DẠNG TOÁN PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI
VÀ ỨNG DỤNG CỦA HỆ THỨC VI-ÉT

<u>Câu 1</u>: Cho phương trình: $x^2 - 5x + m = 0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình trên khi m = 6.

b) Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $|x_1 - x_2| = 3$.

Đáp án:

a) Với m = 6, ta có phương trình: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 4.6 = 1$. Suy ra phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 3$; $x_2 = 2$.

b) Ta có: $\Delta = 25 - 4.m$

Để phương trình đã cho có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{25}{4}$ (*)

Theo hệ thức Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 5$ (1); $x_1x_2 = m$ (2).

Mặt khác theo bài ra thì $|x_1 - x_2| = 3$ (3). Từ (1) và (3) suy ra $x_1 = 4$; $x_2 = 1$ hoặc $x_1 = 1$; $x_2 = 4$ (4)

Từ (2) và (4) suy ra: $m = 4$. Thử lại thì thoả mãn.

<u>Câu 2</u>: Cho phương trình ẩn x: $x^2 - 2mx + 4 = 0$ (1)

a) Giải phương trình đã cho khi m = 3.

b) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2$.

Đáp án:

a) Với m = 3 ta có phương trình: $x^2 - 6x + 4 = 0$.

Giải ra ta được hai nghiệm: $x_1 = 3 + \sqrt{5}$; $x_2 = 3 - \sqrt{5}$.

b) Ta có: $\Delta' = m^2 - 4$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{array}\right.$ (*).

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1x_2 = 4$.

Suy ra: $(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2$

$\Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 8 + 4m = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = 1 \\ m_2 = -2 \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện (*) ta thấy chỉ có nghiệm $m_2 = -2$ thỏa mãn. Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Câu 3: Cho phương trình ẩn x: $x^2 - 2mx - 1 = 0$ (1)

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b) Tìm các giá trị của m để: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$.

Đáp án:

a) Ta có $\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall m \in R$. Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Theo định lí Vi-ét thì: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1.x_2 = -1$.

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1.x_2 = 7$

$\Leftrightarrow 4m^2 + 3 = 7 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Câu 4: Cho phương trình ẩn x: $x^2 - x + 1 + m = 0$ (1)

a) Giải phương trình đã cho với m = 0.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$x_1x_2.(x_1x_2 - 2) = 3(x_1 + x_2)$.

Đáp án:

a) Với m = 0 ta có phương trình $x^2 - x + 1 = 0$

Vì $\Delta = -3 < 0$ nên phương trình trên vô nghiệm.

b) Ta có: $\Delta = 1 - 4(1 + m) = -3 - 4m$.

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow 4m \leq -3 \Leftrightarrow m \leq \frac{-3}{4}$ (1).

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 1$ và $x_1.x_2 = 1 + m$

Thay vào đẳng thức: $x_1x_2.(x_1x_2 - 2) = 3(x_1 + x_2)$, ta được:

$(1 + m)(1 + m - 2) = 3 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Đối chiếu với điều kiện (1) suy ra chỉ có m = -2 thỏa mãn.

Câu 5: Cho phương trình $x^2 - 6x + m = 0$.

a) Với giá trị nào của m thì phương trình có 2 nghiệm trái dấu.

b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $x_1 - x_2 = 4$

Đáp án:

a) Phương trình có 2 nghiệm trái dấu khi: m < 0

b) Phương trình có 2 nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = 9 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 9$

Theo hệ thức Viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 & (1) \\ x_1 . x_2 = m & (2) \end{cases}$

Theo yêu cầu của bài ra $x_1 - x_2 = 4$ (3)

Từ (1) và (3) $\Rightarrow x_1 = 5$, thay vào (1) $\Rightarrow x_2 = 1$

Suy ra $m = x_1.x_2 = 5$ (thoả mãn)

Vậy m = 5 là giá trị cần tìm.

Câu 6: Cho phương trình: $x^2 + 2(m + 1)x + m^2 = 0$. (1)

a) Giải phương trình với m = 5

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bằng - 2.

Đáp án:

a) Với m = 5 ta có phương trình: $x^2 + 12x + 25 = 0$.

$\Delta' = 6^2 - 25 = 36 - 25 = 11$

$x_1 = -6 - \sqrt{11}$; $x_2 = -6 + \sqrt{11}$

b) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi:

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 - m^2 > 0 \Leftrightarrow 2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{-1}{2}$ (*)

Phương trình có nghiệm x = - 2 $\Leftrightarrow 4 - 4(m + 1) + m^2 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 4 \end{array}\right.$ (thoả mãn điều kiện (*))

Vậy m = 0 hoặc m = 4 là các giá trị cần tìm.

Câu 7: Cho phương trình bậc 2: $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0$.

a) Tìm m, biết phương trình có nghiệm x = 0.

b) Xác định giá trị của m để phương trình có tích 2 nghiệm bằng 5, từ đó hãy tính tổng 2 nghiệm của phương trình.

Đáp án:

a) Phương trình có nghiệm x = 0 nên: $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

b) Phương trình có 2 nghiệm khi:

$\Delta' = m^2 - (m - 1)(m + 1) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - m^2 + 1 \geq 0$, đúng $\forall m$.

Ta có $x_1.x_2 = 5 \Leftrightarrow \frac{m + 1}{m - 1} = 5 \Leftrightarrow m + 1 = 5m - 5 \Leftrightarrow 4m = 6 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

Với $m = \frac{3}{2}$ ta có phương trình: $\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

Khi đó $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 6$

Câu 8: Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 1)x - m - 3 = 0$ (1)

a) Giải phương trình với m = -3

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm thoả mãn hệ thức $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

c) Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc giá trị của m.

Đáp án:

a) Với m = - 3 ta có phương trình: $x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x+8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -8 \end{array}\right.$

b) Phương trình (1) có 2 nghiệm khi:

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 + (m+3) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + m + 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow m^2 - m + 4 > 0 \Leftrightarrow (m - \frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4} > 0$ đúng $\forall m$

Chứng tỏ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\forall$ m

Theo hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) & (1) \\ x_1 - x_2 = -m - 3 & (2) \end{cases}$

Ta có $x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10$

$\Leftrightarrow 4(m-1)^2 + 2(m+3) = 10$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 6m + 10 = 10 \Leftrightarrow 2m(2m-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \frac{3}{2} \end{array}\right.$

c) Từ (2) ta có $m = -x_1x_2 - 3$ thế vào (1) ta có:

$x_1 + x_2 = 2(-x_1x_2 - 3 - 1) = -2x_1x_2 - 8$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2x_1x_2 + 8 = 0$

Đây là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc m.

<u>Câu 9</u>: Cho phương trình $x^2 - 2mx - 1 = 0$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên.

Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$

Đáp án:

a) Ta thấy: a = 1; b = - 2m; c = - 1, rõ ràng: a. c = 1 . (-1) = -1 < 0

$\Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

b) Vì phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt. Theo hệ thức Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m \\ x_1 . x_2 = \frac{c}{a} = -1 \end{cