có AB <AC. Kẻ AH vuông góc với BC tại H. So sánh độ dài HB và HC

1B. Cho tam giác MNP có MN = 3 cm, MP = 4 cm. Kẻ MK vuông góc với NP tại K. So sánh độ dài KN và KP.

2A. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N.

a) Chứng minh MN < BN < BC.

b) Có thể nói BN có hình chiếu xuống AC là AN còn CM có hình chiếu xuống AC là AC nên CM > BN được không?

2B. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh AC lấy các điểm M, N (M nằm giữa A, N). So sánh các độ dài BM, BN, BC.

3A. Cho tam giác ABC có AB > AC. Kẻ AH vuông góc với BC tại H, điểm D thuộc đoạn AH. So sánh:

a) DB và DC; b) DB và AB.

3B. Cho tam giác MNP có MN < MP. Kẻ MK vuông góc với NP tại K. Trên tia đối của tia MK lấy điểm Q. So sánh độ dài QN và QP,

Dạng 2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên

Phương pháp giải: Sử dụng định lý đường vuông góc ngắn hơn đường xiên (từ một điểm đến cùng một đường thẳng).

4A. Cho tam giác ABC, điểm D nằm giữa A và C (BD không vuông góc với AC). Gọi E và F là chân các đường vuông góc kẻ từ A và C đến đường thẳng BD. So sánh AC với tổng AE + CF.

4B. Cho tam giác ABC, điểm M nằm giữa B và C. Gọi H và K là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến các đường thẳng AB và AC. So sánh BC và tổng MH + MK.

5. Cho tam giác ABC không vuông. Kẻ BD vuông góc với AC tại D, kẻ CE vuông góc với AB tại E. Chứng minh BD + CE < AB + AC

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

6. Cho tam giác ABC vuông tại B. Trên cạnh BC lấy các điểm D và E (D nằm giữa B và E)

a) So sánh các độ dài các đoạn thẳng AB, AD, AE, AC.

b) Vẽ BI, BK, BH lần lượt vuông góc với AD, AE, AC. So sánh các góc ABH, ABK, ABI.

7. Cho tam giác OMN vuông tại O. Lấy điểm P trên cạnh OM, điểm Q trên cạnh ON. Chứng minh PQ < MQ < MN.

8. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC, điểm D thuộc cạnh BC (D khác H). Chứng minh AH < AD < AB.

9. Cho tam giác ABC có B và C là các góc nhọn. Gọi D là điểm bất kì thuộc cạnh BC, gọi H và K là chân các đường vuông góc kẻ từ B và c đến đường thẳng AD. So sánh:

a) BH và BD. Có khi nào BH bằng BD không?

b) HC và BK khi BD < $\frac{BC}{2}$

10. Cho tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm của AC. Gọi E và F là chân các đường vuông góc kẻ từ A và C đến đường thẳng BM.

a) Chứng minh ME = MF.

b) So sánh AB và $\frac{BE+BF}{2}$

11. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D.

a) So sánh AD và AB.

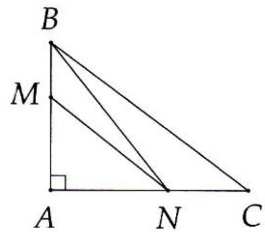
b) Vẽ BE $\perp$ AC và DF $\perp$ AB. So sánh BE và DF

HƯỚNG DẪN

1A. Đường xiên AB < AC nên hình chiến HB < HC.

1B. Đường xiên MN < MP nên hình chiếu KN < KP.

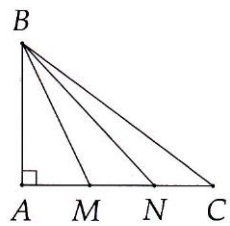
2A. Hình chiếu AM < AB nên đường xiên MN < BN.



Hình chiếu AN < AC nên đường xiên BN < BC.

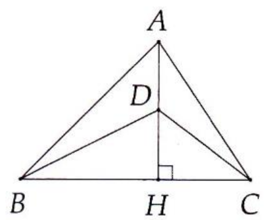
Bởi vậy MN < BN < BC.

b) Không được vì M và B khác nhau.



2B. Tương tự **2A**, chú ý: AM < AN < AC.

3A. a) Đường xiên AB > AC nên hình chiếu HB > HC.

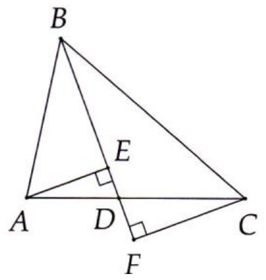


Hình chiếu HB > HC nên đường xiên

DB > DC.

b) BA và BD có hình chiếu lần lượt là

AH và DH. Mà AH > BH => BA > BD.



3B. Tương tự **3A**, chú ý KN < KP.

4A. AE là đường vuông góc, AD là đường

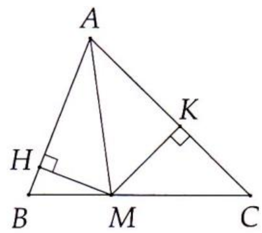
xiên nên AE < AD.

CF là đường vuông góc, CD là đường

xiên nên CF < CD.

Do đó AE + CF < AD + CD = AC.

4B. Tương tự **4A**, chú ý MH < MB, MK < MC.



5. Chứng minh được:

BD < AB, CE < AC.

Do đó BD + CE < AB + AC.

6. a) Tương tự **2B**, ta có:

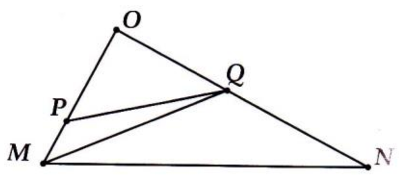
AB < AD < AE < AC.

b) Chứng minh được $ADB > AEB > ACB$

Mà $ADB = ABI; AEB = ABK; ACB = ABH$

Suy ra $ABH < ABK < ABI$

7. Do = POQ 90° nên MPQ là góc tù.



Xét ΔMPQ có MPQ lớn nhất nên

MQ > PQ.

Xét ΔMQN có MQN tù nên

MN > MQ.

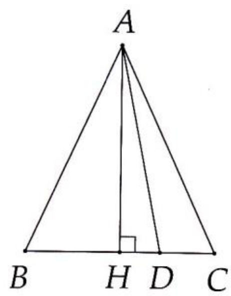
8. Ta có AH < AD (quan hệ đường

vuông góc, đường xiên).

Nếu D thuộc đoạn HC => HD < HC,

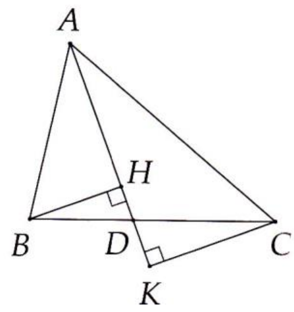
do đó AD < AC = AB.

Nếu D thuộc đoạn HB => HD < HB



=> AD < AB. Bởi vậy AH < AD < AB.

9. a) Ta có BH $\leq$ BD (đương vuông góc ngắn hơn mọi đường xiên).



BH = BD ⇔ H $\equiv$ D ⇔ AD $\perp$ BC.

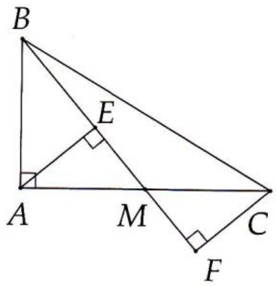
b) Xét ΔMPQ có $BK^2 = BH^2 + HK^2$.

Xét ΔCHK có $CH^2 = CK^2 + HK^2$.

Mà BD < $\frac{BC}{2}$ nên BH < CK.

Vậy BK < HC.

10. a) Chứng minh được



ΔMAE = ΔMCF (ch- gn)

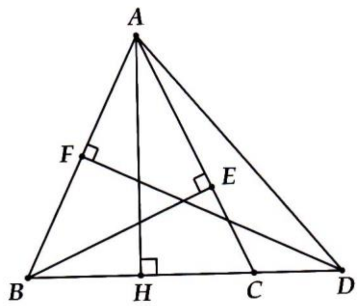
=> ME = MF

b) Do ME = MF nên BE + BF

= BM - ME + BM + MF = 2BM.

Mặt khác AB < BM => AB < $\frac{BE+BF}{2}$

11. a) Kẻ AH $\perp$ BC tại H



Ta có AB = AC => HB = HC.

Lại có D thuộc tia đối của tia CB

Vậy HD > HC =HB => AD > AB.

b) Diện tích ΔABC = $\frac{1}{2}$ AH. BC;

Diện tích ΔABD = $\frac{1}{2}$AH.BD.

Mà BC < BD.

Suy ra Diện tích ΔABC < Diện tích ΔABD.

Lại có:

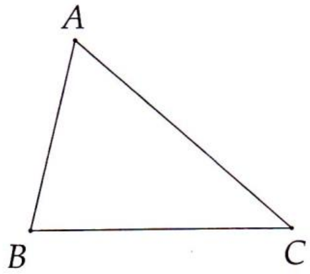
Diện tích ABC = $\frac{1}{2}$ AC.BE; Diện tích ΔABD = $\frac{1}{2}$AB.DF

Suy ra $\frac{1}{2}$ AC.BE < $\frac{1}{2}$AB.DF. Từ đó, ta có: BE < DF.

CHỦ ĐỀ 3. QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC
BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Trong một tam giác, độ dài của một cạnh bao giờ cũng lớn hơn giá trị tuyệt đối của hiệu và nhỏ hơn tổng các độ dài của hai cạnh còn lại. Cụ thể:



$|AB - AC| < BC < AB + AC$.

II .BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Khẳng định có tồn tại hay không một tam giác biết độ dài ba cạnh

Phương pháp giải:

- Tồn tại một tam giác có độ dài ba cạnh là a, b, c nếu:

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{cases} \text{ hoặc } |b - c| < a < b + c$$

- Trong trường hợp xác định được a là số lớn nhất trong ba số a, b, c thì điều kiện để tồn tại tam giác chỉ cần: $a < b + c$.

1A. Bộ ba độ dài nào dưới đây có thể tạo thành độ dài của 3 cạnh trong tam giác?

a) 5 cm; 10 cm; 12 cm, b) 1 m; 2 m; 3 m.

c) 6 m; 9 m; 8 m.

1B. Bộ ba độ dài nào dưới đây có thể tạo thành độ dài của 3 cạnh trong tam giác?

a) 3 cm; 4 cm; 5 cm. b) 2 m; 2 m; 5 m.

c) 5 m; 10 m; 15 m.

2A. Một tam giác cân có một cạnh bằng 6 cm. Tính hai cạnh còn lại, biết chu vi của tam giác đó bằng 20 cm

2B. Tính chu vi của một tam giác cân biết độ dài hai cạnh của nó là 3,9 cm và 7,9 cm.

3A. Cho tam giác ABC có BC = 1 cm, AC = 7 cm. Tìm độ dài cạnh AB, biết độ dài này là một số nguyên (cm).

3B. Cho tam giác MNP có MN = 1 m, NP = 3 m, độ dài cạnh MP là một số nguyên. Tính độ dài MP.

Dạng 2. Chứng minh các bất đẳng thức về độ dài

Phương pháp giải: Sử dụng bất đẳng thức tam giác và các biến đổi về bất đẳng thức.

- Cộng cùng một số vào hai vế của bất đẳng thức:

a< b => a + c < b + c.

- Cộng từng vế hai bất đẳng thức cùng chiều:

$$\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$$

4A. tam giác ABC, điểm M thuộc cạnh AB.

a) So sánh MC với AM + AC.

b) Chứng minh MB + MC < AB + AC.

4B. Cho tam giác ABC, trên tia đối của tia AC lấy điểm K.

a) So sánh AB với KA + KB.

b) Chứng minh AB + AC < KB + KC.

5A. Cho tam giác ABC, điểm M bất kỳ nằm trong tam giác.

a) So sánh MB + MC với BC

b) Chứng minh MA + MB + MC > $\dfrac{AB + BC + CA}{2}$

5B. Cho tam giác ABC, điểm D thuộc cạnh BC.

a) So sánh AD với BA + BD.

b) Chứng minh AD < $\dfrac{AB + BC + CA}{2}$

6A. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho BD = BA. Chứng minh DC > AB

6B. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia CA lấy điểm D. Chứng minh DB > DC.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

7. Có hay không tam giác với độ dài các cạnh là

a) 2 m; 3 m; 5 m? b) 6 cm; 8 cm; 10 cm?

8. Tìm chu vi của tam giác cân, nếu biết hai cạnh của nó bằng:

a) 7 cm và 3 cm; b) 8 cm và 2 cm.

9. Cho tam giác ABC có AB = 1 cm, AC = 4 cm, độ dài cạnh BC là một số nguyên. Tính độ dài BC.

10. Cho tam giác ABC điểm O nằm trong tam giác, tia BO cắt cạnh AC tại I

a) So sánh OA và IA + IO, từ đó suy ra OA + OB < IA + IB;

b) Chứng minh OA + OB < CA + CB.

c) Chứng minh

$$\frac{AB+BC+CA}{2} < OA + OB + OC < AB + BC + CA.$$

11. Cho tam giác ABC có AB < AC. Tia phân giác góc A cắt cạnh BC tại D, trên cạnh AC lấy E sao cho AE = AB.

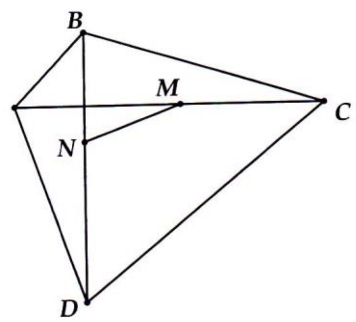
a) So sánh DB và DE.

b) Chứng minh AC - AB > DC - DB.

12* Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC.

a) Chứng minh $AM < \frac{AB+AC}{2}$

b) Cho bốn điểm A, B, C, D như hình vẽ. Gọi thứ tự là trung điểm của AC và BD. Chứng minh AB + BC + C + DA > 4MN



HƯỚNG DẪN

1A. a) Có, vì 12 < 5 + 10. b) Không, vì 1 + 2 = 3

c) Có, vì 9 < 6 + 8.

1B. a) Có, vì 5 < 3 + 4. b) Không, vì 5 > 2 + 2

b) Không, vì 5 +10 = 15.

2A. Nếu cạnh đã cho (6cm) là cạnh đáy thì hai cạnh còn lại là 7 cm và 7 cm, thỏa mãn bất đẳng thức tam giác.

Nếu cạnh đã cho (6 cm) là cạnh bên thì hai cạnh còn lại là 6 cm và 8 cm, thỏa mãn bất đẳng thức tam giác.

2B. Nhận xét: Cạnh thứ ba của tam giác cân bằng một trong hai cạnh kia.

Loại trường hợp cạnh thứ ba bằng 3,9 cm vì 3,9 + 3,9 < 7,9.

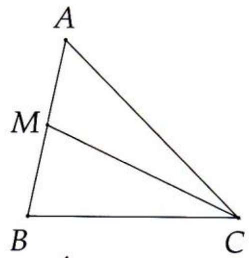
Trường hợp cạnh thứ ba bằng 7,9 cm thỏa mãn bất đẳng thức tam giác vì 7,9 < 7,9 + 3,9. Từ đó tính được chu vi của tam giác là 19,7 cm.

3A. Chú ý |AC - BC| < AB < AC + BC => 6 < AB <8. Do AB là số nguyên nên AB = 7 cm.

3B. Tương tự **3A**, ta có

$2 < MP < 4 \Rightarrow MP\ 3cm$

4A. a) ΔAMC có $MC < AM + AC$.



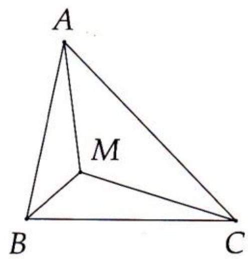
b) Dùng kết quả câu a, ta có

$MB + MC' < MB + MA + AC$

$= AB + AC$.

4B. Tương tự **4A**.

5A. a) ΔMBC có $MB + MC > BC$.



b) Tương tự ý a, ta có

$MA + MC > AC$, $MA + MB > AB$.

Cộng từng vế của ba bất đẳng thức

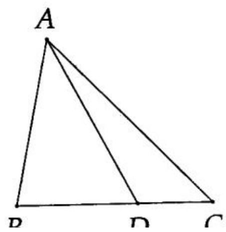
⇨ $2(MA + MB + MC) > AB + BC + CA$.

$$MA + MB + MC > \frac{AB + BC + CA}{2}$$

Chú ý rằng kết quả trên vẫn đúng khi M ở ngoài tam giác hoặc ở trên hai cạnh AB hoặc AC. Riêng khi M thuộc BC thì

$BM + MC = BC$

5B. a) ΔABD có $AD < BA + BD$

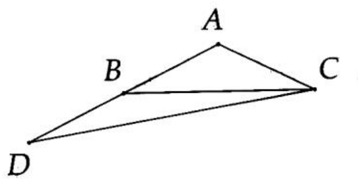


b) Tương tự ý a, ta có : $AD < CA + CD$

Cộng trừ hai vế bất đẳng thức

$\Rightarrow 2AD < BA + BC + AC \Rightarrow$ ĐPCM.

6A. ΔADC có $DC > AD - AC = AB$



6B. Tương tự **6A**.

7. a) Không, vì $2 + 3 = 5$.

b) Có, vì $6 + 8 > 10$.

8. Tương tự **2B**, ta có:

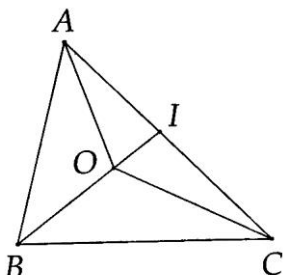
a) Chu vi tam giác là $7 + 7 + 3 = 17cm$.

b) Chu vi tam giác là $8 + 8 + 2 = 18cm$.

9. Tương tự 3A, ta có $3 < BC < 5 \Rightarrow BC = 4cm$.

10. a) ΔOIA có $OA < IA + IO$, do đó

$OA + OB < IA + IO + OB = IA + IB$.



b) Tương tự ý a, chứng minh được

IA + IB < CA + CB.

Bởi vậy OA + OB < IA + IB < CA + CB.

c) Chứng minh được các bất đẳng thức

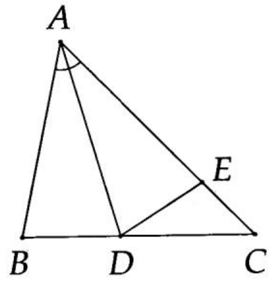
tương tự OB + OC < AB + AC, OC + OA

< BA + BC.

Cộng từng vế của ba bất đẳng thức, ta được

OA + OB + OC < AB + BC + CA.

Kết hợp với kết quả của **5A**, ta có ĐPCM



11. a) Chứng minh được

ΔADB = ΔADE (c.g.c) => DB = DE.

b) ΔEDC có EC > DC - DE.

Chú ý rằng AC - AB = AC - AE =

và DC - DE = DC - DB.

Từ đó ta có AC - AB > DC - DB.

12*. a) Trên tia đối của tia MA lấy điểm D

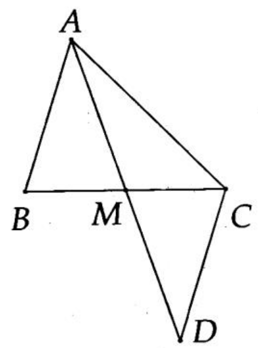
sao cho MD = MA. Chứng minh được

ΔMAB = ΔMDC (c.g.c) => AB = CD.

ΔACD có AC + CD > AD, chú ý rằng

AD = 2AM, AB = CD nên

2AM < AB + AC =>AM < $\dfrac{AB+AC}{2}$



b) Sử dụng kết quả ý a) ta có:

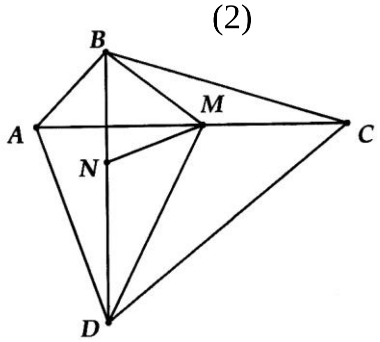
BA + BC > 2BM, DA + DC > 2DM.

Suy ra AB + BC + CD + DA > 2(MB + MD). (1)

Trong ΔBMD, lại có

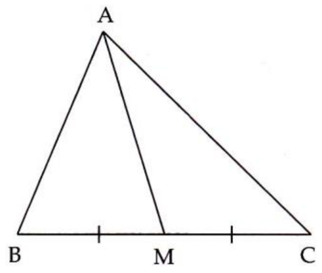
MB + MD > 2MN . (2)

Từ (1) và (2), ta có ĐPCM



CHỦ ĐỀ 4. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT



1- Đường trung tuyến của tam giác

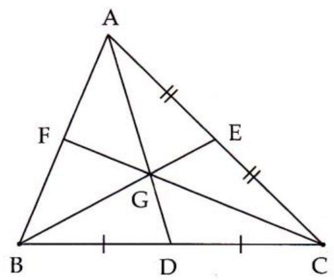
• Đoạn thẳng AM nối đỉnh A của tam giác ABC với trung điểm M của cạnh. BC gọi là đường trung tuyến của tam giác ABC.

• Mỗi tam giác có ba đường trung tuyến.

2. Tính chất ba đường trang tuyến của tam giác

Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm.

Điểm đó gọi là trọng tâm của tam giác đó, điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.



Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\frac{AG}{AD}=\frac{BG}{BE}=\frac{CG}{CF}=\frac{2}{3}$

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Sử dụng tính chất trọng tâm của tam giác

Phương pháp giải: Sử dụng linh hoạt các tỉ số liên quan tới trọng tâm của tam giác.

Ví dụ. Nếu ΔABC có trung tuyến AM và trọng tâm G thì ta có

AG = $\frac{2}{3}$ = AM , AG = 2GM; GM = $\frac{1}{3}$AM; ...

1A. Cho ΔABC có hai đường trung tuyến BD, CE

a) Tính các tỉ số $\frac{BG}{BD},\frac{CG}{CE}$

b) Chứng minh BD + CE > $\frac{3}{2}$ BC

1B. Cho ΔABC có BC = 8 cm, các đường trung tuyến BD, CE cắt nhau tại G. Chứng minh BD + CE > 12 cm.

2A. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BP, CQ cắt nhau tại G. Trên tia đối của tia PB lấy điểm E sao cho PE = PG. Trên tia đối của tia QG lấy điểm F sao cho QF = QG. Chứng minh:

a) GB = GE, GC = GE; b) EF = BC và EF//BC.

2B. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến AD, BE cắt nhau tại G. Trên tia đối của tia DG lấy điểm M sao cho D là trung điểm của đoạn thẳng MG. Trên tia đối của tia EG lấy điểm N sao cho E là trung điểm GN. Chứng minh:

a) GN = GB, GM = GA; b) AN = MB và AN // MB.

Dạng 2. Chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác

Phương pháp giải: Để chứng minh một điểm là trọng tâm của một tam giác, ta có thể dùng một trong hai cách sau:

- Chứng minh điểm đó là giao điểm của hai đường trung tuyến trong tam giác.
- Chứng minh điểm đó thuộc một đường trung tuyến của tam giác và thỏa mãn một trong các tỉ lệ về tính chất trọng tâm của tam giác.

3A. Cho ΔABC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho AD = AB. Lấy G thuộc cạnh AC sao cho AG = $\frac{1}{3}$ AC. Tia DG cắt BC tại E. Qua E vẽ đường thẳng song song với BD, qua D vẽ đường thẳng song song với BC, hai đường thẳng này cắt nhau tại F. Gọi M là giao điểm của EF và CD.

Chứng minh:

a) G là trọng tâm ΔBCD;

b) $\Delta BED = \Delta FDE$, từ đó suy ra EC = DF;

c) $\Delta DMF = \Delta CME$;

d) B, G, M thẳng hàng.

3B. Cho ΔABC. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho BM = 2CM. Vẽ điểm D sao cho C là trung điểm của AD. Gọi N là trung điểm của BD, Chứng minh:

a) M là trọng tâm tam giác ABD;

b) Ba điểm A, M, N thẳng hàng;

c) Đường thẳng DM đi qua trung điểm của AB.

4A. Cho ΔABC với đường trung tuyến AD. Trên tia AD lấy điểm E sao cho AD = DE, trên tia BC lấy điểm M sao cho BC = CM. Chứng minh C là trọng tâm của ΔAEM.

4B. Cho ΔABC. Trên đường trung tuyến AM của tam giác đó, lấy hai điểm D, E sao cho AD = DE = EM. Chứng minh E là trọng tâm của ΔABC.

5A. Cho ΔABC. Vẽ trung tuyến BM. Trên tia BM lấy hai điểm G, K sao cho BG = $\frac{2}{3}$BM và G là trung điểm của BK. Gọi E là trung điểm CK; GE cắt AC tại I Chứng minh:

a) I là trọng tâm của ΔKGC; b) CI = $\frac{1}{3}$ AC.

5B. Cho ΔABC, M là trung điểm AC. Trên đoạn BM lấy điểm K sao cho KM = $\frac{1}{2}$ KB. Điểm H thuộc tia đối của tia MK sao cho BH = 2BK. Gọi I là điểm thuộc cạnh AC và IC =$\frac{1}{3}$ CA. Đường KI cắt HC ở E.

a) Chứng minh I là trọng tâm của ΔHKC và E là trung điểm của HC ở E

b) Tính các tỉ số $\frac{IE}{IK}, \frac{IC}{MC}$. Chứng minh ba điểm H, I, F thẳng hàng (I là trung điểm KC)

6A. Cho hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Đoạn thẳng AM, AN cắt BD lần lượt tại I và K. Chứng minh:

a) I là trọng tâm của ΔABC và K là trọng tâm của ΔADC;

b) BI = IK = KD.

6B. Cho tam giác ABC, đường trưng tuyến BD. Trên tia đối của tia DB lấy điểm E sao cho DE = BD. Gọi P, Q lần lượt là điểm trên BE sao cho BP = PQ = QE. Chứng minh:

a) CP, CQ cắt AB, AE tại trung điểm của AB,AE.

b) CP//AQ và CQ//AP.

Dạng 2. Vấn đề đường trung tuyến trong tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều...

Phương pháp giải: Chú ý những tính chất của tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều.

7A. Cho ΔABC vuông tại A, trung tuyến AM. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho MD = MA.

a) Tính ABD

b) Chứng minh $\Delta ABD = \Delta BAC$.

c) Chứng minh AM = $\frac{1}{2}$BC

7B. Cho ΔABC vuông tại A, AB = 6 cm, AC = 8 cm. Tính khoảng cách từ trọng tâm G của ΔABC tới các đỉnh, của tam giác.

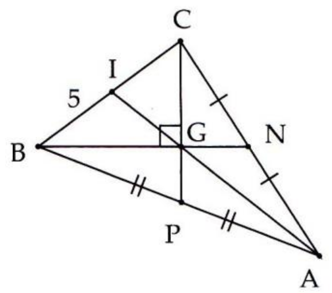
8A. Cho ΔABC, trung tuyến AM = $\frac{1}{2}$ BC.

a) Chứng minh $BMA = 2MAC$ và $CMA = 2MAB$.

b) Tính BAC

8B. Cho hình vẽ, biết ΔABC có hai đường trung tuyến BN,CP vuông góc với nhau tại G. Tia AG cắt BC tại I. BC = 5 cm.

Tính độ dài GI,AG.



9A. Cho ΔABC cân tại A có đường trung tuyến AM.

a) Chứng minh AM $\perp$BC.

b) Biết AB = 10 cm, BC = 12 cm. Tính độ dài đoạn vuông góc kẻ từ B xuống AC.

9B. Cho ΔABC có AB = BC = 13 cm, AC = 10 cm, Đường trung tuyến BM, trọng tâm. G. Tính độ dài GM.

10A. Cho ΔABC có hai đường trung tuyến BM, CN.

a) Chứng minh nếu ΔABC cân tại A thì BM = CN.

b) Ngược lại nếu BM = CN, chứng minh:

i) GB = GC, GN = GM;

ii) BN = CM;

iii) ΔABC cân tại A

10B. Cho ΔABC có hai đường trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G. Biết BM = CN. Chứng minh AG $\perp$BC.

11A. Cho ΔABC có ba đường trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G.

Biết AM = BN = CP. Chứng mình ΔABC đều.

11B. Cho ΔABC có ba đường trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G. Biết AG = BG = CG. Chứng minh ΔABC đều.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

12. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho

AE = 2AB. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho BD = BC. Chứng minh:

a) A là trọng tâm của ΔCDE;

b) Đường thẳng CA đi qua trung điểm của DE.

13. Cho bốn điểm A, B,C, D không thẳng hàng như hình vẽ. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Trung điểm của BD và AC lần lượt là M, N. Chứng minh AC + DB > 2MN.

14. Cho ΔABC vuông tại A, AB = 6 cm, AC = 8 cm.

a) Tính BC.

b) Đường thẳng đi qua trung điểm I của BC và vuông góc với BC cắt AC tại D. Chứng minh $CBD = DCB$.

c) Trên tia đối của tia DB lấy điểm E sao cho DE = DC. Chứng minh ΔBCE vuông.

15. Cho ΔABC vuông tại A, trung tuyến AM. Biết AB = 6cm,

AC = 8cm.

a) Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho MD = MA. Chứng minh ΔAMB = ΔDMC.

b) Chứng minh ΔBAC = ΔDCA.

c) Tính AM.

D0 Chứng minh AM < $\dfrac{AB+AC}{2}$

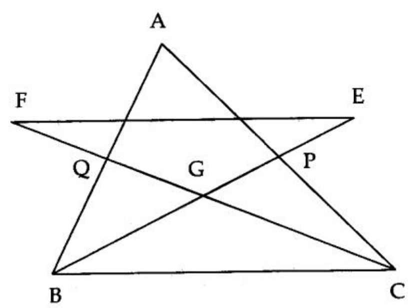
16. Cho ΔABC có hai đường trung tuyến AM, BN vuông góc với nhau, trọng tâm G. Biết AM = 4,5 cm, BN cm. Tính độ dài các cạnh của ΔABC

<u>HƯỚNG DẪN</u>

1A. Gọi giao điểm của hai đường trung tuyến BD,CE là G. ΔGBC có: GB + GC > BC (bất đẳng thức tam giác).

Mà GB = $\frac{2}{3}$BD, GC = $\frac{2}{3}$CE nên: $\frac{2}{3}$BD + $\frac{2}{3}$CE > BC.

Do đó BD + CE > $\frac{3}{2}$ BC.



1B. Tương tự **1A.**

BD + CE > $\frac{3}{2}$. 8 = 12 cm.

2A. a) Vì G là trọng tâm ΔABC nên BG = 2GP, CG = 2GQ.

Lại có PE = PG, QF = QG

nên GE = 2GP, GF = 2GQ.

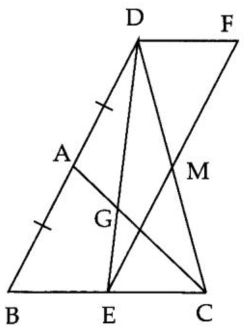
Do đó BG = GE,CG = GF.

b) Suy ra ΔGBC = ΔGEF (c.g.c)

Từ đó ta có EF = BC và $GEF = GBC$

=> EF // BC.

2B. Tương tự **2A.**



3A. a) Vì AD = AB nên A là trung điểm BD

=> CA là đường trung tuyến của ΔBCD

Mà AG = $\frac{1}{3}$AC => G là trọng tâm ΔBCD

b) Ta có : BD || EF => $BDE = DEF$

và DE || BC => $BED = EDF$

=> ΔBED = ΔFDE (g.c. g) => BE = DF

(hai cạnh tương ứng) (1). Mặt khác do G là trọng tâm ΔBCD nên E là trung điểm BC

=> BE = EC (2).

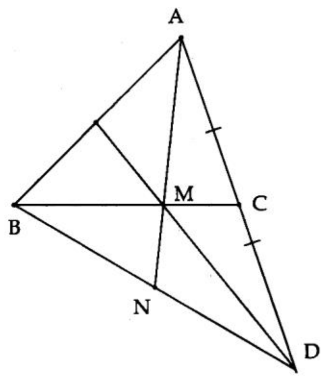
Từ (1) và (2) suy ra EC = DF.

c) ΔDMF = ΔCME (g.c.g).

d) Do ΔDMF = ΔCME => MD = MC => M là trung điểm DC => BM là trung tuyến của ΔBCD.

=> G $\in$ BM => B, G, M thẳng hàng.

3B. Tương tự **3A.**



a) M thuộc đường trung tuyến BC của ΔABD mà BM = 2CM nên M là trọng tâm ΔABD.

Do đó M thuộc trung tuyến AN.

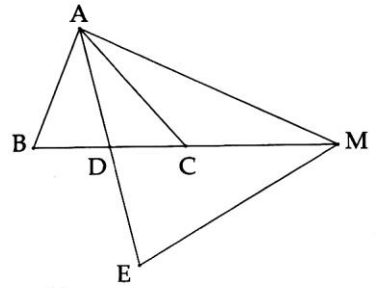
=> Ba điểm A, M, N thẳng hàng.

b) DM là trung tuyến thứ ba của ΔABD nên DM đi qua trung điểm của AB.

4A. Theo đề bài ta có AD = DE nên C thuộc MD là đường trung tuyến của tam giác AEM (1)

Mặt khác ta có BC = 2CD và BC = CM nên CM = 2CD (2)

Từ (1) và (2) suy ra C là trọng tâm của ΔAEM.



4B. Từ giả thiết AD = DE = EM ta có AE = $\frac{2}{3}$AM.

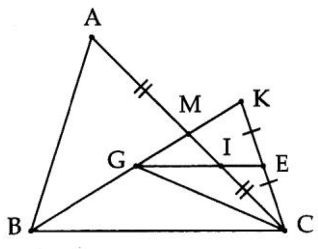
Mà E thuộc trung tuyến AM nên E là trọng tâm của ΔABC.

5A. a) Theo đề bài BG = $\frac{2}{3}$BM.

Suy ra BG = 2GM => GK = 2GM

=>M là trung điểm GK.

Do đó I là giao điểm ba đường trung tuyến trong ΔKGC.



b) I là trọng tâm ΔKGC nên

CI = $\frac{2}{3}$CM= $\frac{2}{3}.\frac{1}{2}$AC = $\frac{1}{3}$AC.

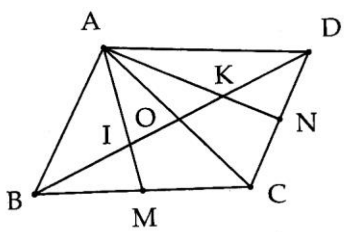
5B. Tương tự **5A.**

a) M là trung điểm KH. Suy ra I là trọng tâm của ΔHKC. Suy ra KI là trung tuyến ΔKHC.

b) $\frac{IE}{IK}=\frac{1}{2},\frac{IC}{MC}=\frac{2}{3}$. Suy ra HI cũng là trung tuyến ΔKHC.

6A. a) ΔABC có hai đường trung BO, AM cắt nhau tại I nên I là trọng tâm của ΔABC .

Tương tự ta có K là trọng tâm của ΔADC.



b) Từ ý a) suy ra ta có:

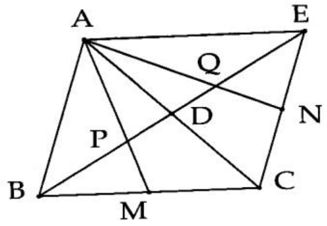
BI =$\frac{2}{3}$ BO, DK = $\frac{2}{3}$DO

Mặt khác BO = DO

=> BI = DK = $\frac{2}{3}$BO = $\frac{1}{3}$BD => IK = $\frac{1}{3}$BC. Suy ra ĐPCM.

Do đó BI = IK = KD.

6B. Tương tự **6A**.



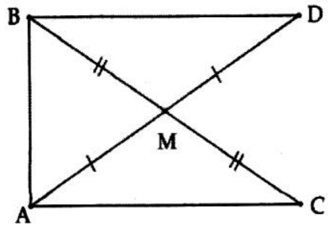
a) Chứng minh được P,Q lần lượt là trọng tâm ΔABC, ΔAEC.Suy ra ĐPCM.

b) Chú ý ΔADP = ΔCQD và ΔADQ = ΔCDP.

7A. a) ΔAMC = ΔDMB (c.g.c)

=> $ADB = DAC$ => BD //AC Mà AB $\perp$AC nên AB $\perp$BD

=> ABD = 90°.

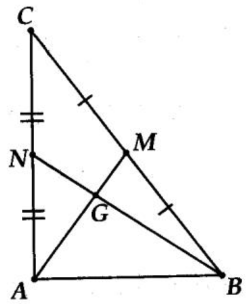


b) ΔABD = ΔBAC (c.g.c).

c) ΔABD = ΔBAC (c.g.c) => AD = BC.

Mà AM = $\frac{1}{2}$AD => AM = $\frac{1}{2}$BC.

7B. Áp dụng đinh lý Pytago trong tam giác vuông ABC tínhđược BC = 10cm



Gọi M là trung điểm của BC.

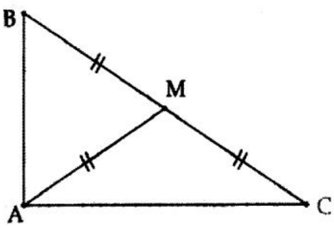
Do đó AM = 5cm

=> AG = $\frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.5 = \frac{10}{3}cm$

Tương tự tính được

$BG = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3}\sqrt{AB^2 + AN^2} = \frac{2}{3}\sqrt{52}$ cm

và $CG = \frac{2}{3}\sqrt{73}$cm.



8A. a) Ta có: MA = MB = MC = $\frac{1}{2}$ BC

=> ΔMAB, ΔMAC là tam giác cân tại M.

Do đó

$BMA = MAC + MCA = 2MAC, CMA = MAB + MBA = 2MAB$

b) Theo ý (a) ta có $2.(MAB + MAC) = MBA + CMA = 180°$

=> BAC = 90°.

8B. Vì GI là đường trung tuyến kẻ từ G đến BC

=> GI = $\frac{1}{2}$BC = $\frac{1}{2}$. 5 = 2,5 cm.

Lại có AI là đường trung tuyến của ΔABC, G là trọng tâm => AG = 2GI = 2.2,5 = 5cm.

9A. a) ΔABM = ΔACM (c.c.c) $AMB = AMC$ = 90° => AM $\perp$ BC.

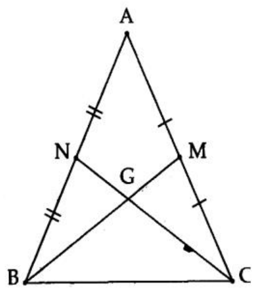
b) BC = 12cm => BM = 6cm. Áp dụng Định lí Pytago cho tam giác vuông AMB, ta tính được: AM = 8cm.

Vẽ BC. Chứng minh được dt ΔABC = $\frac{1}{2}$ BC. AM = $\frac{1}{2}$AC. BN.

Từ đó tính được BN = 9,6cm.

9B. Tương tự **9A.** BM = 12cm

=> GM = $\frac{1}{3}$ BG = $\frac{1}{3}$. 12 = 4cm.



10A. a) ΔBMC = ΔCNB (c.g.c) => BM = CN.

b) i) Do G là trọng tâm ΔABC nên:

GB = $\frac{2}{3}$BM,GM = $\frac{1}{3}$BM,

GC = $\frac{2}{3}$CN, GN = $\frac{1}{3}$CN

Mà BM = CN nên GB = GC,GN = GM.

ii) Từ ý i) suy ra ΔGBN = ΔGCM (c.g.c) => BN = CM.

iii) Vì BN = CM nên BN = CM => AB = AC .

Do đó ΔABC cân tại A.

10B. Tương tự **10A**.

Chứng minh được tam giác ABC cân tại A.

Kéo dài AG cắt BC tại M. Ta có ΔAMB = ΔAMC (c.c.c).

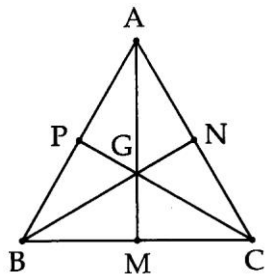
Suy ra ĐPCM.

11A. Ta có BN = CP nên GB = GC,GP = GN.

Tương tự **10A**, ta có AB = AC.

Tương tự, ta có AB = BC.

Vậy AB = BC = CA.



Suy ra ΔABC đều.

11B. Ta có AG = BG = CG và AG = $\frac{2}{3}$AM,

BG = $\frac{2}{3}$BN, CG = $\frac{2}{3}$CP

=> AM = BN = CP. Tương tự **11A** suy ra ĐPCM.

12. Tương tự **3B.** a) Ta có BD = BC,

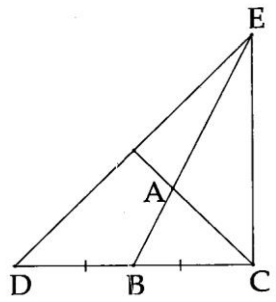
do đó EB là đường trung tuyến của ΔCDE .

Mặt khác AE = 2AB nên A là trọng tâm của

ΔCDE.

b) Vì A là trọng tâm của ΔCDE nên CA

là đường trung tuyến, suy ra ĐPCM



13. Ta có

OD + OA > AD

OA + OB > BC

OB + OC > BC

OC + OD > DC

2 (OA + OB + OC + OD) > AB + BC + CD + DA

Hay 2(AC + BD) > AB + BC + CD + DA.

Sử dụng kết quả của 12 trang 93, ta có:

AB + BC + CD + DA > 4MN.

Suy ra ĐPCM.

Chú ý: Trung điểm G của MN được gọi là trọng tâm của hình ABCD.

14. a) BC = 10 cm.

b) $\Delta BDI = \Delta CDI$ (hai cạnh góc vuông)

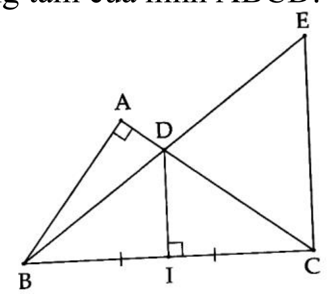
=> $CBD = DCB$

c) Ta có

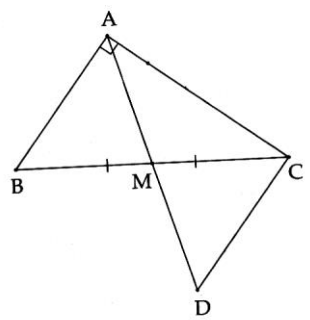
ΔBCD cân tại D => DC = DB.

ΔCDE cân tại D => DE = DC

=> CD = $\frac{1}{2}$BE => ΔBCE vuông tại C



15. a) $\Delta AMB = \Delta DMC$ (c.g.c).



b) Chứng minh được CD ||AB mà

AB $\perp$ AC nên AC $\perp$ DC. Từ đó suy ra

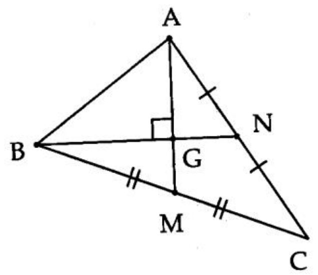
ΔBAC = ΔDCA (hai cạnh góc vuông).

c) AM = 5 cm.

d) Xét ΔABC có BC < AB + AC,

mà BC = 2AM nên AM < $\dfrac{AB+AC}{2}$

16. Vì G là trọng tâm ΔABC nên :



AG = $\frac{2}{3}$AM = $\frac{2}{3}$. 4,5 = 3cm,

BG = $\frac{2}{3}$BN = $\frac{2}{3}$. 6 = 4cm.

ΔABG vuông tại G nên :

$AB^2 = AG^2 + BG^2 = 3^2 + 4^2 = 25$.

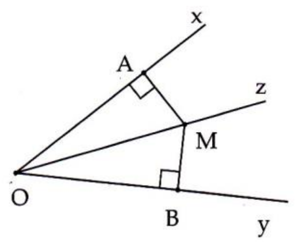
Suy ra AB = 5 cm

CHỦ ĐỀ 5. TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.Định lí thuận

Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.



2. Định lí đảo

Điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Vận dụng tính chất phân giác của một góc để chứng minh các đoạn thẳng bằng nhau

Phương pháp giải: Áp dụng *Định lí thuận.*

1A. Cho ΔABC vuông tại A có AB = 3cm, AC = 6cm. Gọi E là trung điểm AC, tia phân giác của A cắt BC tại D.

a) Tính BC.

b) Chứng minh: ΔBAD = ΔEAD.

c) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC. Chứng minh điểm D cách đều AB và AC.

1B. Cho xOy khác 180°. Trên tia phân giác Ot của xOy lấy điểm M bất kì. Chứng minh điểm M cách đều Ox và Oy.

2A. Cho ΔABC có $A = 120°$. Tia phân giác của A cắt BC tại D. Tia phân giác của ADC cắt AC tại I. Gọi H, K, E lần lượt là hình chiếu của I trên đương thẳng AB, BC, AD. Chứng minh:

a) AC là tia phân giác của DAH.

b) IH = IK

2B. Cho ΔABC. Hai tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh B và đỉnh C cắt nhau tại I. Chứng minh điểm I cách đều hai cạnh AB, AC.

3A. Cho ΔABC có trung tuyến AM đồng thời là đường phân giác. Trên tia AM lấy điểm D sao cho MD = MA. Chứng minh:

a) AB = CD.

b) ΔACD cân tại C.

c) Chứng minh ΔABC cân tại A.

3B. Cho tam giác ABC vuông tại A. Từ một điểm K bất kì trên cạnh BC, vẽ KH $\perp$AC (H$\in$AC). Trên tia đối của tia HK lấy điểm I sao cho HI = HK. Chứng minh:

a) Chứng minh AB //HK;

b) Chứng minh $KAH = IAH$

c) Chứng minh ΔAKI cân,

Dạng 2. Chứng minh một tia là tia phân giác của một góc

Phương pháp giải: Để chứng minh một tia là tia phân giác của một góc, ta có thể sử dụng các cách sau:

Cách 1. Áp dụng Định lí đảo.

Cách 2. Chứng minh hai góc bằng nhau dựa vào hai tam giác bằng nhau.

Cách 3. Đường trung tuyến trong tam giác cân đồng thời là đường phân giác.

4A. Cho xOy có tia phân giác Ot. Trên tia Ot lấy điểm C bất kì. Lấy

$A \in Ox$, $B \in Oy$ sao cho OA = OB. Gọi H là giao điểm của AB và Ot. Chứng minh:

a) CA = CB và CO là phân giác của $\widehat{ACB}$;

b) OC vuông góc với AB tại trung điểm của AB;

c) Biết AB = 6 cm, OA = 5 cm. Tính OH

4B. Cho ΔABC, AB = AC. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên cạnh AC lấy điểm E sao cho AD = AE. Gọi M là giao điểm của BE và CD. Chứng minh:

a) BE = CD;

b) $\Delta BMD = \Delta CME$;

c) Đường vuông góc với OE tại E cắt Ox, Oy lần lượt tại M, N. Chứng minh MN / / AC //BD.

5A. Cho $\widehat{xOy}$. Lấy các điểm A,B thuộc tia Ox sao cho OA > OB. Lấy các điểm C, D thuộc Oy sao cho OC = OA, OD = OB. Gọi E là giao điểm của AD và BC. Chứng minh.:

a) AD = BC ;

b) $\Delta ABE = \Delta CDE$;

c) OE là tia phân giác của góc xOy.

5B. Cho góc nhọn xOy. Trên cạnh Ox lấy điểm A và trên cạnh Oy lấy điểm B sao cho OA = OB. Đường vuông góc với Ox kẻ từ A cắt Oy tại điểm C. Đường vuông góc với Oy kẻ từ B cắt Ox tại D và cắt AC tại I. Đường vuông góc với Ox kẻ qua D cắt Oy tại E. Đường vuông góc với Oy kẻ qua C cắt Ox tại F và cắt DE tại J.

a) Chứng minh OI là tia phân giác $\widehat{xOy}$.

b) Chứng minh OC = OD. Từ đó suy ra OJ là tia phân giác của $\widehat{xOy}$

c) Chứng minh ba điểm O, I, J thẳng hàng.

6A. Cho ΔABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A dựng tia $Mx \perp BC$. Trên tia Mx lấy E sao cho ME = MB.

a) Tam giác BEC là tam giác gì?

b) Gọi H và K là chân các đường vuông góc kẻ từ E đến các đường thẳng AB, AC. Chứng minh $\widehat{BEH} = \widehat{CEK}$.

c) Chứng minh rằng AE là tia phân giác của góc A

6B. Cho ΔABC vuông tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A dựng ΔBCD vuông cân tại D. Hạ DI $\perp$ AB, DH $\perp$ AC.

Chứng minh AD là tia phân giác của A

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

7. Cho tam giác ABC vuông tại A có $B = 60°$. Trên cạnh BC lấy điểm H sao cho HB = AB. Đường thẳng vuông góc với BC tại H cắt AC tại D. Chứng minh:

a) BD là tia phân giác của ABC; b) ΔBDC cân.

8. Cho xOy khác góc bẹt.

a) Từ điểm M trên tia phân giác của xOy, kẻ các đường vuông góc MA, MB đến hai cạnh Ox, Oy (A $\in$ Ox, B $\in$ Oy), OM cắt AB tại H. Chứng minh AB $\perp$ OM.

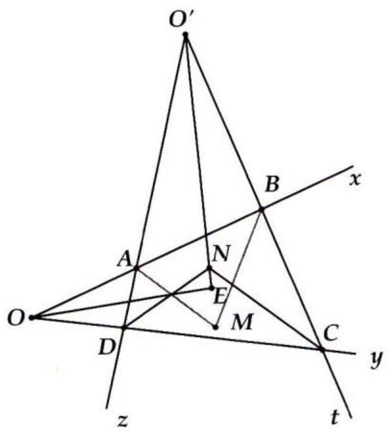
b) Trên tia đối của tia Ox, Oy lần lượt lấy hai điểm C và D, sao cho OC = OD. Hai đương thẳng lần lượt vuông góc với Ox, Oy tại C và D cắt nhau ở E. Chứng minh ba điểm O, H, E thẳng hàng.

9. Cho hai góc nhọn xOy và $zO't$ có các cạnh cắt nhau tạo thành hình ABCD như hình vẽ. Xét hình ABCD.

a) Chứng minh tổng bốn góc A + B + C + D bằng 360°.

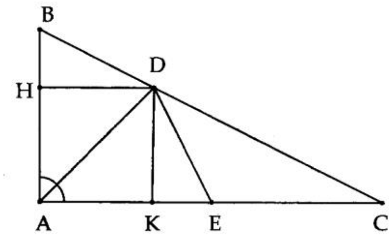
b) Cho biết $A = 130°, B = 120°, C = 50°$.Các tia phân giác của A, B cắt nhau tại M, các tia phân giác của D, C cắt nhau tại N. Tính AMB, DNC.

c) Chứng minh tia phân giác của hai góc xOy và $zO't$ vuông góc với nhau.



HƯỚNG DẪN

1A. a) Áp dụng Định lí Pytago trong tam giác vuông ABC tính, được BC $\sqrt{45}$ cm.



Vì E là trung điểm AC nên

AE = $\frac{1}{2}$AC = 3 cm => AE = AB

=> $\Delta BAD = \Delta EAD$ (c.g.c).

c) Do DH $\perp$AB nên DH là khoảng cách từ D đến AB.

Tương tự DK là khoảng cách từ D đến AC.

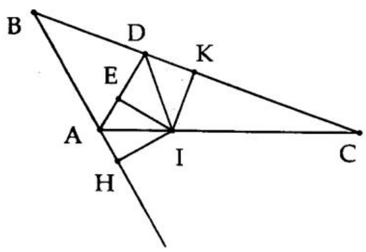
Suy ra DH = DK.

1B. Hạ ME, MF lần lượt vuông góc với Ox,Oy (E$\in$Ox, F$\in$ Oy). Chứng minh được ΔOME = ΔOMF (ch-gn) => ME = MF. Vậy M cách, đều hai cạnh Ox, Oy.

2A. a) Vì BAC = 120° nên CAH = 60°.

Do AD là phân giác BAC nên

$DAC = \frac{1}{2}BAC$ = 60°



=> $DAC = CAH$

=> AC là phân giác DAH .

b) Khi đó IE = IH.

Mặt khác DI là phân giác ADC nên IE = IK.

Vậy IH = IK.

2B. Gọi E, F, P lần lượt là hình chiếu của I trên các đường thẳng AB, BC, CA.

Theo Định lí thuận ta có IE = IF và IF = IP => IE = IP .

Vậy I cách đều hai cạnh AB, AC.

3A. a) Trên tia đối của tia MA lấy D sao cho MA = MD.

=> ΔMAB = ΔMDC (c.g.c) => AB = CD

b) AM là phân giác BAC nên $BAM = CAM$

Lại có $BAM = CDM$ (hai góc tương ứng bằng nhau).

Do đó $CAM = CDM$ => ΔCAD cân tại C => CA = CD.

c) Vậy AB = AC => ΔABC cân tại A

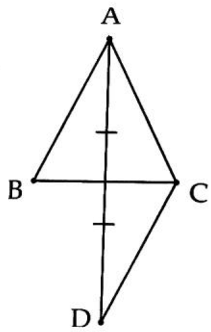
3B. a) Ta có: AB $\perp$ AC, KH $\perp$AC

=> AB // KH.

b) ΔAHK = ΔAHI (ch-cgv)

=> $KAH = IAH$.

c) ΔAKI có AH vừa là đường trung tuyến, vừa là đường phân giác nên ΔAKI cân tại A.



4A. a) Vì Ot là phân giác xOy nên $AOC = BOC$

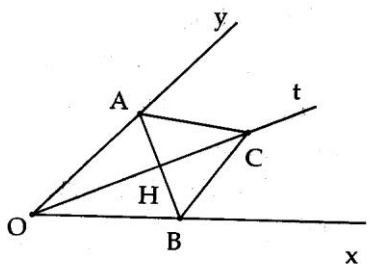
=> ΔAOC = ΔBOC (c.g.c) => CA = CB, $OCA = OCB$

=> CO là phân giác ACB.

b) Chứng minh được: ΔOAH = ΔOBH (c.g.c).

=> $OAH = OHB$ = 90°, AH = BH.

Vậy OC vuông góc với AB tại trung điểm của AB.



c) Vì H là trung điểm của AB

=> AH = $\frac{1}{2}$ AB = 3 cm.

Áp dụng định lí Pytago trong tam giác vuông OHA, tính được OH = 4 cm.

4B. a) ΔABE = ΔACD (c.g.c) => BE = CD.

b) Do ΔABE = ΔACD => $ABE = ACD \Rightarrow BDC = CEB$.

Mặt khác AB = AC, AD = AE => BD = CE.

Lại có: ΔABE = ΔACD => $ABE = ACD \Rightarrow DBM = ECM$

=> ΔBMD = ΔCME (g.c.g).

c) Vì ΔBMD = ΔCME => MD = ME => ΔADM = ΔAEM(c.c.c).

=> $MAD = MAE$ => AM là phân giác của BAC.

5A. a) ΔOAD = ΔOCB (c.g.c) => AD = CB.

b) Do OA = OC, OB = OD => AB = CD.

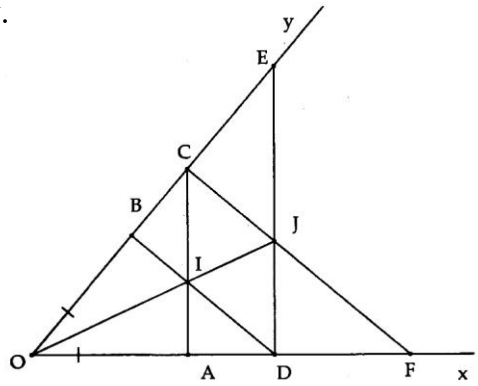
Lại có ΔOAD = ΔOCB (c.g.c) => $OBC = ODA$ => $ABE = CDE$

Mà $OAD = OCB$. Vậy ΔABE = ΔCDE (g.c.g)

c) Vì ΔABE = ΔCDE (g.c. g) => $BOE = DOE$

=> OE là tia phân giác của góc xOy.

Tam giác AOC và BOD đều cân ở O nên OE $\perp$ BD và OE $\perp$ AC. Suy ra AC // MN // BD.



5B. a) b) Tương tự **5A.**

c) Vì OI, OJ cùng là phân giác của xOy nên ba điểm O, I, J thẳng hàng.

6A. a) ΔBEC có trung tuyến

ME = $\frac{1}{2}$ BC => ΔBEC vuông tại E..Mặt khác

ΔBME vuông cân tại M nên MBE = 45°

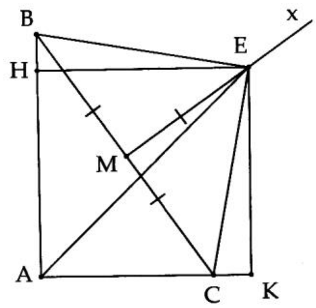
=> ΔBEC vuông cân tại E.

b) Từ ý (a) suy ra BE = CE. (1)

AB $\perp$AC, EK $\perp$AC => AB // EK.

Mà EH $\perp$ AB nên EH $\perp$EK => HEK = 90°

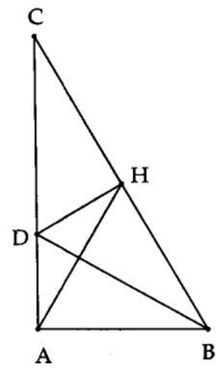
=> $HEB = KEC$ (cùng phụ HEC). (2)



c) Từ (1) và (2) suy ra ΔBHE = ΔCKE (Ch-gn)

=> EH - EK.

Chứng minh được ΔAHE = ΔAKE => $HAE = KAE$. Vậy AE là tia phân giác của góc A.



6B. Tương tự **6A.**

Chứng minh được ΔBID = ΔCHD => DI = DH.

Suy ra ΔADI = ΔADH => $DAI = DAH$

Vậy AD là tia phân giác của A

7. a) Chứng minh được ΔABD và ΔHBD

=> ΔABD = ΔHBD => $ABD = HBD$

=> BD là tia phân giác của ABC

b) $BDH = \frac{1}{2}ABC = 30°$, $DCB = 90° - ABC = 90° - 60° = 30°$

=> $DBH = DCB$ => ΔDBC cân tại D.

8. Tương tự **4A.**

a) Ta có MA = MB suy ra ΔOAM = ΔOBM => OA = OB.

Do đó ΔOAH = ΔOBH nên $OHA = OHB = 90°$.

Vậy AB $\perp$ OM tại H.

b) ΔOCE = ΔODE => $EOC = EOD$. Vậy E thuộc đường thẳng chứa tia phân giác của xOy.

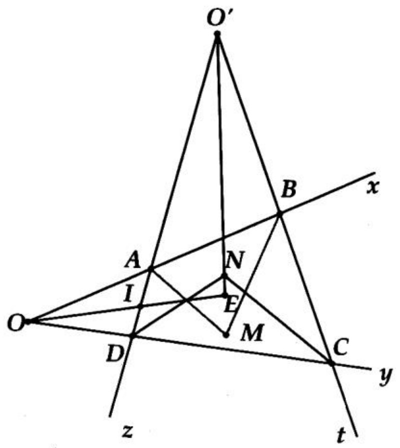
9. a) ΔABD có tổng các góc là 180°. Tương tự, ΔDBC có tổng các góc là 180°. Cộng lại ta được ĐPCM.

b) Sử dụng kết quả của ý a) suy ra $D = 60°$.

ΔAMB có $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 125°$ nên

$AMB = 55°$.

Tương tự $DNC = 125°$.



c) Gọi I là giao điểm tia phân giác góc xOy với AD và E là giao điểm của hai tia phân giác góc xOy và $zO't$. Ta có:

$$IO'E = \frac{1}{2}zO't = \frac{1}{2}\left(180° - D - C\right) = 35°.$$

$$IOA = \frac{1}{2}xOy = \frac{1}{2}\left(180° - B - C\right) = 5°.$$

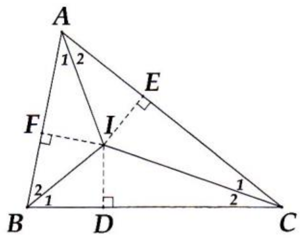
$$OAI = 180° - A = 50°$$

Suy ra $AIE = IOA + OAI = 55°$

Vậy $O'EI = 180° - (35° + 55°) = 90°$

CHỦ ĐỀ 6. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

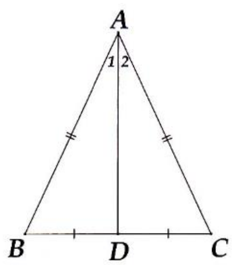
I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT



1. Định lí: Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó.

Cụ thể:

$A_1 = A_2, B_1 = B_2, C_1 = C_2$ => ID = IE = IF .



2. Tính chất: Trong một tam giác cân, đường phân giác của góc ở đỉnh đồng thời là đường trung tuyến, đường cao của tam giác đó. Ngược lại, nếu một tam giác có đường phân giác vẽ từ một đỉnh đồng thời là đường trung tuyến (hoặc đường cao) thì tam giác ấy là tam giác cân tại đỉnh đó.

$\left.\begin{array}{r} \Delta ABC : AB = AC \\ A_1 = A_2 \end{array}\right\} \Rightarrow BD = DC$

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

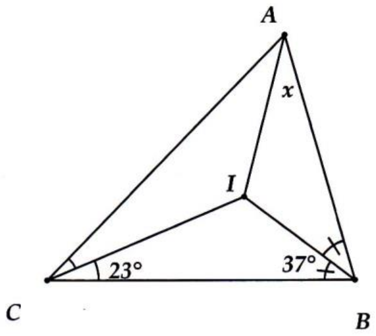
Dạng 1. Tính độ dài đoạn thẳng, số đo góc

Phương pháp giải: Sử dụng các tính chất:

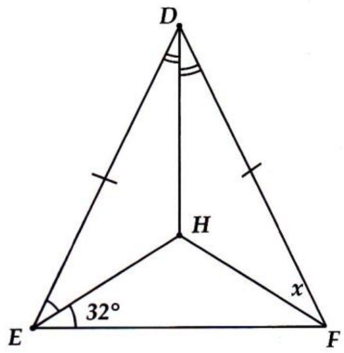
• Giao điểm của hai đường phân giác của hai góc trong một tam giác nằm trên đường phân giác của góc thứ ba.

• Giao điểm các đường phân giác của tam giác cách đều ba cạnh của tam giác.

1A. Tìm x trong mỗi hình vẽ sau biết CI và BI là hai phân giác của ACB và ABC, còn EH và FH là hai phân giác của DEF và DFE .

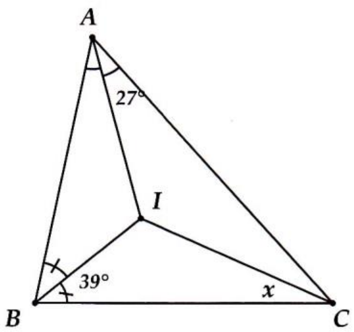


Hình 1

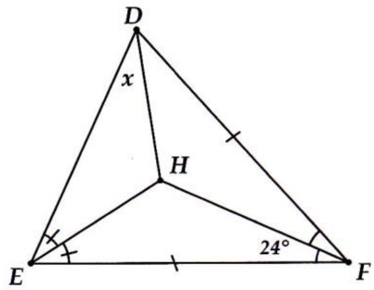


Hình 2

1B. Tìm x trong mỗi hình vẽ sau biết I, H là giao điểm của ba đường phân giác của các góc trong của tam giác.



Hình 3

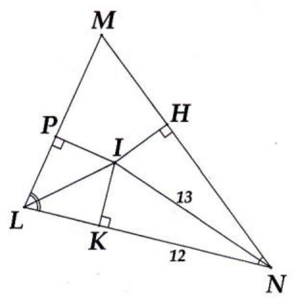


Hình 4

2A. Cho hình vẽ bên, biết KN = 12 cm, IN = 13 cm và I là giao điểm, các phân giác của tam giác MNL.

a) So sánh IP và IH.

b) Tính IH



2B. Cho xOy, tia phân giác Oz. Trên tia Ox lấy điểm A sao cho OA = 4cm. Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với Ox cắt Oz tại H, cắt Oy tại K. Lấy điểm B trên tia Ox sao cho A là trung điểm của OB. Hạ HI $\perp$ OK.

a) Chứng minh AH = HI

b) Biết OH = 5 cm, tính khoảng cách từ điểm H đến BK.

Dạng 2. Chứng minh 3 đường đồng quy, 3 điểm thẳng hàng

Phương pháp giải: Vận dụng tính chất ba đường phân giác của tam giác.

3A. Cho tam giác ABC cân tại A. Kẻ các tia phân giác BD, CE. Lấy M là trung điểm của BC.

a) Chứng minh AM là tia phân giác của góc BAC.

b) Ba đường thẳng AM, BD, CE đồng quy tại H.

c) Giả sử có MN = MP = NP, tính tỉ số $\frac{HM}{MK}$

3B. Cho tam giác MNP có MN = MP. Hạ MK$\perp$ NP (K $\in$NP). Gọi NE, PF lần lượt là tia phân giác của các góc N và P trong tam giác MNP. Chứng minh:

a) MK là tia phân giác của góc NMP;

b) MK, NE, PF đồng quy.

4A. Cho tam giác ABC, tia phân giác AD. Các tia phân giác ngoài tại đỉnh B và C cắt nhau ở E. Chứng minh ba điểm A, D, E thẳng hàng.

4B. Cho góc xOy nhọn. Lấy điểm A trên tia Ox, điểm B trên tia Oy. Trên tia Ox lấy điểm C sao cho BC là tia phân giác của góc ABy. Gọi I là giao điểm của hai tia phân giác góc xAB và xOy. Chứng minh ba điểm B, I, C thẳng hàng.

Dạng 3. Đường phân giác đối với các tam giác đặc biệt (tam giác cân, tam giác đều)

Phương pháp giải: Sử dụng tính chất trong tam giác cân, đường phân giác của góc ở đỉnh cũng đồng thời là đường trung tuyến, đường cao.

5A. Cho tam giác MNP cân tại M có G là trọng tâm.I là điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác đó. Chứng minh ba điểm M, G, I thẳng hàng.

5B. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi I là điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác đó. Chứng minh AI vuông góc với BC.

6A. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM là đường phân giác của góc A. Chứng minh tam giác ABC cân tại A.

6B. Cho tam giác ABC có đường cao AH đồng thời là đường phân giác của góc A Chúng minh tam giác ABC cân tại A.

Dạng 4. Chứng minh mối quan hệ giữa các góc

Phương pháp giải:

• Vận dụng các tính chất tia phân giác của một góc để tìm mối liên hệ giữa các góc.

• Dùng định lí tổng ba góc trong một tam giác bằng 180°.

7A. Cho ΔABC, Các tia phân giác ở góc B và C cắt nhau ở I

a) Biết $A = 70°$, tính số đo góc BIC.

b) Biết $BIC = 140°$, tính số đo góc A.

c) Chứng minh $BIC = 90° + \dfrac{A}{2}$

7B. Cho tam giác DEF cân tại D. Gọi I là giao điểm của các tia phân giác EP, FQ.

a) Biết $EIF = 110°$, tính số đo góc D.

b) Biết $D = 50°$, tính số đo ba góc của tam giác IPF

8A. Cho tam giác ABC có $B > C$. Từ đỉnh A kẻ đường cao AH và tia phân giác AD.

a) Biết $B = 70°, C = 50°$, tính số đo HAD.

B) Chứng minh $HAD = \dfrac{B - C}{2}$

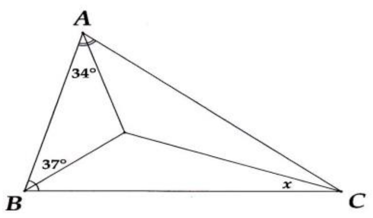
8B. Cho ΔABC (AB > AC), I là giao điểm ba đường phân giác. Tia AI cắt BC tại D. Hạ IH vuông góc với BC tại H.

a) Nếu $B = 40°, C = 60°$, Tính số đo góc HID.

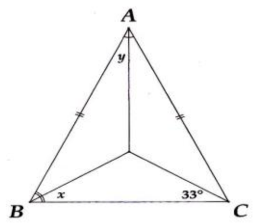
b) Chứng minh $HID = \dfrac{B - C}{2}$

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ.

9. Tìm x, y biết M là giao điểm các phân giác của tam giác ABC.



Hình 5



Hình 6

10. Cho tam giác ABC vuông tại A. Các tia phân giác của các góc B và C cắt nhau tại I. Gọi H, J, K lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ I đến AB, AC, BC. Biết KI = lcm, BK = 2cm, KC = 3cm.

a) Chứng minh ΔBHI = ΔBKI

b) Chứng minh tam giác AHI là tam giác vuông cân.

c) Tính chu vi tam giác ABC

11. Cho tam giác ABC, trên tia đối của tia BC lấy điểm M sao cho MB = AB, trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho NC = AC. Qua M kẻ đường thẳng song song với AB. Qua N kẻ đường thẳng song song với AC. Hai đường thẳng đó cắt nhau tại P. Chứng minh:

a) MA, NA lần lượt là tia phân giác của PMB, PNC

b) Tia PA cắt BC tại K. Chứng minh PA là tia phân giác của MPN, từ đó suy ra AK là tia phân giác của BAC.

12. Cho tam giác ABC. Các đường phân, giác các góc ngoài tại đỉnh A và C cắt nhau ở K.

a) Chứng minh BK là phân giác của góc ABC.

b) Cho các tia phân giác các góc A và C trong tam giác ABC cắt nhau ở I Chứng minh B, I, K thẳng hàng.

c) Cho biết $ABC = 70°$. Tính AKC.

13. Cho tam giác ABC, tia phân giác AD. Các tia phân giác ngoài Bx và Cy cắt nhau ở E. Chứng minh ba đường thẳng AD, Bx, Cy đồng quy và $BEC = \frac{1}{2}FEH$

14. Tam giác ABC cân tại. A. Tia phân giác của góc A cắt đường trung tuyến BD tại K. Gọi I là trung điểm của AB. Chứng minh ba điểm I, K, C thẳng hàng.

15. Chứng minh trong tam giác cân, trung điểm của cạnh đáy cách đều hai cạnh bên.

16. Cho tam giác ABC cân tại A. CP, BQ là các tia phân giác trong của tam giác ABC ($P \in AB$, $Q \in AC$). Gọi O là giao điểm của CP và BQ.

a) Chứng minh tam giác OBC là tam giác cân.

b) Chứng minh điểm O cách đều ba cạnh của tam giác ABC.

c) Chứng minh đường thẳng AO đi qua trung điểm của đoạn thẳng BC và vuông góc với nó.

d) Chứng minh CP = BQ.

e) Tam giác APQ là tam giác gì? Vì sao

17. Chứng minh trong tam giác cân, các đường phân giác ứng với cạnh bên thì bằng nhau.

18. Cho $xOy = 50°$. Lấy các điểm $A \in Ox$, $B \in Oy$. Các tia phân giác của xAB và yBA cắt nhau ở E.

a) Tính số đo góc AEB.

b) Các đường AE, BE cắt phân giác ngoài góc xOy ở K, F. Biết $OBA = 40°$.Tính các góc của tam giác KEF.

19. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ AH vuông góc với BC (H $\in$ BC).

Tia phân giác của HAB cắt BC ở D.

a) Chứng minh tam giác ACD là tam giác cân.

b) Các tia phân giác của HAC và AHC cắt nhau ở I. Chứng minh. CI đi qua trung điểm, của AD. Từ đó tính góc AIC.

20. Tam giác ABC có I là giao điểm các tia phân giác của các góc B và C. Gọi D là giao điểm của AI và BC. Kẻ IH vuông góc với BC (H $\in$ BC). Chứng minh:

a) AD là tia phân giác của A;

b) $CID = 90° - \frac{B}{2}$

c) $BIH = CID$

21. Cho tam giác ABC có I là giao điểm của ba đường phân giác. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ B đến AI. Chứng minh:

a) Các góc ICB và BIH là hai góc phụ nhau;

b) $IBH = ACI$

22*. Cho tam giác ABC đều. Qua B kẻ đường thẳng xy song song AC và hạ BM vuông góc với AC (M $\in$ AC). Qua C kẻ đường thẳng x'y' song song AB và hạ CN vuông góc với AB (N$\in$AB). Hai đường thẳng xy và x'y' cắt nhau tại P. Chứng minh:

a) Đường phân giác của A và hai đường BM, CN đồng quy;

b) Đường phân giác của A và hai đường thẳng xy và x'y' đồng quy.

HƯỚNG DẪN

1A. a) Ta có $B + C = 2IBC + 2ICB = 2(IBC + ICB) = 120°$

$= A = 180° - (B + C) = 180° - 120° = 60°$

Mà BI, CI lần lượt là tia phân giác của B và C nên I là giao điểm của ba đường phân giác trong ΔABC.

=> AI là tia phân giác của A => $x = \frac{A}{2}$ = 30°.

b) Ta có ΔDEF cân tại D => $F = E = 2HEF = 64°$.

=> FH là tia phân giác của DFE => $x = \frac{\text{DEF}}{2} = 32°$

1B. Tương tự **1A.**

a) x = 24°. b) x = 33°.

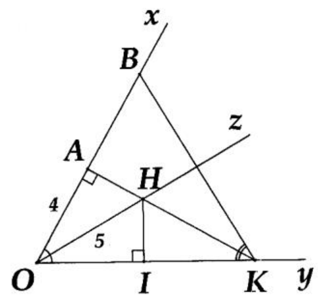
2A. a) I là giao điểm ba đường phân giác của ΔMLN. Do đó I cách đều ba cạnh của ΔMLN => IP = IH.

b) Xét ΔIKN vuông tại K : $IK = \sqrt{IN^2 - IK^2} = 5cm$

=> IH = IK = 5 cm..

2B. a) Do KA vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên ΔOKB cân tại K.

Suy ra KA là phân giác OKB. Vì H nằm trên tia phân giác của xOy nên H cách đều Ox, Oy => AH = HI



b) Tính AH = $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3cm$

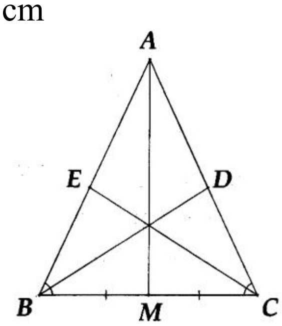
Từ giả thiếp ta suy ra H là giao điểm của ba đường phân giác trong ΔOBK nên H cách đều ba cạnh của tam giác đó.

Vậy khoảng cách từ điểm H đến BK bằng AH $= 3$cm

3A. a) Chứng minh được ΔAMB = ΔAMC (c.c.c).

Từ đó suy ra AM là tia phân giác của góc BAC.

b) Xét ΔABC có AM, BD,CE là các tia phân giác. Từ tính chất ba đường phân giác trong tam giác, suy ra ba đường thẳng AM,BD,CE đồng quy.



3B. a) b) tương tự **3A.**

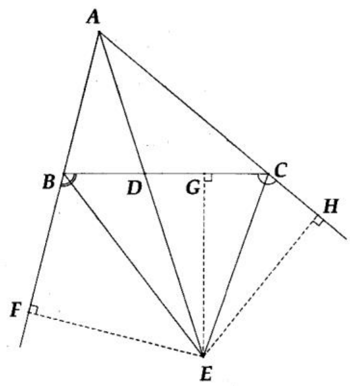
c) Khi ΔMNP là tam giác đều thì MN, KE, PF cũng là ba đường trung tuyến.

Vậy H là trọng tâm, hay $\dfrac{HM}{MK} = \dfrac{2}{3}$

4A. Gọi F,H,G lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm E xuống các đường thẳng AB, AC và BC.

Từ giả thiết suy ra EF = EG và EH = EG.

=> EF = EH nên E thuộc tia phân

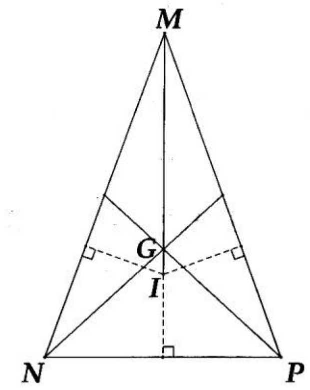


giác của góc BAC. Mà AD là tia phân giác của góc BAC.

Vậy ba điểm A, D, E thẳng hàng.

4B. Tương tự **4A.**

5A. I nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác nên MI là tia phân giác của góc M.

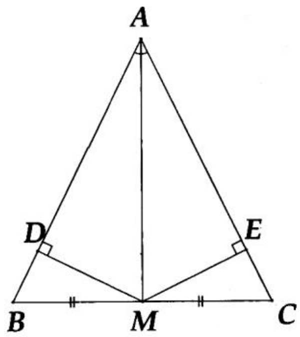


Do ΔMNP cân tại M nên đường giác MI cũng là đường trung tuyến.

G là trọng tâm của ΔMNP nên G nằm trên MI. Từ đó, suy ra M,G, I thẳng hàng.

5B. Tương tự **5A**

6A. Hạ MD $\perp$ AB, ME $\perp$ AC.



Vì AM là tia phân giác của A nên MD = ME.

Do đó ΔBDM = ΔCEM (ch-cgv).

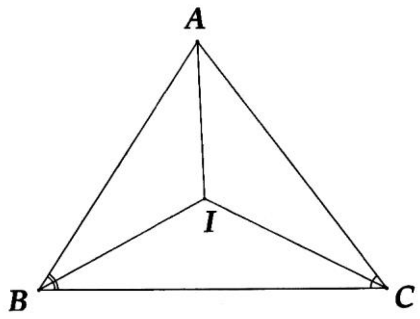
Suy ra $B = C$. Vậy ΔABC cân tại A.

6B. Tương tự **6A.**

Chứng minh ΔABH = ΔACH (g.c.g)

=> ΔABC cân tại A.

7A. a) Xét ΔABC, ta tính được $B + C = 110°$.



Do đó, $IBC + ICB = 55°$.

Vậy BIC = 180° - 55° = 125°.

b) Xét ΔBIC, từ giả thiết suy ra

$IBC + ICB = 40°$. Do đó, ta có:

$ABC + ACB = 80°$.

Vậy BAC = 100°.

c) Ta có: = $BIC = 180° - (IBC + ICB)$

$$= 180° - \frac{B + C}{2} = 180° - \frac{180° - A}{2}$$

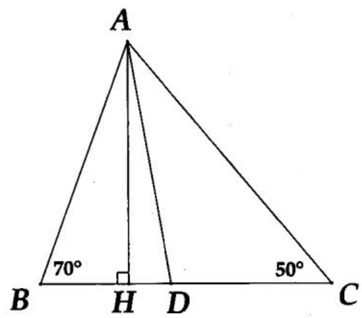
$$= 180° - \left(90° - \frac{A}{2}\right) = 90° + \frac{A}{2}$$

7B. Tương tự **7A.**

a) $D = 40°$.

b) $EIF = 115°;\ IPF = 82°30';\ IFP = 32°30'\ ;\ EIF = 115°$

8A. a) Từ giả thiết, ta tính được:



$BAC = 60°$

$$\Rightarrow DAC = \frac{BAC}{2} = 30° = DAB$$

$\Rightarrow\ ADH = DAC + C = 80°$

Do đó, xét ΔAHD ta tính được

$HAD = 10°$

Có thể tính $BAH = 90° - 70° = 20°$.

Vậy $HDA = 30° - 20° = 10°$

b) $HAD = 90° - HDA$

$$= 90° - \left(\frac{A}{2} + C\right) = \frac{180° - A - 2C}{2} = \frac{B - C}{2}$$

8B. Tương tự **8A.**

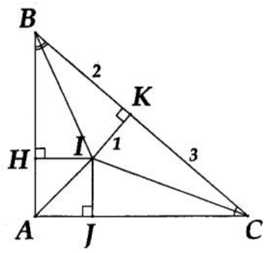
9. Tương tự **1A.**

a) $x = 19°$. b) $x = 33°;\ y = 24°$.

10. a) $\Delta BHI = \Delta BKI$ (ch-gn) Do đó, BH = BK = 2cm.

b) AI là tia phân giác của góc A nên $HAI = \frac{A}{2} = 45°$

Do đó, ΔAHI là tam giác vuông cân.



c) Ta có IH = IK = IJ = 1cm. Từ đó, suy ra

AH = HI = lcm.

Tương tự ý b), ta có AJ = KI = 1 cm.

$\Delta IKC = \Delta IJC$ (ch-gn)

=> IC = KC = 3cm.

$\Delta IBH = \Delta IBK$ (ch-gn) => BH = BK = 2cm.

Do đó, ta có: AB = 3cm; AC = 4cm; BC = 5cm.

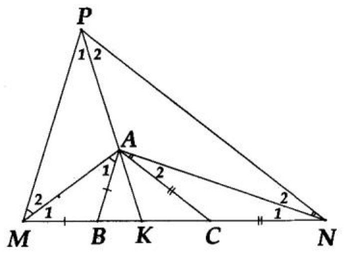
Vậy chu vi tam giác ABC là 12cm.

11. a) ΔABM cân nên $A_1 = M_1$

Có AB // MP => $M_2 = A_1$ (so le trong).

Vậy $M_1 = M_2$, nên MA là tia phân giác

của PMB.



Tương tự, ΔACN có NA là tia phân giác

của PNC.

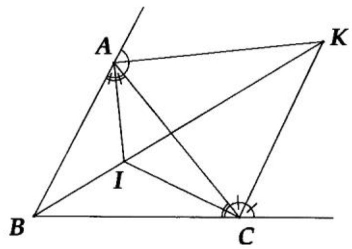
b) Xét ΔPMN có A là giao điểm của hai tia phân giác góc M và N nên PA là tia phân giác của góc MPN.

Có: AB //MP => $BAK = P_1$ (đồng vị)

AC // PN => $KAC = P_2$ (đồng vị).

Mà $P_1 = P_2$ (do PA là tia phân giác của góc MPN) nên . Do đó, AK là tia phân giác của BAC

12. a) Tương tự **4A.**



b) Vì I là giao điểm các tia phân giác

các góc A và C trong ΔABC nên

BI cũng là phân giác của ABC.

Suy ra B, I, K thẳng hàng.

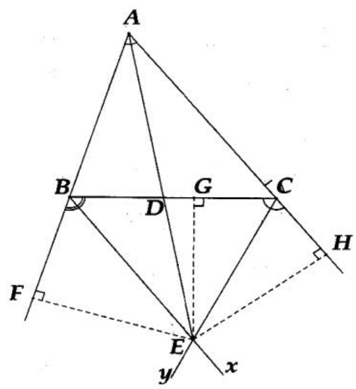
c) Sử dụng **7A**, ta có:

$$AIC = 90° + \frac{ACB}{2} = 125°$$

Chú ý $IAK = ICK$ = 90° nên suy ra

KAC = 180° - 125° = 55°.

13. Từ **4A**, ta chứng minh được E



thuộc tia phân giác của góc BAC.

Do đó, tia AD sẽ đi qua điểm E.

Chú ý:

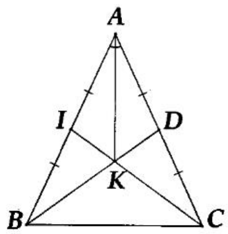
$$BEG = \frac{1}{2}FEG; CEG = \frac{1}{2}HEG$$

Suy ra ĐPCM.

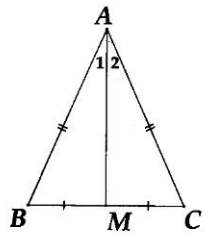
14. Vì ΔABC cân tại A nên tia phân giác AK đồng thời là đường trung tuyến.

Mà BD là trung tuyến của ΔABC nên K là trọng tâm của ΔABC.

Do đó I, K, C thẳng hàng.



15. Ta có ΔABM = ΔACM (c.c.c), suy ra AM là tia phân giác của BAC .Vậy điểm M cách đều hai cạnh bên AB, AC.

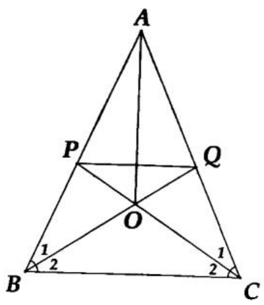


16. a) Vì ΔABC cân nên $ABC = ACB$,

do đó $B_2 = C_2$. Vậy ΔOBC cân tại O.

b) Vì O là giao điểm các tia phân giác CP và BQ trong ΔABC nên O là giao điểm ba đường phân, giác trong ΔABC. Do đó, O cách đều ba cạnh của ΔABC.

c) Ta có ΔABC cân tại A, AO là tia phân giác ở đỉnh A nên AO đồng thời là trung tuyến và đường cao của ΔABC.



Vậy đường thẳng AO đi qua trung điểm của đoạn thẳng BC và vuông góc với nó.

d) ΔPBC = ΔQCS (g.c.g) => CP = BQ.

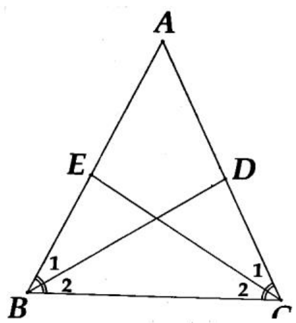
e) Từ ý d), ta suy ra AP = AQ.

Vậy tam giác APQ cân tại A .

17. Vì ΔABC cân tại A nên $ABC = ACB$.

Do đó , $B_1 = C_1$

ΔABD = ΔACE (g.c.g) => BD = CE.



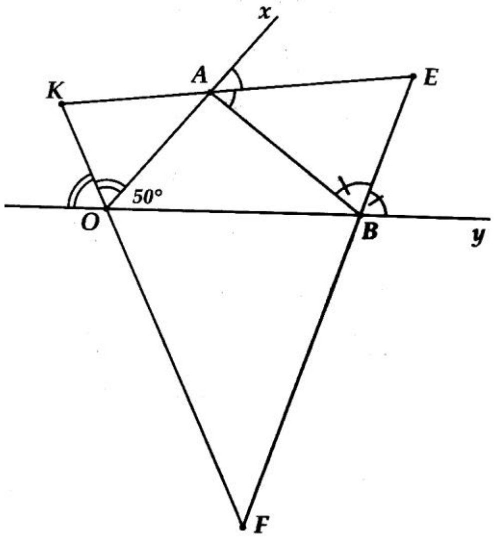
18. a) Xét ΔOAB, vì O= 50° nên ta có

$OAB + OBA = 130°$

Mặt khác

$$\begin{cases} xAB = 180° - OAB \\ yBA = 180° - OBA \end{cases}$$ nên

$xAB + yBA = 230°$



Do đó,

$$EAB + EBA = \frac{230°}{2} = 115°$$

Xét ΔAEB, ta tính được

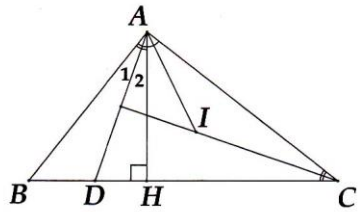
$$AEB = 180° - 115° = 65°$$

b) Tương tự, tính được

$EKF = 70°$. Suy ra

$KFE = 45°$

19. a) Ta có:



$$\begin{cases} DAC + A_1 = 90° \\ ADC + A_2 = 90° \end{cases} \Rightarrow DAC = ADC$$

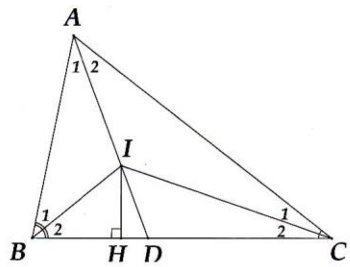
=> ΔACD cân tại C.

b) Vì ΔACD cân tại C nên tia phân giác CI đồng thời là đường trung tuyến. Do đó CI đi qua trung điểm M của AD.

Do ΔAMI vuông cân tại M nên $AIM = 45°$, hay AIC = 135°.

20. Xét ΔABC có I là giao điểm của các tia phân giác góc B và C nên AI là tia phân giác của A.

=> AD là tia phân giác của A.

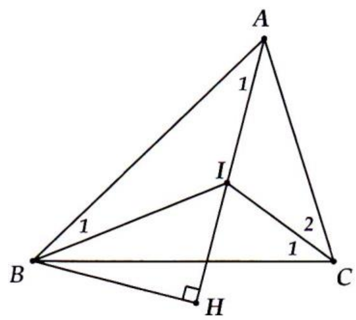


b) $CID = A_2 + C_1 = \dfrac{A+C}{2} = 90° - \dfrac{B}{2}$

c) Ta có $BIH = 90° - B_2 = 90° - \dfrac{B}{2}$

Kết hợp với câu b), suy ra $BIH = CID$.

21. a) Từ giả thiết suy ra IA, IB, IC là các tia phân giác của ΔABC.



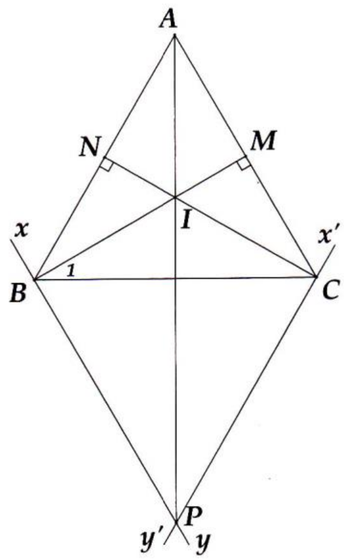
Tương tự **20** ý b), chứng minh được $I_1 = 90° - C_1$

Vậy các góc ICB và BIH là hai góc phụ nhau.

b) Vì ΔIBH vuông tại H nên:

$$IBH = 90° - I_1 = 90° - (90° - C_1) = C_1 = C_2$$

Vậy $IBH = ACI$



22*. a) Vì ΔABC đều nên các đường cao BM,CN đồng thời là đường phân giác của ΔABC.

Vậy đường phân giác của góc A và hai đường BM, CN đồng quy.

b) Từ giả thiết suy ra BM $\perp$ BP, mà BM là tia phân giác trong của ΔABC nên BP là tia phân giác ngoài của ΔABC.

Tương tự, ta có CP là tia phân giác ngoài của ΔABC.

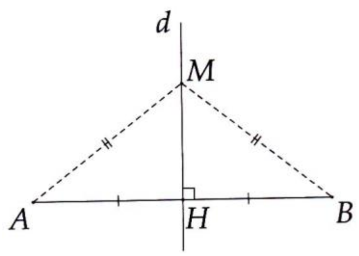
Từ **5A**, ta chứng minh được P thuộc đường phân giác trong của góc A.

Vậy đường phân giác của góc A và hai đường thẳng xy và x'y' đồng quy

CHỦ ĐỀ 7. TÍNH CHẤT ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa đường trung trực:



Đường trung trực của một đoạn thẳng là đường thẳng vuông góc với đoạn thẳng ấy tại trung điểm của nó.

Trên hình vẽ bên, d là đường trung trực của đoạn thẳng AB. Ta cũng nói: A đối xứng B qua d.

2. Định lí 1: Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.

3. Định lí 2: Điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.

MA = MB ⇔ M thuộc đường trung trực của AB.

4. Tập hợp các điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Vận dụng tính chất của đường trung trực để giải quyết bài toán

Phương pháp giải: Sử dụng *Định lí 1*.

1A. Cho hai điểm A, B nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng MN, Chứng minh ΔMAB = ΔNAB.

1B. Cho ΔABC cân tại B. Lấy điểm D đối xứng với điểm B qua AC. Chứng minh ΔABD = ΔCBD.

2A. Tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{C} = 30°$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho AD = AC. Tính số đo góc $\widehat{BDA}$.

2B. Tam giác ABC có điểm A thuộc đường trung trực của BC.

Biết $\widehat{B} = 40°$. Tính số đo của các góc trong ΔABC

3A. Tam giác DEF có DE < DF. Gọi d là đường trung trực của EF. M là giao điểm của d với DF.

a) Chứng minh DM + ME = DF.

b) Lấy bất kì điểm P nằm trên đường thẳng d (P $\neq$ M). Chứng minh DP + PE > DF.

c) So sánh chu vi của hai tam giác DEM và DEP.

3B. Tam giác ABC có $\widehat{B} - \widehat{C} = 30°$. Đường trung trực của BC cắt AC ở K.

a) Chứng minh $\widehat{KBC} = \widehat{KCB}$.

b) Tính số đo góc $\widehat{ABK}$

c) Biết AB = 3 cm, AC = 5 cm. Tính chu vi tam giác ABK.

4A. Cho tam giác ABC. Các đường trung trực của AB và AC cắt BC tại M và N.

a) Biết $\widehat{B} = 30°$, $\widehat{C} = 45°$. Tính số đo góc $\widehat{BAC}$ và $\widehat{MAN}$.

b) Chứng minh $\widehat{MAN} = 2\widehat{BAC} - 180°$.

4B. Cho tam giác ABC cân có $\widehat{A} > 90°$. Các đường trung trực của AB và AC cắt cạnh BC theo thứ tự ở D và E và hai trung trực cắt nhau ở F.

a) Biết $A = 110^\circ$. Tính số đo góc DAE.

b) Chứng minh $2BAC = DAE + 180^\circ$.

c) Tính góc DFE.

5A. Cho góc vuông xOy. Trên các tia Ox, Oy lấy hai điểm A và B (không trùng với O). Đường trưng trực của các đoạn thẳng OA và OB cắt nhau ở M. Chứng minh:

a) A, M, B thẳng hàng.

b) M là trung điểm của AB.

5B. Cho ΔABC vuông tại A. Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt AC tại H, cắt BC tại D. Nối A và D.

a) So sánh số đo góc DAB và DBA.

b) Chứng minh D là trung điểm của BC

Dạng 2. Chứng minh một điểm thuộc đường trung trực. Chứng minh một đường thẳng là đường trung trực của một đoạn thẳng

Phương pháp giải:

• Để chứng minh điểm M thuộc trung trực của đoạn thẳng AB, ta dùng *Định lí 2* hoặc *Định nghĩa đường trung trực.*

• Để chứng minh đường thẳng d là đường trung trực của đoạn thẳng AB, ta chứng minh d chứa hai điểm cách đều A và B, hoặc dùng định nghĩa đường trung trực.

6A. Cho đoạn thẳng AB = 5 cm. Vẽ đường tròn tâm A bán kính 4 cm và đường tròn tâm B bán kính 3 cm. Hai đường tròn này cắt nhau tại D, E. Chứng minh:

a) Điểm A thuộc đường trung trực của DE;

b) AB là đường trung trực của DE;

c) $ADB = 90^\circ$.

6B. Cho đoạn thẳng AB. Dựng các tam giác cân MAB, NAB lần lượt tại M và N (M, N nằm khác phía so với AB). Chứng minh:

a) Điểm M thuộc đường trung trực của AB;

b) MN là đường trung trực của AB.

7A. Cho ΔDEF có DE = DF. Lấy điểm K nằm trong tam giác sao cho KE = KF. Kẻ KP vuông góc với DE (P $\in$ DE), KQ vuông góc với DF (Q $\in$ DF). Chứng minh:

a) K thuộc đường trung trực của EF và PQ;

b) DK là đường trung trực của EF và PQ. Từ đó suy ra PQ//EF.

7B. Cho góc $\widehat{xOy}$ khác góc bẹt Oz là tia phân giác của $\widehat{xOy}$. Gọi M là một điểm bất kì thuộc tia Oz. Qua M vẽ đường thẳng a vuông góc với Ox tại A, cắt Oy tại C và vẽ đường thẳng b vuông góc với Oy tại B, cắt Ox tại D. Chứng minh.:

a) Điểm O thuộc đường trung trực của AB;

b) OM là đường trung trực của AB;

c) Điểm M thuộc đường trung trực của CD

Dạng 3. Xác định vị trí của điểm thỏa mãn yêu cầu đề bài

Phương pháp giải: Sử dụng *Định lí 2* để xác định một điểm nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng.

8A. Cho hai điểm A, B nằm cùng phía với đường thẳng d. Xác định vị trí điểm M trên đường thẳng d sao cho M cách đều hai điểm A và B.

8B. Cho tam giác ABC. Một đường thẳng d đi qua A và không cắt đoạn thẳng BC. Tìm vị trí điểm D trên đường thẳng d sao cho D cách đều hai điểm B và C.

Dạng 4. Sử dụng tính chất đường trung trực vào bài toán về cực trị (tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất)

Phương pháp giải:

• Sử dụng tính chất đường trung trực để thay đổi độ dài một đoạn thẳng bằng độ dài một đoạn thẳng khác bằng nó.

• Sử dụng bất đẳng thức tam giác để tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất.

9A. Hai điểm A, B cùng nằm trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d. Tìm vị trí điểm C trên đường thẳng d sao cho giá trị của tổng CA + CB là nhỏ nhất.

9B. Hai nhà máy được xây dựng tại hai địa điểm A và B cùng nằm về một phía của khúc sông thẳng. Tìm trên bờ sông một địa điểm C để xây trạm bơm sao cho tổng chiều dài đường ống dẫn nước từ C đến A và đến B là nhỏ nhất.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

10. Cho góc $\widehat{xOy} = 35°$. Trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B. Gọi C là điểm đối xứng với A qua Oy.

a) Chứng minh $\Delta OAB = \Delta OCB$.

b) Tính số đo góc $\widehat{AOC}$

11. Cho tam giác ABC vuông tại A có góc $\widehat{C} = 60°$. Lấy điểm D đối xứng với điểm C qua AB.

a) Chứng minh ΔBCD là tam giác đều.

b) Biết BC = $2\sqrt{3}$. Tính độ dài các cạnh AB, AC.

12. Cho ΔABC, đường phân giác AD. Trên tia AC lấy điểm E sao cho AE = AB. Chứng minh:

a) DB = DE;

b) AD là đường trung trực của BE.

13. Cho ΔABC cân tại A, M là trung điểm của BC. ME vuông góc với AB, MF vuông góc với AC. Chứng minh:

a) AM là trung trực của của BC;

b) ME = MF và AM là trung trực của EF;

c) EF// BC.

14. Cho tam giác ABC có AB < AC. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho CD = AB. Hai đường trung trực của BD và AC cắt nhau tại E. Chứng minh:

a) $\Delta ABE = \Delta CDE$;

b) Điểm E cách đều hai cạnh AB và AC.

15. Cho tam giác ABC cân tại A ($A < 90°$). Đường trung trực của cạnh AC cắt tia CB tại điểm D. Trên tia đối của tia AD lấy điểm E sao cho AE = BD. Chứng minh.:

a) Chứng minh ΔADC cân;

b) Chứng minh $DAC = ABC$;

c) Chứng minh AD = CE;

d) Lấy F là trung điểm của DE. Chứng minh CF là đường trung trực của DE.

16. Cho ΔABC nhọn, đường cao AH. Lấy các điểm P và Q lần lượt đối xứng với H qua AB; AC.

a) Chứng minh AP = AQ.

b) Cho $BAC = 60°$. Tính số đo góc PAQ

c) Gọi I , K lần lượt là giao điểm của PQ với AB, AC. Chứng minh $API = AHI$ và $AHK = AQK$.

d) Chứng minh HA là tia phân giác của IHK.

17. Cho $xOy = 90°$. Trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B. Kẻ đường trung trực HM của đoạn thẳng OA (H $\in$ OA, M $\in$ AB). Chứng minh M thuộc đường trung trực của OB.

18. Cho tam giác ABC cố định, đường phân giác AI ($I \in BC$). Trên đoạn thẳng IC lấy điểm H. Từ H kẻ đường thẳng song song với AI, cắt AB kéo dài tại E và cắt AC tại F. Chứng minh:

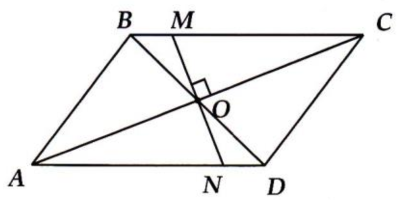
a) Đường trung trực của EF luôn đi qua đỉnh A của tam giác ABC;

b) Khi H di động trên đoạn thẳng IC thì đường trung trực của đoạn thẳng EF luôn cố định.

19. Cho tam giác ABC có AB < AC. Xác định điểm D trên AC sao cho DA + DB = AC.

20. Cho góc xAy, B và C là hai điểm lần lượt thuộc hai tia Ax và Ay. Tìm một điểm M cách đều hai cạnh của góc và cách đều hai điểm B và C.

21. Cho bốn điểm A, B, C, D tạo thành hình có AB / / CD và BC//AD như hình vẽ. Giao điểm của AC và BD là O. Từ O vẽ vuông góc với AC cắt cạnh BC, AD lần lượt tại M, N. Chứng minh AC là trung trực của MN và AM = MC = CN = NA



22. Cho ΔABC có AB = 10 cm, AC = 13 cm, Trên tia đối tia AC lấy điểm E sao cho AE = AB. Qua A kẻ đường thẳng d vuông góc với BE. M là điểm bất kì trên đường thẳng d.

a) Chứng minh $MB + MC \geq EC$.

b) Tìm vị trí điểm M trên đường thẳng d sao cho MB + MC đạt giá trị nhỏ nhất và cho biết giá trị đó là bao nhiêu.

23. Cho tam giác ABC. Tìm điểm E thuộc đường phân giác của góc ngoài tại đỉnh A sao cho tam giác EBC có chu vi nhỏ nhất.

24*. Cho điểm A nằm trong góc nhọn xOy.

a) Tìm hai điểm M, N thuộc Ox và Oy sao cho AM + AN là nhỏ nhất.

b) Tìm hai điểm B, C thuộc Ox và Oy sao cho ΔABC có chu vi nhỏ nhất

HƯỚNG DẪN

1A. Do A, B nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng MN nên

AM = AN, BM = BN.

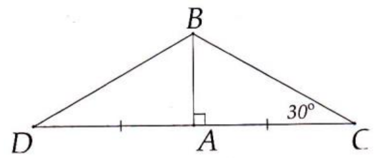
Suy ra $\Delta MAB = \Delta NAB$ (c.c.c).

1B. Tương tự **1A.**

2A. AB là đường trung trực của AC

=> BD = BC => ΔDBC cân tại B

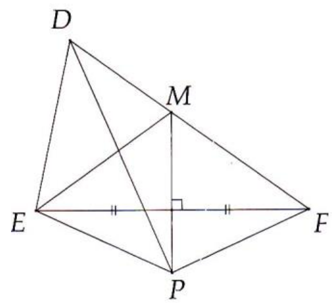
=> $BDA = C = 30°$



2B. Tương tự **2A**

Tính được: $ACB = 40°; BAC = 100°$

3A. Do DE < DF nên M thuộc cạnh DF.



a) Có M thuộc đường trung trực của EF nên ME = MF

=> DM + ME = DM + MF = DF.

b) Vì P thuộc đường trung trực của EF nên PE = PF =>DP + PE = DP + PF.

Xét ΔDEF: DP + PF > DF.

Vậy DE + PE > DF.

c) Từ ý a) và ý b) suy ra DP + PE > DM + ME.

Vậy chu vi tam giác DEP lớn hơn chu vi tam giác DEM.

3B. Do $B > C$ nên AC > AB và K thuộc cạnh AC.

a) K thuộc đường trung trực của BC => KB = KC

=> ΔBKC cân tại K => $KBC = KCB$

b) Ta có:

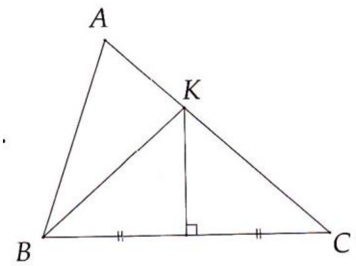
$ABK = ABC - KBC = ABC - C = 30°$

c) Ta có:

AK + BK = AK + KC = AC = 5cm.

=> AB + AK + BK= 3 + 5 = 8 cm.

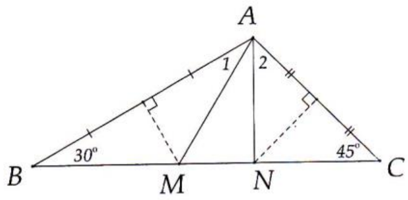
Vậy chu vi tam giác ABK là 8 cm



4A. a) Từ giả thiết suy ra AB > AC và M nằm giữa B và N.

Ta có MA = MB, NA = NC.

$\begin{cases} B = A_1 = 30° \\ C = A_2 = 45° \end{cases}$. Nên AN$\perp$ BC



Xét ΔABC: A = 105°.

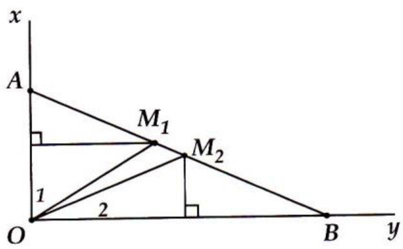
Vậy $MAN = 90° - ABN + BAM = 30°$

b) Có: $MAN = A - (A_1 + A_2) = A - (B + C) = A - (180° - A)$

Vậy $MAN = 2A - 180°$

4B. Tương tự **4A**. Có

$DAE = 40°$ và $DFE = 70°$



5A. a) Gọi M_1,M_2 lần lượt là giao điểm của trung trực đoạn OA,OB với AB.

$M_1A = M_1O$ nên $A = O_1$

$M_2O = M_2B$ nên $B = O_2$.

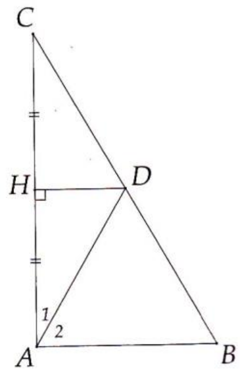
=> $O_1 + O_2 = A + B = 90°$ => $M_1OM_2 = 0°$ => $M_1 \equiv M_2 \equiv M$

Vậy A, B, M thẳng hàng.

b) Từ kết quả ý a) và MA = MB nên M là trung điểm của AB.

5B. a) Từ giả thiết suy ra DC = DA => $C = A_1$

$\begin{cases} A_2 + A_1 = 90° \\ B + C = 90° \end{cases}$ => $A_2 = B$



b) $A_2 = B$ => DA = DB.

Mà DC = DA => DC = DB.

=> ĐPCM

6A. a) Từ giả thiết suy ra AD = AE.

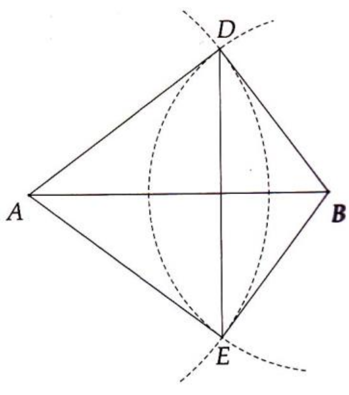
Suy ra điểm A thuộc đường trung trực của DE.

b) Tương tự ý a), ta có điểm điểm B thuộc đường trung trực của DE.

Vậy AB là đường trung trực của DE.

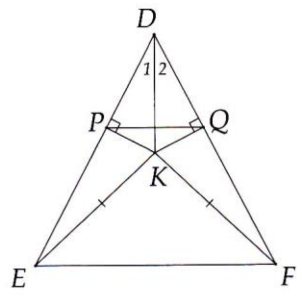
c) Ta có $AD^2 + DB^2 = 4^2 + 3^2 = 25$.

Mà $AB^2 = 25$.



Vậy ΔABD vuông tại D.

6B. Tương tự **6A**.



7A. a) Ta có: $\begin{cases} DE = DF \\ KE = KF \end{cases}$ nên K, D thuộc trung trực của EF.

ΔDEK = ΔDFK (c.c.c)

=> $D_1 = D_2$ => DK là đường phân giác góc DEF.

=> ΔDPK = ΔDQK

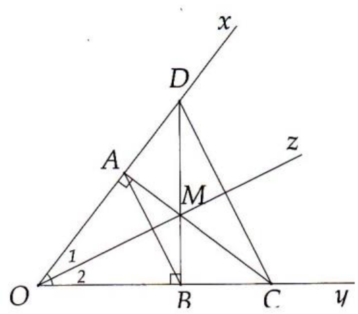
=> KP = KQ và DP = DQ.

Từ đó suy ra K, D thuộc trung trực của PQ.

b) Từ ý a) ta có DK là đường trung trực của PQ và DK là đường trung trực của EF.

Suy ra DK $\perp$ PQ, DK $\perp$ EF.

Vậy PQ // EF.



7B. a) ΔOAM = ΔOEM (ch-gn)

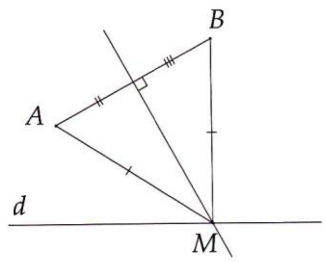
$\begin{cases} OA = OB \\ MA = MB \end{cases}$

=> O thuộc trung trực của AB.

b) Từ ý a) ta có OM là trung trực của AB.

ΔOBD = ΔOAC (cgv-gn)

Tương tự **7A**, ta có OM là trung trực của DC.



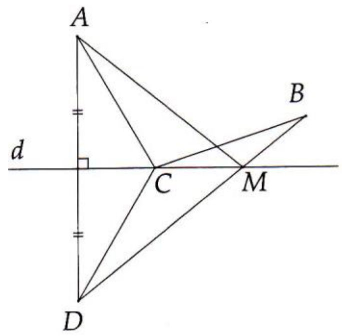
8A. Vì điểm M cách đều hai điểm A và B nên M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Vậy điểm M là giao điểm của đường thẳng d với đường trung trực của AB.

Chú ý: Nếu A, B nằm sao cho AB $\perp$ d thì không tồn tại điểm cần tìm.

8B. Tương tự **8A.**

9A. Lấy D là điểm đối xứng, với A qua d. Theo tính chất đường trung trực: CA = CD.



Do đó CA + CB = CD + CB.

Gọi M là giao điểm của BD và d.

Nếu C không trùng với M thì xét ΔBCD, ta có: CB + CD > BD hay

CA + CB > BD (1).

Nếu C trùng với M thì:

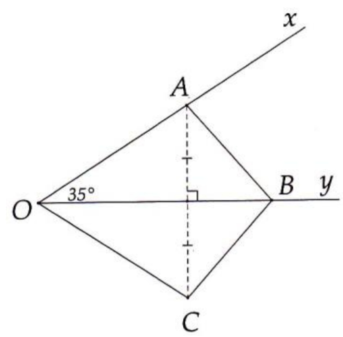
CA + CB = MA + MB = MD + MB = BD (2).

So sánh (1) và (2) ta thấy điểm C trùng M hay C là giao điểm của BD và d thì giá trị của tổng CA + CB là nhỏ nhất.

Chú ý: Điểm C tìm được ở vị trí M như vậy là điểm duy nhất. Thật vậy, nếu lấy E đối xứng với B qua d thì AE vẫn cắt d ở M đúng vị trí mà BD cắt d.

9B. Tương tự **9A.**

10. a) Từ giả thiết suy ra OB là đường trung trực của AC.



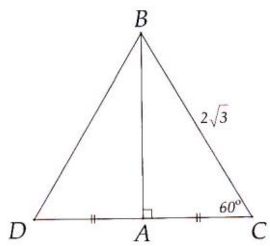
=> OA = OC, BA = BC.

=> ΔOAB = ΔOCB (c .c .c).

b) Từ ý a) suy ra:

$AOB = BOC = 35° => AOC = 70°$

11. a) Có AB là đường trung trực của CD nên BD = BC



=> ΔBCD cân có C = 60°

=> ΔBCD đều.

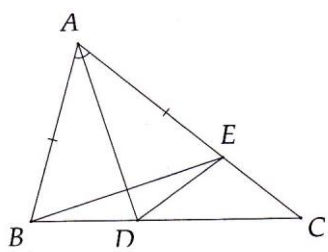
b) ΔBCD đều

=> CD = BC = $2\sqrt{3} => CA = \dfrac{CD}{2} = \sqrt{3}$

Xét ΔABC vuông tại A, ta có:

AB = $\sqrt{BC^2 - AC^2}$ = 3

12. ΔABD = ΔAED (c.g.c)



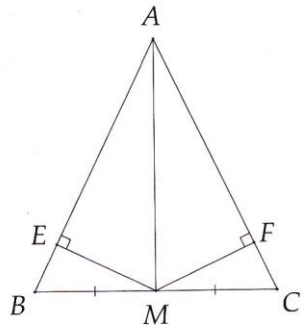
=> DB = DE (1).

b) Theo giả thiết: AB = AE (2).

Từ (1) và (2) , suy ra AD là đường trung trực của BE.

13. a) Từ giả thiết suy ra AB = AC và MB = MC

=> AM là trung trực của của BC



b) ΔABC cân tại A nên $B = C$.

ΔBEM = ΔCFM (ch-gn) => ME = MF.

ΔBEM = ΔCFM (ch-gn) => BE = CF.

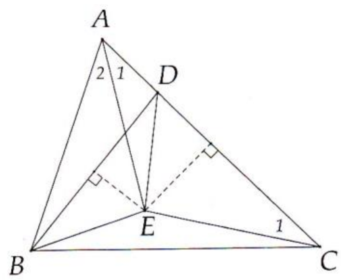
Mà AB = AC =>AE = AF.

Mặt khác, ME = MF. Do đó AM là trung trực của EF.

c) Ta có: AM là đương trung trực của BC và EF

=> AM $\perp$ BC, AM $\perp$ EF => EF // BC.

14. a) Vì hai đường trung trực của BD và AC cắt nhau tại E nên EA = EC, EB = ED.



=> ΔABE = ΔCDE (c.c.c).

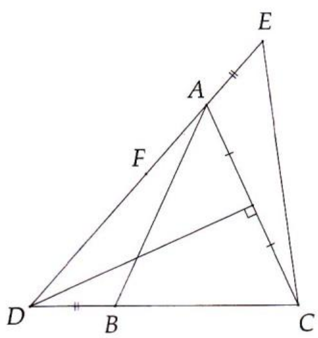
b) ΔABE = ΔCDE => $A_1 = C_1$

Mà EA = EC => $A_1 = C_1$ => $A_1 = A_2$

=> AE là tia phân giác của góc BAC

=> điểm E cách đều hai cạnh AB và AC.

15. a) Vì D thuộc đường trung trực của AC nên DA = DC.



=> ΔADC cân.

b) ΔADC cân => $DAC = DCA$.

Vì AB = AC nên $ABC = ACD$.

=> $DAC = ABC$

c) Ta có :

$EAC + DAC = DBA + ABC (= 180°)$

Từ kết quả ý a), suy ra $EAC = ADB$.

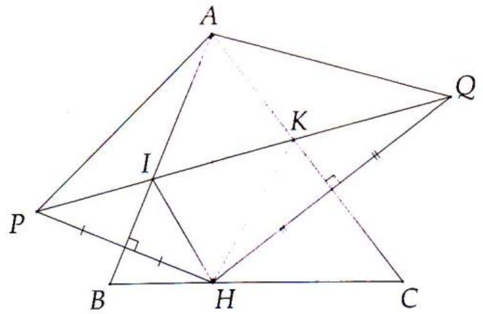
Chứng minh được ΔEAC = ΔDBA (c.g.c) => AD = CE.

d) Ta có: AD = CE, AD = CD nên CE = CD.

=> CF là đường trung trực của DE.

16. a) Từ giả thiết suy ra AP = AH và AQ = AH nên AP = AQ

b) Ta có:



$PAQ = PAH + HAQ$

$2(BAH + HAC)$

$= 2BAC = 120°$

c) ΔAPI = ΔAHI (c.c.c)

=> $API = AHI$ (1)

ΔAHK = ΔAQK (c.c.c)

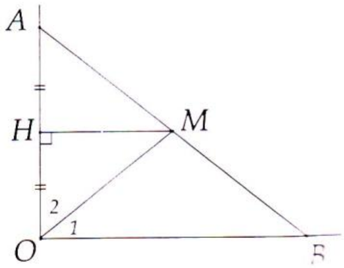
=> $AHK = AQK$ (2)

d) Có AP = AQ => ΔPAQ cân tại A => $API = AQK$ (3).

Từ (1),(2) và (3) có: $AHI = AHK$

=> HA là tia phân giác của IHK.

17. Ta có MA = MO => $O_2 = A$



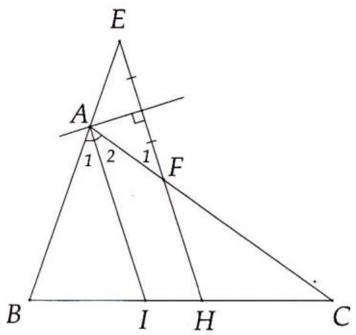
Mặt khác, $A + B = O_2 + O_1 = 90°$

=> $O_1 = B$ => MO = MB.

Vậy M thuộc trung trực của OB

18. a) Vì HE // AI nên $E = A_1$ (đồng vị) và $F_1 = A_2$ (so le trong).

Mà $A_1 = A_2$, do đó $E = F_1$



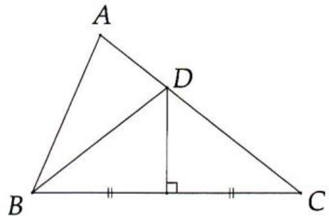
=> AE = AF

=> Đường trung trực của EF luôn đi qua đỉnh A của tam giác ABC.

b) Vì EF//AI nên đường trung trực của EF vuông góc với AI.

Từ kết quả ý a), suy ra đường trung trực của EF luôn đi qua điểm A và vuông góc với AI cố định. Vậy đường trung trực của đoạn thẳng EF luôn cố định.

19. Ta có: AC = DA + DC. Suy ra:



DA + DB = AC

⇔ DA + DB = AD + DC

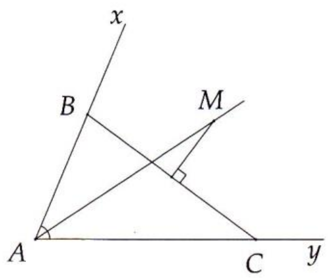
⇔ DB = DC

⇔ D thuộc đường trung trực của BC.

Vậy D là giao điểm của AC với đường trung trực của BC thì

DA + DB = AC.

20. Vì M cách đều hai cạnh của góc xAy



nên M thuộc tia phân giác của xAy.

Vì M cách đều B và C nên M thuộc đường trung trực của BC.

Vậy M là giao điểm của tia phân giác góc xAy và đường trung trực của BC

Chú ý: Nếu B, C ở vị trí mà AB = AC thì sẽ tìm được vô số điểm M nằm trên trung trực của BC.

21. Chứng minh được:

ΔBAC = ΔDCA (g.c.g) nên BC = AD;

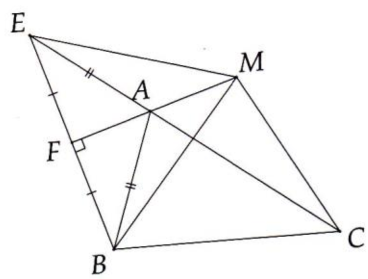
ΔBOC = ΔDOA (g.c.g) nên OC = AO

Do BC // AD nên $MCO = NAO$ (so le trong)

ΔMOC = ΔNO A => OM = ON,

AC $\perp$ MN tại trung điểm của MN nên AC là trung trực của MN. Suy ra AM = AN và CM = CN, và được MN cũng là trung trực của AC nên AM = MC. Suy ra ĐPCM.

22. a) Gọi F là giao điểm của đường thẳng d với AB nên AF $\perp$ BE.



ΔAEF = ΔABF (ch-cgv).

=> FE = FB => AF là đường trung trực của AB => ME = MB.

=>MB + MC = ME + MC.

Nếu điểm M không trùng điểm A,

xét ΔMEC có ME + MC > EC

nên MB + MC > EC (1).

Nếu điểm M trùng điểm A, khi đó:

MB + MC = AB + AC = AE + AC = EC (2).

Từ (1) và (2) suy ra MB + MC $\geq$ EC.

b) Từ ý a) ta thấy khi điểm M trùng điểm A thì MB + MC đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, ta có:

MB + MC = EC = AB + AC = 23cm.

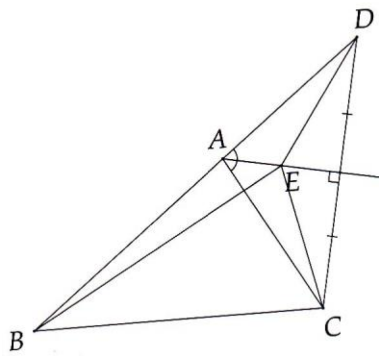
23. Lấy điểm D đối xứng với điểm C qua đường thẳng AE.

=> AE là đường trung trực của CD =>ED = EC

=> EB + EC = EB + ED.

Tương tự **9A.** suy ra điểm E trùng với điểm A thì giá trị của tổng EB + EC nhỏ nhất.

Khi đó, chu vi của tam giác EBC cũng là nhỏ nhất



24*. a) Từ A vẽ AM $\perp$ Ox. Đoạn AM nhỏ hơn các đoạn từ A đến bất cứ điểm nào trên Ox.

Tương tự AN $\perp$ Oy.

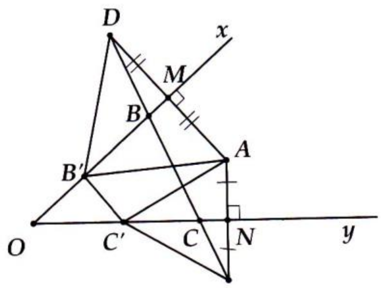
Suy ra AM + AN tìm được như trên là có giá trị nhỏ nhất.

b) Lấy D đối xứng với A qua Ox, lấy E đối xứng với A qua Oy.

Đường DE cắt Ox, Oy lần lượt tại B, C cần tìm.

Thật vậy, lấy bất kì điểm B',C' khác B,C thì ta luôn có:

BD + BC + CE < B' D + B'C' + C' E.

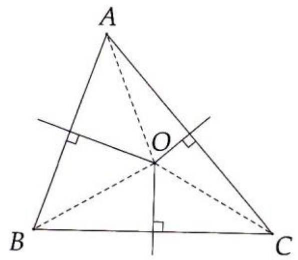


Mặt khác, ta có: AB + BC + CA = BD + BC + CE,

AB' + B'C' + C'A + B'D + B'C' + C'E.

Vậy B, C là hai điểm thỏa mãn yêu cầu đề bài.

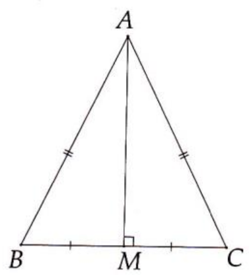
CHỦ ĐỀ 8. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC



I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lí 1. Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác đó.

Trên hình bên, điểm O là giao điểm các đường trung trực của ΔABC. Ta có $OA = OB = OC$. Điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.



2. Định lí 2. Trong một tam giác cân, đường trung trực của cạnh đáy đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh đáy.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

Phương pháp giải: Sử dụng tính chất giao điểm các đường trung trực trong tam giác thì cách đều ba đỉnh của tam giác đó.

1A. Cho A, B, C là ba điểm phân biệt không thẳng hàng. Hãy xác định đường tròn đi qua ba điểm A, B, C.

1B. Ông Hùng có ba cửa hàng A, B, C không nằm trên một đường thẳng và đang muốn tìm địa điểm O để làm kho hàng. Phải chọn vị trí của kho hàng ở đâu để khoảng cách từ kho đến các cửa hàng bằng nhau.?

2A. Chứng minh trong tam giác vuông, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của cạnh huyền.

2B. Cho tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh O là trung điểm của BC thì O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Dạng 2. Vận dụng tính chất ba đường trung trực trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

Phương pháp giải: Từ *Định lí 2*, ta có tính chất trong một tam giác, giao điểm của hai đường trung trực thì thuộc đường trung trực còn lại của tam giác đó.

Lưu ý: Trong tam giác cân, đường trung trực ứng với cạnh đáy cũng là đường trung tuyến, đường phân giác và đường cao.

3A. Cho ΔABC. M là trung điểm của BC. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O. Tính số đo góc OMB.

3B. Cho ΔMNP. Đường trung trực của MN cắt đường trung trực của MP tại I. Hạ IH $\perp$ NP. Chứng minh H là trung điểm của NP.

4A. Cho ΔABC có góc $A = 110°$. Đường trung trực của các cạnh AB và AC cắt nhau tại I. Chứng minh:

a) ΔBIC cân;

b) $BIC = 2(180° - BAC)$ và tính sốđo góc BIC.

4B. Cho ΔABC vuông tại A. Đường trung trực của các cạnh AB và AC cắt nhau tại I. Chứng minh:

a) OB = OC;

b) $BOC = 2(180° - BAC)$ và O là trung điểm của BC.

5A. Cho ΔABC (AB = AC). Đường trung trực của BC cắt trung tuyến BD tại G. Chứng minh G là trọng tâm của ΔABC.

5B. Cho ΔABC cân tại A. AM là đường trung trực của cạnh BC (M $\in$ BC). Trên đoạn thẳng AM lấy điểm G sao cho AG $= \frac{2}{3}$AM. Chứng minh đường thẳng BG đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC.

6A. Cho tam giác MNP cân tại M. Trên cạnh MN lấy điểm K, trên cạnh MP lấy điểm D sao cho MK = DP. Đường trung trực của MP cắt đường trung trực của DK tại O. Chứng minh:

a) $MKO = PDO$;

b) O thuộc đường trung trực của MN;

c) MO là tia phân giác của NMP.

6B. Cho ΔABC cân tại A Gọi O là điểm cách đều ba đỉnh A, B, C. Nối OA, OB, OC.

a) Chứng minh $OBA = OAC$.

b) Trên cạnh AB lấy điểm M, trên cạnh AC lấy điểm N sao cho BM = AN. Chứng minh O thuộc đường trung trực của MN.

Dạng 3. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng

Phương pháp giải: Vận dụng tính chất đồng quy của ba đường trung trực trong một tam giác.

7A. Cho tam giác ABC cân ở A. Gọi M là trung điểm của BC. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau ở E. Chứng minh ba điểm A, E, M thẳng hàng.

7B. Cho tam giác MNP cân ở M, đường cao MH. Các đường trung trực của MN và MP cắt nhau ở D. Chứng minh ba điểm M, D, H thẳng hàng.

8A. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A, dựng tam giác cân BCD. Chứng minh các đườmg trung trực của AB và AC đồng quy với đường thẳng AD,

8B. Cho tam giác ABC cân có A là góc tù. Gọi M là trung điểm của BC. Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A, dựng tam giác BNC cân tại N. Chứng minh đường thẳng AM và các đường trung trực của NB, NC đồng quy.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

9. Tam giác ABC có $\widehat{A}$ là góc tù. Các đường trung trực của các cạnh AB và AC cắt nhau ở O. Các điểm B và C có thuộc đường tròn tâm O bán kính OA hay không? Vì sao?

10. ΔABC nhọn, O là giao điểm hai đường trung trực của AB và AC. Trên tia đối của tia OB lấy điểm D sao cho OB = OD.

a) Chứng minh O thuộc đường trung trực của AD và CD.

b) Chứng minh các tam giác ABD, CBD vuông.

c) Biết $\widehat{ABC} = 70°$. Tính số đo góc $\widehat{ADC}$.

11. Cho ΔABC có O là giao điểm các đường trung trực của tam giác. Biết BO là tia phân giác của góc $\widehat{ABC}$. Chứng minh:

a) ΔBOA = ΔBOC; b) BO là trung trực của AC.

12. Cho tam giác ABC cân tại A. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O. Lấy điểm D thuộc cạnh AB, điểm E thuộc cạnh AC sao cho BD = CE. Chứng minh:

a) ΔDOB = ΔEOC;

b) AO là đường trung trực của DE;

c) DE // BC.

13. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{C} = 60°$. Lấy điểm D đối xứng với điểm C qua AB.

a) Có nhận xét gì về tam giác DBC ? Vì sao?

b) Chứng minh AC = $\frac{1}{2}$ BC.

c) Trên tia BA lấy điểm O sao cho BO = $\frac{2}{3}$BA. Chứng minh O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDBC.

14. Cho tam giác ABC có $A > 90°$. Trên cạnh BC lấy các điểm D và E sao cho BD = BA, CE = CA. Gọi I là giao điểm các tia phân giác trong của tam giác ABC. Chứng minh:

a) BI, CI là đường trung trực của AD, AE;

b) IA = ID = IE.

15. Trên ba cạnh AB, BC và CA của tam giác đều ABC lấy các điểm theo thứ tự M, N, P sao cho AM = BN = CP. Gọi O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC.

a) Tính số đo góc MAO.

b) Chứng minh ΔMAO = ΔOPC.

c) Chứng minh O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác MNP.

16. Cho ΔABC cân (AB = AC). Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O và cắt BC tại M và N (M và N nằm ngoài đoạn thẳng BC). Chứng minh:

a) ΔAMB và ΔANC cân;

b) ΔAMC = ΔANB;

c) AO là đường trung trực của MN

17. Cho ΔABC vuông tại A, $C = 30°$. Kẻ đường trung trực của đoạn thẳng AC, cắt AC tại H và cắt BC tại D. Nối A và D.

a) Chứng minh ΔABD đều.

b) Kẻ phân giác góc B cắt AD tại K, cắt DH kéo dài tại I. Chứng minh I là tâm đường trong đi qua ba đỉnh, của tam giác ADC.

c) Gọi E, F là hình chiếu vuông góc của I xuống các đường thẳng BC, BA. Chứng minh IE = IF = IK.

d) Tính số đo góc DAI

18. Cho ΔABC có góc A tù, tia phân giác của B và C cắt nhau tại O

Lấy E là điểm trên cạnh AB. Từ E hạ EP $\perp$ BO (P thuộc BC), từ P hạ PF $\perp$OC (F thuộc AC). Chứng minh:

a) OB và OC lần lượt là đường trung trực của PE và PF;

b) BE + CF = BC.

19. Cho tam giác ABC cân ở A, đường phân giác AK. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O.

a) Chứng minh ba điểm A, K, O thẳng hàng.

b) Kéo dài CO cắt AB ở D, kéo dài BO cắt AC ở E. Chúng minh AK và các đường trung trực của AD và AE đồng quy.

20*. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ AH vuông góc với BC, H $\in$ BC. Tia phân giác của góc $\widehat{HAB}$ cắt BC tại D, tia phân giác của góc $\widehat{HAC}$ cắt BC tại E. Chứng minh điểm cách đều ba cạnh của ΔABC chính là điểm cách đều ba đỉnh của ΔADE.

21*. Cho ΔABC có ba góc nhọn. Các điểm F, K, I là trung điểm, các cạnh BC, BA, AC. Gọi H là giao điểm các đường trung trực ΔABC. Trên tia đối của tia FH lấy điểm A' sao cho A'F = FH. Trên tia đối của tia KH lấy điểm C' sao cho KH = KC' . Trên tia đối của tia IH lấy điểm B' sao cho IH = IB'

a) Chứng minh hình sáu cạnh A'BC'AB'C có sáu cạnh bằng nhau và trong sáu cạnh đó có từng đôi một song song.

b) Cho $\widehat{ABC} = 80°, \widehat{BAC} = 60°$. Tính các góc của hình sáu cạnh A'BC'AB'C

HƯỚNG DẪN

1A. Gọi đường tròn đi qua ba điểm A, B, C có tâm O. Ta có

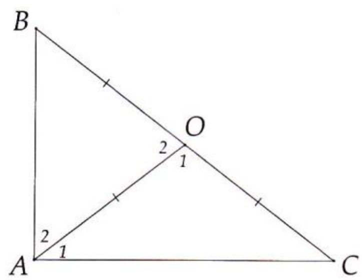
OA = OB = OC.

Ba điểm phân biệt A, B, C không thẳng hàng tạo thành tam giác ABC. Vì OA = OB = OC nên O là giao điểm ba đường trưng trực của tam giác ABC.

1B. Tương tự **1A.**

2A. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Do đó, OA = OB = OC.



Suy ra: $\widehat{B} = \widehat{A_2}, \widehat{C} = \widehat{A_1}$

=> $\begin{cases} \widehat{O_2} = 180° - 2\widehat{A_2} \\ \widehat{O_1} = 180° - 2\widehat{A_1} \end{cases}$

=> $\widehat{BOC} = \widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 360° - 2\widehat{A} = 180°$

=> B, O, C thẳng hàng, mà OB = OC

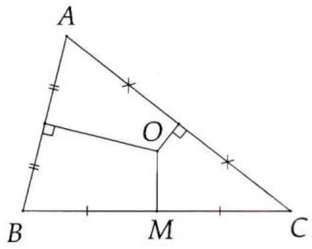
=> O là trưng điểm của BC

2B. Tương tự **2A**

3A. Từ giả thiết suy ra O thuộc đường trung trực của BC

=> OM là đường trung trực của BC

=> $OMB = 90^\circ$



3B. Tương tự **3A**

4A. a) Từ giả thiết suy ra I thuộc đường trung trực của BC

=> IB = IC = ΔBIC cân tại I

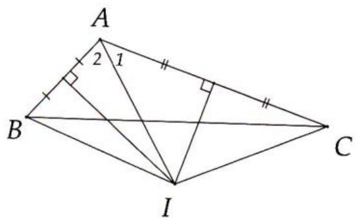
b) Có $BIA = 180^\circ - 2A_2; AIC = 180^\circ - 2A_1$

=> $BIC = BIA + AIC$

$= 180^\circ - 2A_1 + 180^\circ - 2A_2$

$= 2(180^\circ - BAC)$

Từ đó, suy ra $BIC = 140^\circ$.



4B. Tương tự **4A.**

5A. Vì ΔABC cân tại A nên đường trung trực của cạnh đáy BC đồng thời là trung tuyến của ΔABC ứng với cạnh BC.

Kết hợp với giả thiết suy ra G là trọng tâm của ΔABC.

5B. Tương tự **5A.**

6A. a) Từ giả thiết suy ra OK = OD, OM = OP.

ΔMKO = ΔPDO (c.c.c) => $MKO = PDO$

b)Từ kết quả ý a), suy ra $OKN = ODM$.

Mặt khác MN = MP, MK = PD.

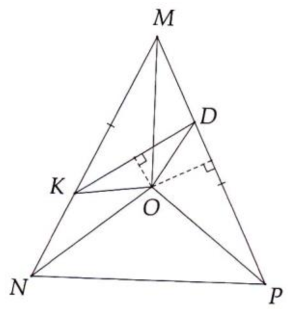
=>NK = MD.

Chứng minh được

ΔOKN = ΔODM (c.g.c) => ON = OM.

=> O thuộc đường trung trực của MN.

c) Xét ΔMNP có O là giao điểm các đường trung trực của MN và MP.



=> MO là đường trung trực của NP.

Mà ΔMNP cân tại M nên MO đồng thời là tia phân giác của góc NMP.

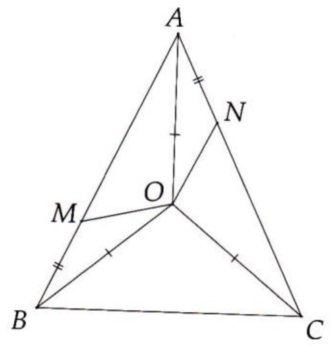
6B. a) Từ giả thiết suy ra OA = OB = OC.

Suy ra ΔAOB = ΔAOC (c.c.c)

Mà ΔAOB, ΔAOC là các tam giác cân đỉnh O nên $OBA = OAC$

b) Chứng minh được ΔBMO = ΔANO (c.g.c) => OM = ON.

=> O thuộc đường trung trực của MN.

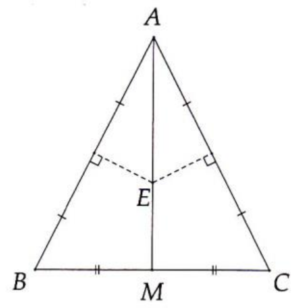


7A. Chứng minh được: ΔABM = ΔACM (c.c.c).

Từ đó, suy ra AM là đường trung trực của BC.

Theo tính chất ba đường trung trực của tam giác, ta suy ra điểm E thuộc đường trung trực của BC.

Vậy ba điểm A, E, M thẳng hàng.

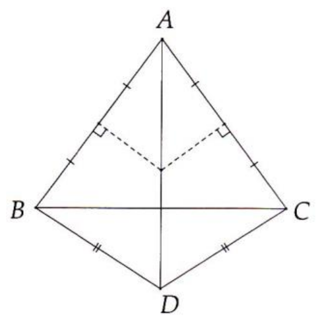


7B. Tương tự **7A.**

8A. Từ giả thiết, ta có: AB = AC, DB = DC.

=> AD là đường trung trực của BC.

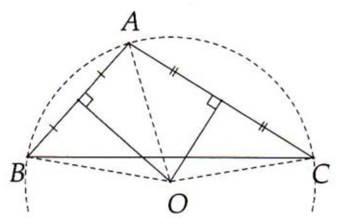
Xét ΔABC, theo tính chất ba đường trung trực trong tam giác ta có các đường trung trực của AB và AC đồng quy với đường thẳng AD.



8B. Tương tự **8A.**

9. Từ giả thiết suy ra OA = OB = OC.

Vậy các điểm B và C có thuộc đường tròn tâm O bán kính OA.

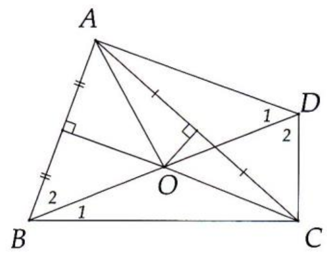


10. a) Ta có OA = OB = OC nên OA = OD = OC.

=> O là giao điểm hai đường trung trực của AD và DC.

b) Ta có : OA = OB => $B_2 = BAO$.

OA = OD => $D_1 = DAO$.



Xét ΔBAD có:

$B_2 + BAO + DAO + D_2 = 180°$

=> $2(BAO + DAO) = 180° => BAD = 90°$

Vậy tam giác ABD vuông tại A

Tương tự, ta chứng minh được tam giác BCD vuông tại C

Ta có thể chú ý rằng AO = $\frac{1}{2}$BD và OC = $\frac{1}{2}$BD. Suy ra kết quả

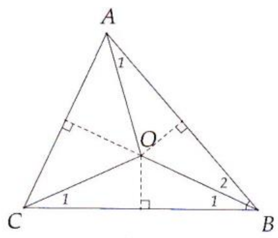
ΔABD vuông tại A và ΔBCD vuông tại C.

c) Ta có: $B_2 + D_1 = 90°; B_1 + D_2 = 90°$

Suy ra $B_1 + B_2 + D_2 + D_1 = 180°$

=> $ABC + ADC = 180° => ADC = 180° - ABC = 110°$

11. a) Ta có OA = OB = OC và $B_1 = B_2$



nên $C_1 = B_1 = B_2 = A_1$

=> $AOB = COB$

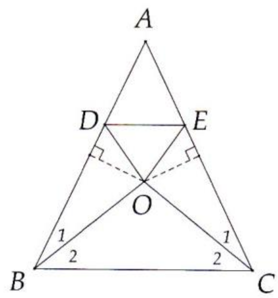
=> ΔAOB = ΔCOB (c.g.c).

b) ΔAOB = ΔCOB => BA = BC.

Mà OA = OC => BO là đường trung trực

của AC.

12. Ta có OB = OC, AB = AC.



$B_2 = C_2, ABC = ACB => B_1 = C_1$

=> ΔDOB = ΔEOC (c.g.c).

b) ΔDOB = ΔEOC => OD = OE.

Mặt khác: AD = AB - BD = AC - CE = AE

=> AO là đường trung trực của DE.

c) AO là đường trung trực của DE

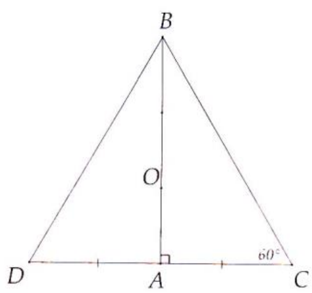
và BC nên AO $\perp$DE, AO $\perp$ BC => DE // BC.

13. a)Từ giả thiết suy ra AB là đường

trung trực của CD. Suy ra BD = BC.

Mà C = 60° => ΔBCD là tam giác đều.

b) Ta có: AC = DA = $\frac{1}{2}$CD.



Từ kết quả ý a), suy ra CD = BC.

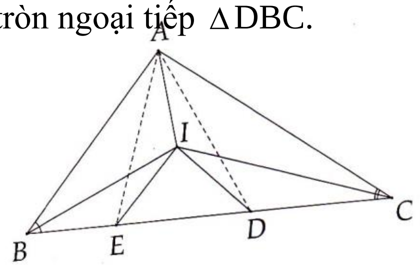
Do đó AC = $\frac{1}{2}$ BC.

c) Xét ΔDBC đều có trung tuyến BA và BO = $\frac{2}{3}$ BA => O là trọng tâm ΔDBC.

=> O cũng là giao của ba đường trung trực của ΔDBC.

=> OA = OB = OC => O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDBC.

14. a) ΔBAC = ΔBAD nên ΔBCD là tam giác đều.



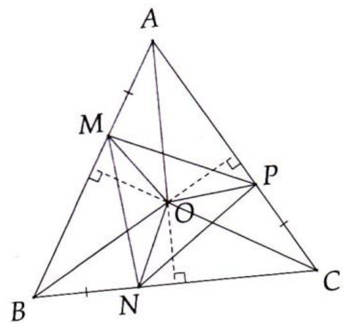
b) AC = $\frac{1}{2}$ DC = $\frac{1}{2}$ BC.

c) Do BA là trung tuyến nên O là trọng tâm. Suy ra CO, DO là trung tuyến.

Mà ΔBCD đều nên DO,CO cũng là trung trực của BC, BD.

Vậy A là tâm đường tròn ngoại tiếp A.

15. a) Vì ΔABC đều và O là giao điểm ba đường trung trực nên AO là tia phân giác của A.



=> $MAO = \frac{BAC}{2} = 30°$

b) Tương tự ý a), $OCP = 30°$

Chứng minh được ΔMAO = ΔPCO (c.g.c).

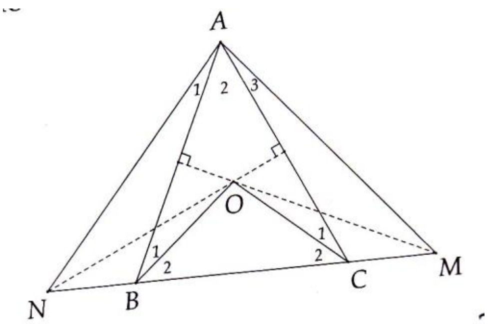
Ta có: ΔMAO = ΔOPC => OM = OP (1).

Tương tự ý b), ΔMAO = ΔNBO (c.g.c)

=> OM = ON (2).

Từ (1) và (2) suy ra O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác MNP.

16. a) Từ giả thiết suy ra NA = NC, MA = MB nên ΔAMC cân tại N và ΔANB cân tại M



b) Ta có: $A_1 = NAC - A_2$

$A_3 = BAM - A_2$ (1).

Từ ý a) và ΔABC cân tại A, ta có:

$NAC = ACB = ABC = BAM$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $A_1 = A_3$. Ta chứng minh được

ΔAMC = ΔANB (c.g.c).

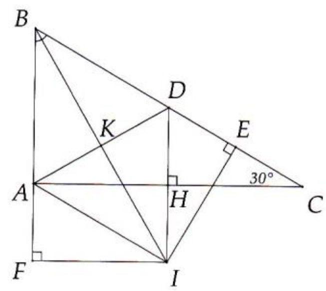
c) O là giao điểm của các trung trực của ΔABC => OB = OC.

Từ ý b), suy ra AN = AM.

Từ ΔOBN = ΔOCM suy ra OM = ON.

Vậy OA là trung trực của MN.

17. a) $C = 30° => B = 60°$



Ta có: DA = DC => $DAC = C = 30°$

=> BAD = 60° => ΔABD đều.

b) ΔABD đều => BK là đường trung trực của AD => IA = ID,

Mà I $\in$DH =>IA = IC.Vậy IA = IC = ID.

=> I là tâm đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ADC.

c) I thuộc phân giác của góc B => IE = IF.

DH là đường trung trực của AC => DH là phân giác của ADC

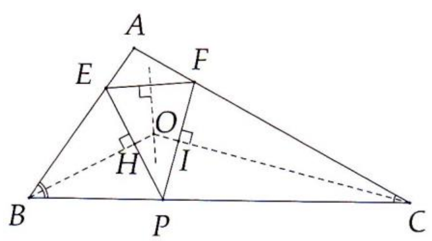
=> IK = IE. Vậy IE = IF = IK.

d) IK = IF => AI là tia phân giác của DAF.

$BAD = 60° => DAF = 120°$

$$=> DAI = \frac{DAF}{2} = 60°$$

18. a) Gọi H là giao điể của PE với OB và I là giao điểm của PF với OC



Chứng minh được:

ΔBEH = ΔBPH (cgv- gn)

=>BE = BP, HE = HP.

=> OB là đường trung trực của PE.

Tương tự, ΔFOC = ΔPOC => CF = CP, IF = IP.

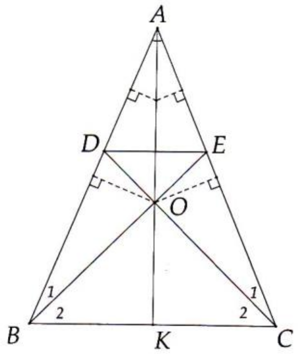
=> OC là đường trung trực của PF.

b) Từ ý a), ta có: BE + CF = PB + PC = BC.

19. a) Ta có: ΔABE = ΔACD (c.g.c). Từ đó suy ra AO là đường trung trực của đoạn DE.

Xét ΔABC, theo tính chất ba đường trung trực của tam giác nên O thuộc đường trung trực của BC.

Vậy ba điểm A, D, O thẳng hàng.



b) Ta có $ABC = ACB, B_2 = C_2$

=> $B_1 = C_1$

Chứng minh ΔADC = ΔAEB (g.c.g), suy ra AD = AE (1).

Mặt khác, có OB = OC, BE = CD (vì ΔADC = ΔAEB) nên OD = OE (2).

Từ (1) và (2) suy ra AK là đường trung trực của DE.

Xét ΔADE, theo tính chất ba đường trung trực của tam giác, ta có AK và các đường trung trực của AD và AE đồng quy.

20*. Vẽ các tia phân giác trong tại B và C của ΔABC, chúng cắt nhau tại O. Suy ra O cách đều ba cạnh của ΔABC.

Ta có: $AEB = C + A_4, EAB = HAB + A_3$

Vì $C = HAB$ (do cùng phụ với góc B)

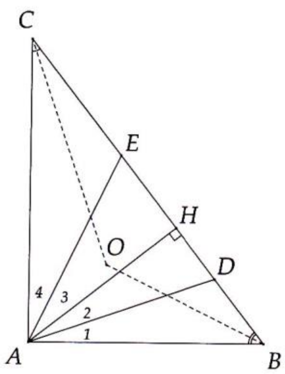
và $A_4 = A_3$, nên $AEB = EAB$.

Suy ra ΔABE cân tại B.

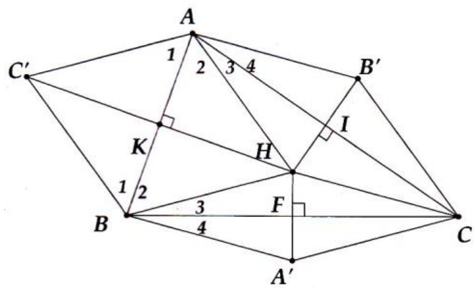
Vậy đường phân giác BO của góc B là đường trung trực của cạnh AE

Tương tự, ta cũng có đường phân giác CO của góc C cũng là đường trung trực của cạnh AD.

Từ đó, suy ra O cách đều ba đỉnh của ΔADE.



21*. a) Từ giả thiết suy ra ΔAKH = ΔBKC' (c.g.c)



=> AH = BC'.

Mà $A_1 = B_1$ => AH // BC'

Tương tự, ΔAHI = ΔCB'J

=>AH = CB', AH // CB'.

Vậy ta có BC' = CB' (= AH)

và BC' // CB'(//AH).

Tương tự, ta có:

AC' = CA' (= BH) và AC' // CA' (// BH);

AB' = BA' (= CH) và AB' // BA' (//CH).

Mà H là giao điểm các đường trung trực ΔABC

nên AH = BH = CH.

Vậy hình sáu cạnh A'BC'AB'C có sáu cạnh bằng nhau và trong sáu cạnh đó có từng đôi một song song.

b) Tính được $ACB = 40°$

Do ΔC'BH, ΔHBA' cân nên $B_1 = B_2$ và $B_3 = B_4$

Suy ra $C'BA' = 2ABC = 160°$

Tương tự, $C'AB' = 2ABC = 120°$ và $B'CA' = 2ACB = 80°$

Do $\begin{cases} AB'//BA' \\ CB'//BC' \end{cases}$ => $AB'C = A'BC' = 160°$

Tương tự, $AC'B = B'CA' = 80°$ và $BA'C = 2C'AB' = 120°$

CHỦ ĐỀ 9. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

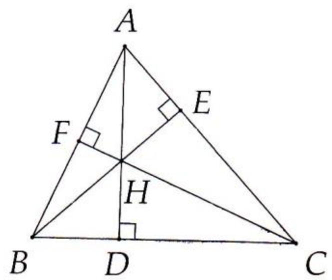
I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đường cao của tam giác

Đường cao của tam giác là đoạn vuông góc kẻ tà một đỉnh đến đường thẳng chứa cạnh đối diện.

2. Tính chất ba đường cao của tam giác

Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó gọi là trực tâm của tam giác.

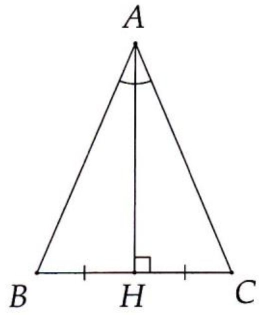


Trong hình vẽ AD, BE, CF là các

đường cao, H là trực tâm của tam giác ABC.

3. Về các đường cao, trung tuyến, trung trực, phân giác của tam giác cân

- Trong một tam giác cân, đường cao ứng với cạnh đáy đồng thời là đường phân giác, đường trung tuyến, đường trung trực của tam giác đó.



- Trong một tam giác, nếu có hai trong bốn loại đường (đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực,đường cao) trùng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.
- Trong một tam giác vuông, trực tâm của tam giác chính là đỉnh góc vuông của tam giác đó.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định trực tâm của một tam giác

Phương pháp giải: Để xác định trực tâm của một tam giác, ta cần tìm giao điểm hai đường cao của tam giác đó

1A. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chỉ ra các đường cao của tam giác HBC Từ đó chỉ ra trực tâm của tam giác đó.

b) Chỉ ra trực tâm của các tam giác HAB và HAC.

1B. Cho tam giác HBC có $H > 90^\circ$, các đường cao BD và CE cắt nhau tại A. Tìm trực tâm của tam giác ABC.

2A. Hãy giải thích tại sao trực tâm của tam giác vuông trùng với đỉnh góc vuông?

2B. Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH và trung tuyến AM. Chứng minh trực tâm của các tam giác ABC, MAB và MAC thẳng hàng.

Dạng 2. Sử dụng tính chất trực tâm của tam giác để chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Phương pháp giải: Nếu H là giao điểm hai đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC thì AH $\perp$ BC.

3A. Cho tam giác MNP có ba góc nhọn, các đường cao NQ, PR cắt nhau tại S.

a) Chứng minh MS $\perp$ NP. b) Cho $MNP = 65^\circ$. Tính SMR.

3B. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao AD, BE cắt nhau tại I.

a) Chứng minh CI $\perp$ AB.

Cho $ABC = 50°$. Tính AIE, DIE.

4A. Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Lấy điểm K thuộc đoạn thẳng HC. Qua K kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AH tại D. Chứng minh AK $\perp$ CD.

4B. Cho tam giác MNP vuông tại M. Trên cạnh MN lấy điểm Q, kẻ QR $\perp$NP (R $\in$ NP). Gọi O là giao điểm của các đường thẳng PM và RQ. Chứng minh PQ$\perp$ ON.

5A. Cho tam giác MNP vuông tại M (MP < MN). Trên cạnh MN lấy điểm Q sao cho MQ = MP, trên tia đối của tia MP lấy điểm R sao cho MR = MN. Chứng minh:

a) PQ $\perp$ NR. b) RQ $\perp$ NP.

5B. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên cạnh AB lấy điểm D (D khác A, B), trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho AE = AD. Tia ED cắt BC tại F. Chứng minh:

a) EF$\perp$ BC b) DF = BF; c) CD $\perp$ BE.

Dạng 3. Đường cao đối với tam giác cân

Phương pháp giải: Sử dụng tính chất: Trong một tam giác cân đường cao ứng với cạnh đáy đồng thời là đường phân giác, đường trung tuyến, đường trung trực của tam giác đó.

6A. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao BE cắt đường trung tuyến AD ở H. Chứng minh CH $\perp$ AB.

6B. Cho tam giác MNP cân tại M, đường cao PQ cắt đường phân giác MS ở K. Chứng minh NK $\perp$MP.

7A. Cho tam giác ABC cân tại A, các đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Chứng minh AH là tia phân giác của BAC.

7B. Cho tam giác DEF cân tại D, các đường cao EM, FN cắt nhau tại O. Gọi I là giao điểm của DO với EF. Chứng minh IE = IF.

Dạng 4. Sử dụng tính chất trực tâm để chứng minh ba đường thẳng đồng quy

Phương pháp giải: Nếu ba đường thẳng là ba đường cao của một tam giác thì chúng cùng đi qua một điểm.

8A. Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường phân giác BM. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho BD = BA.

a) Chứng minh BM$\perp$ AD.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên AC,K là hình chiếu vuông góc của A trên DM. Chứng minh ba đường thẳng AK, BM, DH đồng quy.

8B. Cho tam giác ABC vuông tại B, kẻ đường phân giác AD. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho AB = AE.

a) Chứng minh DE $\perp$ AC.

b) Gọi F là hình chiêu vuông góc của C trên đường thẳng AD

Chứng minh ba đường thẳng AB, ED, CF đồng quy.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

9. Trong các câu sau, câu nào đúng?

Cho ΔMNP không vuông, H là trực tâm, khi đó:

a) M là trực tâm của tam giác HNP;

b) N là trực tâm của tam giác MPH;

c) P là trực tâm của tam giác MHN;

d) M là trực tâm của tam giác MNP.

10. Cho tam giác MNO có ba góc nhọn. Gọi K, P lần lượt là các chân đường cao kẻ từ M và N . Gọi S là giao điểm của MK và NP.

a) Chứng minh OS $\perp$ MN. b) Cho $MNO = 70$. Tính OSK .

11. Cho tam giác ABC cân tại A, kẻ đường cao CD. Đường trung trực của BC cắt CD tại M.

a) Chứng minh BM $\perp$ AC.

b) Tính BMD biết $ABC = 70°$.

12. Cho tam giác ABC có AB = AC = 13 cm, BC = 10 cm. Tính độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC.

13. Cho tam giác ABC có BC là cạnh lớn nhất. Gọi I là giao điểm các đường phân giác của góc B và góc C. Trên cạnh BC lần lượt lấy các điểm D, E sao cho CD = CA, BE = BA.

a) Chứng minh BI $\perp$AE và CI $\perp$ AD.

b) Gọi M là giao điểm của BI và AD, N là giao điểm của CI và AE. Chứng minh AI $\perp$ MN.

14. Cho tam giác AMN cân tại A. Đường trung trực d của AM cắt đường thẳng MN tại P. Gọi D là hình chiếu vuông góc của M trên AP và E là trung điểm của MN. Chứng minh ba đường thẳng d,MD, AE đồng quy.

15*. Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của HB, HA. Chứng minh AM vuông góc với CN.

HƯỚNG DẪN

1A. Học sinh tự làm.

1B. Học sinh tự làm.

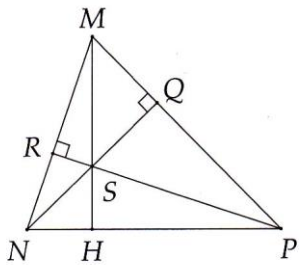
2A. Học sinh tự làm.

2B. Học sinh tự làm.

Các trực tâm cùng nằm trên đường cao AH.

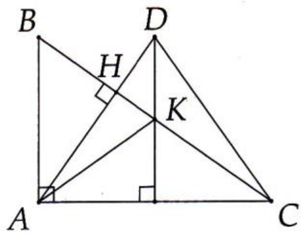
3A. Chú ý S là trực tâm ΔMNP, từ đó MS $\perp$NP.

b) Gọi H là giao điểm của MS với NP. Chú ý ΔMHN vuông, từ đó tính được $SMR = 25°$



3B. **a)** Chú ý I là trực tâm ΔABC.

b) Tính được $AIE = 50°, DIE = 130°$



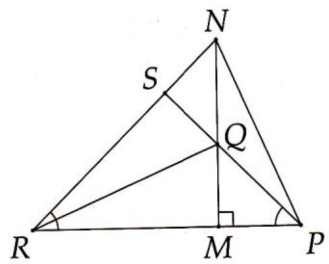
4A. Chú ý AB $\perp$AC, từ đó DK $\perp$AC.

Bởi vậy K là trực tâm ΔADC, suy ra AK $\perp$CD.

4B. Chú ý Q là trực tâm ΔPNO.

5A. a) Gọi S là giao điểm của PQ và NR. Tính được $SPR = SRP = 45°$, từ đó PQ $\perp$ NR.

b) Từ kết quả ý a, ta có Q là trực tâm ΔPNR => RQ $\perp$ NP.

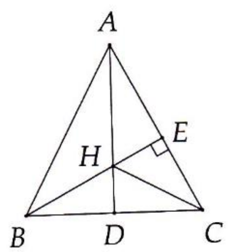


5B. a) Chú ý $FEC = FCE = 45°$ và ΔBDF vuông cân.

b) Dùng kết quả ý a, để có D là trực tâm ΔEBC.

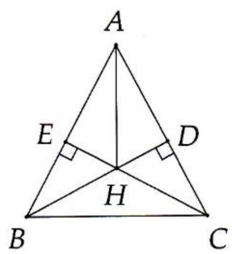
Từ đó CD $\perp$ BE.

6A. Chú ý AD cũng là đường cao của ΔABC, từ đó H là trực tâm ΔABC suy ra CH $\perp$AB.



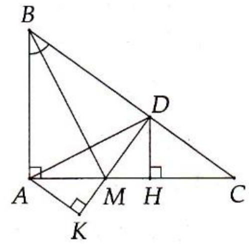
6B. Tương tự **6A**, chứng minh được K là trực tâm của ΔMNP

7A. Chú ý H là trực tâm ΔABC, từ đó AH



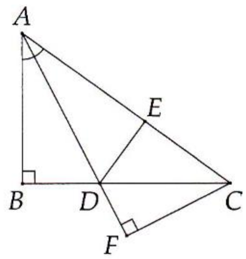
vừa là đường cao vừa là đường phân giác.

7B. Tương tự 7A, chứng minh được AI là đường trung tuyến của ΔABC, từ đó IE = IF.



8A. Chú ý tam giác ABD cân tại B nên BM là đường phân giác cũng là đường Cao, từ đó BM $\perp$ AD.

b) Chú ý AK, BM, DH là ba đường cao của ΔAMD.



8B. a) Chứng minh được

$\Delta ABD = \Delta AED$(c.g.c)

Từ đó $\widehat{AED} = 90°$ => DE $\perp$ AC.

b) Chú ý AB, ED, CF là ba đường cao của ΔADC.

9. Học sinh tự làm.

10. a) Tương tự **3A**.

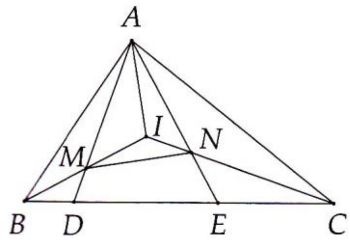
b) OS cắt MN tại Q, chú ý ΔONQ vuông, từ đó $\widehat{OSK} = 70°$.

11. Tương tự **6A**, chứng minh được M là trực tâm ΔABC.

Tính được $\widehat{BAC} = 180° - 140° - 40°$ => $\widehat{ABM} = 90° - 40° = 50°$.

Suy ra $\widehat{BMD} = 40°$.

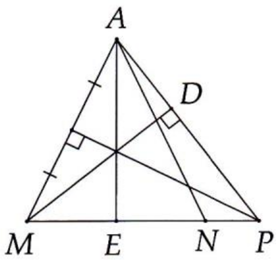
12. Chú ý AM là đường cao, từ đó dùng Định lý Pytago tính được AM = 12 cm.



13. a) Tam giác ABE cân tại B có BI là phân giác nên cũng là đường cao, từ đó BI $\perp$ AE.

Tương tự CI $\perp$ AD.

b) Từ kết quả ý a, chứng minh được I là trực tâm. ΔAMN, từ đó AI $\perp$ MN



14. Ta có tam giác AMN cân tại A, do đó AE $\perp$MN.

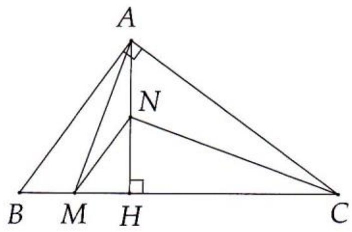
Từ đó d, MD, AE là ba đường cao của ΔAMP, bởi vậy chúng đồng quy.

Chú ý: Điểm P ở giữa M và N thì chứng minh không thay đổi.

15. Dùng tính chất đường trung bình cho ΔAHB ta có:

MN // AB => MN $\perp$ AC.

Chứng minh được N là trực tâm ΔAMC, từ đó dẫn đến AM $\perp$ CN



ÔN TẬP CHUYÊN ĐỀ 3

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xem phần *Tóm tắt lý thuyết* từ Bài 1 đến Bài 9.

II. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

1A. Cho tam giác ABC có AB < AC. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho BD = AB. Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho CE = AC. So sánh:

a) ADC và AEB; b) AD và AE.

1B. Cho tam giác ABC có góc A tù, AB < AC. Trên cạnh BC lấy M và N sao cho BN = BA, CM = CA.

a) So sánh AMC và ANB.

b) So sánh AM và AN.

c) Cho biết $ABC = 40°, ACB = 30°$.Tính ba góc ΔAMN.

2A. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM và trọng tâm G. Trên tia đối của tia BC lấy điểm E, trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho BE = CF.

a) Chứng minh G là trọng tâm tam giác AEF.

b) Gọi N là trung điểm của AF. Chứng minh ba điểm E, G, N thẳng hàng.

c) Gọi H là trung điểm của GA, I là trung điểm GE. Chứng minh IH // MN và IH = MN.

2B. Cho tam giác ABC, trung tuyên AM. Trên tia đối của tia MA lấy D sao cho MD = MA.

a) Chứng minh AB // CD và AB = CD.

b) Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AC và BD. AF cắt BC tại I, DE cắt BC tại K. Chứng minh I là trọng tâm tam giác ABD, K là trọng tâm tam giác ACD.

c) Chứng minh BI = IK = KC.

d) Chứng minh E, M, F thẳng hàng.

3A. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia BC lấy M sao cho BM = BA. Trên tia đối tia CB lấy N sao cho CN = CA. Qua M kẻ đường thẳng song song với AB, qua N kẻ đường thẳng song song với AC, chúng cắt nhau tại P.

a) Chứng minh MA là tia phân giác của PMB, NA là tia phân giác của PNC.

b) Chứng minh PA là tia phân giác của MNP.

c) Gọi D là trung điểm AM, E là trung điểm AN, các đường thẳng BD, CE cắt nhau tại Q. Chứng minh QM = QN.

d) Chứng minh ba điểm P, A, Q thẳng hàng.

3B. Cho tam giác ABC, đường phân giác của góc B và đường phân giác của C cắt nhau tại I. Qua I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại E, F.

a) Chứng mình BEI, CFI là các tam giác cân.

b) Chứng minh BE + CF = EF.

c) Gọi M là trung điểm của IB, N là trung điểm của IC, các đường thẳng EM, FN cắt nhau tại O. Chứng minh OB = OC.

d) Chứng minh ba điểm A, I, O thẳng hàng.

4A. Cho tam giác ABC cân tại A ($A < 90°$), đường phân giác AD. Kẻ đường cao BE, gọi H là giao điểm của BE và AD.

a) Chứng minh CH $\perp$ AB.

b) Gọi F là giao điểm của CH và AB. Chứng minh AD là trung trực của EF.

c) Kẻ EI $\perp$HC, FJ $\perp$ HB với I$\in$HC, J $\in$HB. Chứng minh các đường thẳng EI, FJ,AD cùng đi qua một điểm, kí hiệu điểm đó là O.

d) Chứng minh AC - AF > OF - OC.

4B. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tia phân giác góc B cắt cạnh AC ở D. Kẻ DE vuông góc với BC tại E.

a) Chứng minh DA = DE.

b) Chứng minh BD là trung trực của AE.

c) Kẻ CK vuông góc với BD tại K, các đường thẳng CK, BA cắt .nhau tại F. Chứng minh ba điểm E, D, F thẳng hàng.

d) Chứng minh BC - BA > DC - DA.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

5. Cho tam giác ABC có AB < AC, đường trung tuyến AM. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho MD = MA.

a) Chứng minh AB = CD, AB // CD.

b) So sánh MAB và MAC.

c) So sánh AMB và AMC.

6. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia AB lấy E sao cho AE = 2AB. Trên tia đối của tia BC lấy D sao cho BD = BC.

a) Chứng minh A là trọng tâm ΔCDE.

b) Gọi F là trung điểm của DE. Chứng minh ba điểm C, A, F thẳng hàng.

c) Chứng minh BE + CF > $\frac{3}{2}$ EC.

7. Cho tam giác ABC, các đường phân giác của B và C cắt nhau tại I. Kẻ ID $\perp$ AB, IE $\perp$ AC với D $\in$ AB, E $\in$ AC.

a) Chứng minh ΔADE cân tại A.

b) Chúng minh AI là trung trực của DE.

c) Biết $BAC = 60°$. Tính số đo BIC.

8. Cho tam giác ABC cân tại A, trung tuyến AM. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho BD = CE.

a) Chứng minh ΔADE cân tại A

b) Chứng minh AM là tia phân giác DAE.

c) Kẻ BH $\perp$ AD, CK $\perp$ AE với H $\in$ AD, K $\in$ AE. Chứng minh $DBH = ECK$

d) Gọi N là giao điểm của HB và KC. Chứng minh ba điểm A, M, N thẳng hàng.

9. Cho tam giác ABC cân tại A ($A < 90°$), kẻ đường phân giác AD. Trên tia đối của tia DC lấy điểm M sao cho MD = AD.

a.) Chứng minh ΔDAM vuông cân tại D.

b) Kẻ BN vuông góc với AM tại N, các đường thẳng BN và AD cắt nhau tại O. Chứng minh OM $\perp$ AB.

c) Chứng minh OB = OC.

d) Chứng minh AM // OC.

10. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH và đường phân giác BD cắt nhau tại I. Tia phân giác HAC cắt cạnh BC tại E.

a) Chứng minh ΔBAE cân tại B.

b) Chứng minh I là trực tâm ΔABE,

c) Chứng minh EI //AC.

d) Cho biết $ACB = 40°$. Tính các góc của ΔIAE.

11. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC), đường cao AH. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho BA = BM. .

a) Chứng minh AM là tia phân giác của HAC.

b) Gọi K là hình chiếu vuông góc của M trên AC. Chứng minh AM là trung trực của HK.

c) Gọi I là hình chiếu vuông góc của C trên tia AM. Chứng minh AH, KM, CI đồng quy.

d) Chứng minh AB + AC < AH + BC

12* Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, AB < AC. Kẻ đường cao AD. Vẽ điểm M sao cho AB là trung trực của DM, vẽ điểm N sao cho AC là trung trực của DN.

a) Chứng minh ΔAMN cân tại A

b) Đường thẳng MN cắt AB, AC lần lượt tại F, E. Chứng minh DA là tia phân giác của EDF.

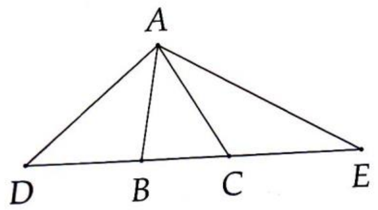
c) Chứng minh EB là tia phân giác của DEF.

d) Chứng minh BE $\perp$ AC.

e) Chứng minh AD, BE, CF đồng quy

<u>HƯỚNG DẪN</u>

1A. a) Chú ý các tam giác BAD, CAE cân, từ đó ta có



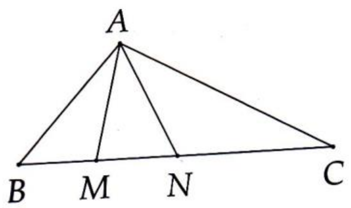
$$ADC = \frac{ABC}{2}, AEB = \frac{ACB}{2}$$

Lại có AB < AC => $ABC > ACB$

=> $ADC > AEB$

b) Dùng kết quả ý a, $ADC > AEB$ =>AD < AE.

1B. a) Chú ý các tam giác BAN, CAM cân, từ đó $AMC = 90° - \frac{ACB}{2}$ và



$ANC = 90° - \frac{ABC}{2}$

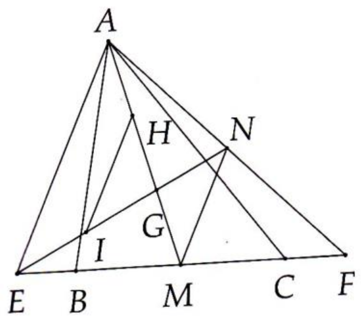
Mà AB < AC => $ABC > ACB => AMC > ANB$

b) Dùng kết quả ý a, $AMC > ANB$ =>AM < AN.

c) $ABN = 40° => ANB = 70°. ACM = 30° => AMC = 75°$

Vậy $MAN = 35°$

2A. a) Ta có ME = NF nên AM là đường trung tuyến của ΔAEE, chú ý AG = 2GM => G là trọng tâm ΔAEF.



b) EN là đường trung tuyến của ΔAEF nên EN đi qua G, do đó E,G,N thẳng hàng.

c) Ta có GH = GM = $\frac{GA}{2}$ và

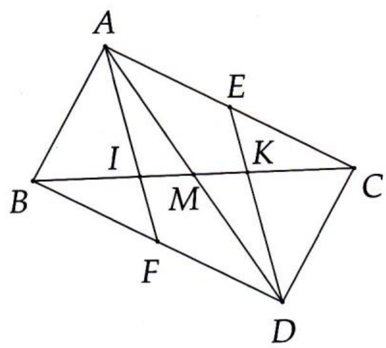
GI = GN= $\frac{GE}{2}$

Từ đó ta chứng minh được:

ΔGMN= ΔGHI (c-g-c) => IH = MN, IH //MN

2B. a) Chứng minh được ΔAMB = ΔDMC (c-g-c).

=>AB = CD, AB//CD.



b) Chú ý rằng AF, BM là các đường trung tuyến của ΔABD và DE, CM là các đường trung tuyến của ΔACD => ĐPCM.

c) Dùng kết quả ý b, ta có

BI = $\frac{2}{3}$MB = $\frac{2}{3}$MC = CK

Lại có IK = MI + MK = $\frac{1}{3}$MB + $\frac{1}{3}$MC = $\frac{2}{3}$MB=> ĐPCM.

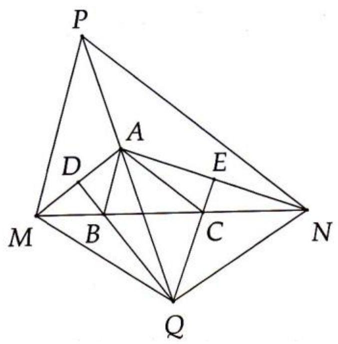
d) ME là đường trung bình của ΔABC => EM //AB.

MF là đường trung bình của ΔBDA => EM //AB.

Vậy E, M, F thẳng hàng.

3A. a) Chứng minh được:

$$\begin{cases} AMB = BAM = AMP \\ ANC = CAN = ANP \end{cases}$$



Từ đó MA là tia phân giác của

PMB, NA là tia phân giác của PNC.

b) Xét ΔPMN, dùng kết quả câu a,

ta có PA là tia phân giác của MPN.

c) Chú ý tam giác ABM cân tại B,

tam giác ACN cân tại C, do BD và CE lần lượt là trung trực của AM và AN=> QM = QA = QN.

d) Gọi Ax là tia đối của tia AP, chứng minh được

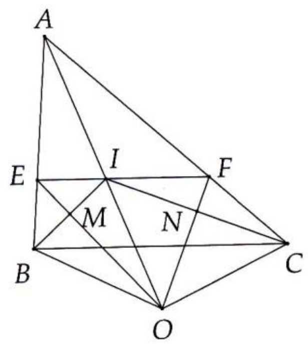
$xAB = MPA = NPA = xAC$ => PA là phân giác của BAC.

Xét ΔABC, chú ý BD, CE lần lượt là các đường phân giác ngoài tại đỉnh B, C => AQ là phân giác của BAC. Từ đó ba điểm P,A,Q thẳng hàng.

3B. Ta có $EIB = IBC = EBI$ và

$FIC = ICB = FCI$. Từ đó BEI,CFI là

các tam giác cân tại E và F.



b) Dùng kết quả ý a, ta có:

EF = IE + IF = BE + CF.

c) Chú ý EM, FN lần lượt là trung

trực của IB, IC, từ đó OB = OI = OC.

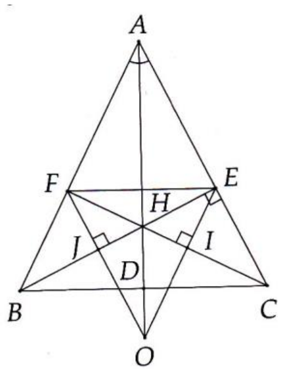
c) Xét ΔAEF, chú ý EO, BO lần lượt

d) là các đường phân giác ngoài tại

e) đỉnh E, F => AO là phân giác của BAC.

Mà AI là phân giác của BAC A, I, O thẳng hàng.

4A. a) Chứng minh được H là trực tâm của



ΔABC => CH $\perp$ AB

b) Ta có ΔAEB = ΔAFC (ch - gn).

Từ đó suy ra AE = AF.

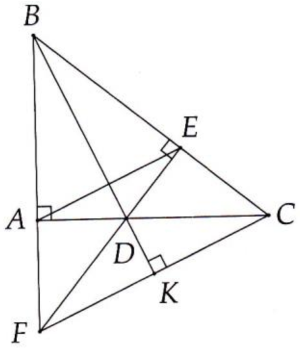
Do đó ΔAEF cân, chú ý AD là phân giác

A => AD là trung trực của đoạn thẳng EF.

c) Chú ý EI , FJ, AD là ba đường cao của ΔEHF.

d) Chú ý: AF = AE, FO = OE.

Vậy AC - AF = EC > OF - OC.



4B. a) Chú ý ΔBAD = ΔBED (ch - gn)

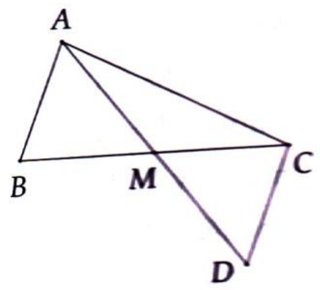
Từ đó DA = DE.

b) Vì BA = BE, DA = DE nên BD là trung trực của AE.

c) Chứng minh được D là trực tâm ΔFBC, từ đó FD $\perp$ BC, lại có DE $\perp$ BC => E, D, F thẳng hàng.

d) Chứng minh được:

BC - BA = EC > DC - DE = DC - DA



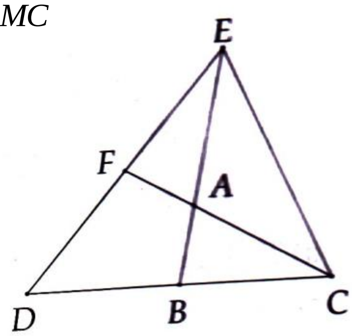
5. a) Chứng minh được ΔAMB = ΔDMC (c-g-c).

Từ đó suy ra AB = CD, AB // CD.

b) Chú ý $MAB = MDC$ và CD = AB < AC.

Từ đó ta có $MAB = MDC > MAC$.

c) Dùng kết quả ý a, chú ý $B > C \Rightarrow AMB < AMC$

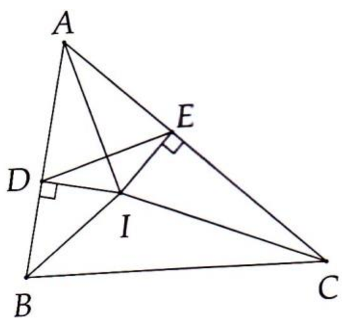


6. a) Chú ý BE là đường trung tuyến của ΔCED và AE = 2AB, từ đó A là trọng tâm ΔCDE.

b) Ta có CF là đường trung tuyến của ΔCDE => C, A, F thẳng hàng.

c) Chứng minh được

BE + CF = $\frac{3}{2}$ (AE + AC) > $\frac{3}{2}$ EC.



7. a) Chứng minh được AI là tia phân giác của BAC, từ đó ta có:

ΔAID = ΔAIE (ch - gn)

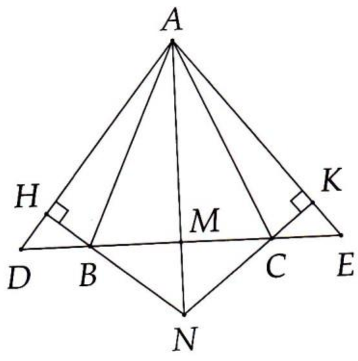
=> AD = AE => ĐPCM.

b) Ta có ΔADE cân tại A có AI là

phân giác của DAE => AI là trung trực của DE.

c) Ta có $IBC + ICB = \dfrac{ABC + ACB}{2} = 60°$

từ đó $BIC = 120°$

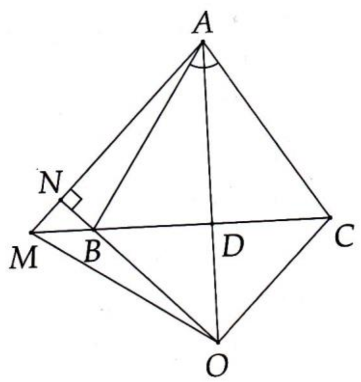


8. a) Chứng minh được MD = ME và AM $\perp$ BC => ΔADE cân tại A (AM vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến).

b) Dùng kết quả ý a, ta có AM là tia phân giác DAE

c) Chú ý $HDB = KEC$ => ĐPCM.

d) Dùng kết quả ý c, chứng minh được NB = NC, chú ý AB = AC nên AN là trung trực BC, từ đó ba điểm A, M, N thẳng hàng.



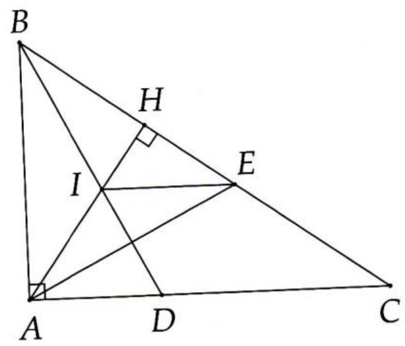
9. a) Chứng minh được AD $\perp$ BC, mà DM = DA nên ΔDAM vuông cân tại D.

b) Chứng minh được B là trực tâm ΔAOM, từ đó OM $\perp$AB.

c) Ta có AD là trung trực của BC, từ đó suy ra OB = OC.

d) Tính được $OBC = MBN = 45°$.

Từ đó $BOC = 90°$ => OC $\perp$ON => AM //OC.



10. a) Chú ý $HAE = EAC$, từ đó chứng minh được $BAE = BEA$ nên ΔBAE cân tại B.

b) Dùng kết quả ý a, với chú ý BI là phân giác của ABE suy ra BI $\perp$AE.

Từ đó I là trực tâm ΔABE.

c) Dùng kết quả ý b, ta có IE $\perp$ AB

=> IE //AC.

d) $ACB = 40° => HAC = 90° - 40° = 50° => IAE = IEA = 25°$

Suy ra AIE = 180° - 50° = 130°.

11. a) Chú ý $BAM = BMA$.

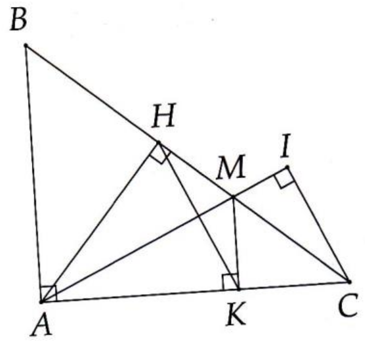
Từ đó $CAM = HAM$ nên AM là

tia phân giác của HAC

b) Dùng kết quả ý a, chứng minh

được AH = AK, MH = MK. Do

đó AM là trung trực của HK.



c) Chú ý AH, KM, CI là ba

đường cao của ΔMAC.

d) Chú ý AH = AK, AB = BM, từ

đó ta có:

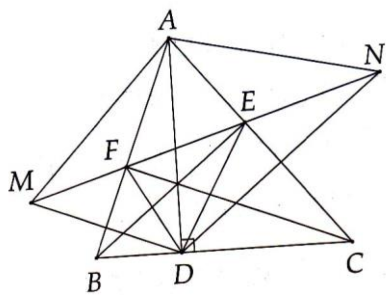
AC - AH = CK < CM = BC - BA => AB + AC < AH + BC.

12. a) Vẽ DH $\perp$ AB và lấy

HM = HD. Suy ra AB là trung

trực của DM. Thực hiện tương

tự với N.



Dùng tính chất của đường trung

trực, ta có:

AM = AD = AN

Từ đó ta có ΔAMN cân tại A.

b) Chứng minh được:

$ADE = ANE, ADF = AMF$

Mặt khác dùng kết quả ý a, ta có $AME = ANF$. Từ đó DA là phân giác của EDF.

c) Do DB $\perp$ DA nên DB là đường phân giác ngoài tại đỉnh D của ΔDEF. Vậy B cách đều hai cạnh DF và ED.

Do FB là phân giác ngoài đỉnh F của ΔDFE nên B cách đều

FE và DF.

Suy ra B cách đều FE và DE, do đó EB là phân giác DEF.

d) Chú ý EB, EC lần lượt là các đường phân giác trong và phân giác ngoài tại đỉnh E của ΔDEF, từ đó $BE \perp AC$.

e) Tương tự ý d, ta có $CF \perp AB$, do đó AD, BE,CF là ba đường cao của ΔABC, từ đó chúng đồng quy

ĐỀ KIỂM TRA CHUYÊN ĐỀ 3

Thời gian làm bài cho mỗi đề là 45 phút

ĐỀ SỐ 1

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (4 ĐIỂM)

Khoanh vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng;

Câu 1. Độ dài hai cạnh của một tam giác là 2 cm và 10 cm. Trong các số đo sau đây, số đo nào sau đây là độ dài cạnh thứ ba của tam giác đó?

A. 6 cm. B. 7 cm. C. 8 cm D. 9 cm.

Câu 2. Cho tam giác ABC, trung tuyến AD. Gọi G là điểm nằm giữa A và D sao cho $\frac{AG}{AD} = \frac{2}{3}$. Tia BG cắt AC tại E, tia CG cắt AB tại F. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\frac{BG}{EG} = 2$ B. E là trung điểm của cạnh AC

C. $\frac{FG}{CG} = \frac{2}{3}$ D. F là trung điểm của cạnh AB

Câu 3. Cho tam giác ABC có $A = B + C$. Hai đường phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O. Khi đó số đo BOC bằng:

A. 85°. B. 90°. C. 135°. D. 150°.

Câu 4. Tam giác ABC có góc A tù, $B > C$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. BC >AC >AB. B. AC >AB >BC.

C. BC >AB > AC. D. AB > AC > BC.

Câu 5. Qua điểm A không thuộc đường thẳng d, kẻ đường vuông góc AH và các đường xiên AB,AC đến đường thẳng d (H, B, C đều thuộc d). Biết rằng HB < HC. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. AB > AC. B. AB < AC.

C. AB = AC. D. AH > AB

Câu 6. Cho góc xOy có số đo bằng 60°. Điểm M nằm trong góc đó và cùng cách Ox, Oy một khoảng bằng 2 cm. Khi đó đoạn thẳng OM bằng:

A. 2 cm. B. 3 cm. C. 4 cm. D. 5 cm.

Câu 7. Trên đường trung trực của đoạn thẳng AB, lấy hai điểm phân biệt M,N. Khi đó khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $AMN \neq BMN$ B. ΔAMN = ΔBMN.

C. $MAN \neq MBN$. D. $MNA \neq MNB$.

Câu 8. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi P, Q, K lần lượt là trung điểm của ba cạnh AB, AC, BC. Gọi O là giao điểm của ba đường phân giác của ΔABC. Khi đó tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là:

A. O. B. P. C. Q. D. R.

PHẦN II. TỰ LUẬN (6 ĐIỂM)

Bài 1. *(2,5 điểm)* Cho ΔABC cân tại A có AD là đường phân giác.

a) Chứng minh ΔABD = ΔACD.

b) Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Chứng mình ba điểm A, D, G thẳng hàng.

c) Tính DG biết AB = 13 cm, BC = 10 cm.

Bài 2. *(3,5 điểm)* Cho ΔABC. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB,AC.

Trên tia đối của tia FB lấy P sao cho PF = BF. Trên tia đối của tia EC lấy điểm Q sao cho QE = CE.

a) Chứng minh A là trung điểm của PQ.

b) Chứng minh BQ // AC và CP // AB.

c) Gọi R là giao điểm của hai đường thẳng PC và QB. Chứng minh chu vi ΔPQR bằng hai lần chu vi ΔABC.

d) Chứng minh AR, BP,CQ đồng quy tại một điểm

HƯỚNG DẪN

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. D.	Câu 5. B.
Câu 2. C.	Câu 6. C.
Câu 3. C.	Câu 7. B.
Câu 4. A.	Câu 8. D.

PHẦN II. TỰ LUẬN

Bài 1. a) $\Delta ABD = \Delta ACD$ (c.g.c).

b) $\Delta ABD = \Delta ACD$ => BD = CD nên AD là đường trưng tuyến. Do G là trọng tâm nên G $\in$ AD. Vậy A, D, G thẳng hàng.

c) Ta có: BD = $\frac{1}{2}$ BC = $\frac{1}{2}$.10 = 5cm.

Do tam giác ABC cân tại A nên trung tuyến AD đồng thời là đường cao, do đó ΔABD vuông tại D.

Theo định lí pytago: $AB^2 = AD^2 + BD^2$ => AD = 12 cm.

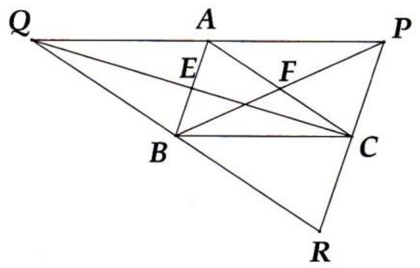
Vì G là trọng tâm ΔABC nên DG = $\frac{1}{3}$AD = $\frac{1}{3}$. 12 = 4 cm.

Bài 2. a) $\Delta AEQ = \Delta BEC$ (c.g.c), suy ra: AQ = BC và AQ// BC.

Tương tự, ta có: AP = BC và AP//BC.

Từ đó suy ra AP = AQ và A, P, Q thẳng hàng.

Vậy A là trung điểm của PQ.



b) $\Delta BEQ = \Delta ABC$ (c.g.c) => $BDE = ACE$

=> BQ // AC.

Tương tự ta có: CP // AB.

c) Chứng minh $\Delta APC = \Delta CBA$ (g.c.g).

Chứng minh $\Delta APC = \Delta BCR$ (g.c.g). .

Từ đó, suy ra AB = CP = CR nên PK = 2AB.

Tương tự, ta có QR = 2 AC.

Từ câu a), suy ra PQ = 2BC.

Vậy chu vi ΔPQR bằng hai lần chu vi ΔABC.

d) ΔPQR có RA, PB, QC là các đường trung tuyến nên AR, BP, CQ đồng quy

ĐỀ SỐ 2

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (2 ĐIỂM)

Câu 1. *(1,0 điểm)* Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

A. Trong tam giác tù, cạnh đối diện với góc tù là cạnh lớn nhất.

B. Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc nhọn là cạnh nhỏ nhất.

C. Trong một tam giác góc đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc nhọn.

D. Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn nhất là góc tù.

Cân 2 *(1,0 điểm)* Khoanh vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng:

a) Tam giác DEF có $D = 40°, E = 60°$ thì:

A. DF < EF < DE B. EF < DF < DE

C. DE < EF < DF C. EF < DE < DF

b) Trực tâm của một tam giác thường là:

A. Giao điểm các đường trung tuyến của tam giác.

B. Giao điểm các đường trưng trực của tam giác

C. Giao điểm các đường cao của tam giác.

D. Giao điểm các đường phân giác của tam giác.

PHẦN II. TỰ LUẬN (8 ĐIỂM)

Cho tam giác ABC vuông tại B, BC < BA. Lấy điểm E sao cho B là trung điểm của CE.

a) Chứng minh AB là tia phân giác của góc CAE.

b) Vẽ CM vuông góc với AE tại M, CM cắt AB tại H. Vẽ HN vuông góc với CA tại N. Chứng minh ΔMAN cân và MN song song với CE.

c) So sánh HM và HC.

d) Tìm điều kiện của ΔABC để ΔCMN cân tại N

<u>HƯỚNG DẪN</u>

PHẦN I .TRẮC NGHIỆM (2 ĐIỂM)

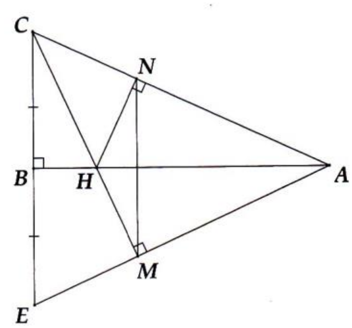
Câu 1.

A. Đúng. B. Sai.C. Đúng. D. Sai.

Câu 2.

a) B. b) C.

PHẦN II. TỰ LUẬN (8 ĐIỂM)



HS tự ghi giả thiết, kết luận.

a) Chứng minh được:

ΔABC = ΔABE (c.g.c).

Suy ra $CAB = EAB$.

Vậy AB là tia phân giác của CAE .

b) Chứng minh được:

ΔAHM = ΔAHN (ch- gn).

Suy ra AM = AN. Do đó ΔAMN cân tại A.

Mà AB là phân giác EAC nên AB $\perp$MN,

Khi đó MN song song với CE (cùng vuông góc vói I).

c) Do ΔAHM = ΔAHN nên HN = HM.

Mặt khác, trong tam giác vuông CNH có HC > HN.

Do đó HC > HM.

d) ΔCMN cân tại N thì $NCM = NMC$

Mà MN // CE nên $NMC = MCE$ (so le trong).

Suy ra $NCM = MCE$

Chứng minh được ΔCME = ΔCMA (g.c.g). Suy ra CE = CA.

Như vậy CA = CE = AE nên ΔACE là tam giác đều.

BCA = 60°.

Vậy tam giác ABC cần thêm điều kiện BCA = 60° thì ΔCMN cân tại N.

Chứng minh lại:

Khi ΔABC có BCA = 60° thì ΔCMN vừa là đường cao, vừa là phân giác ECA nên $HCN = CMN$ = 30°. Suy ra ΔCMN cân tại N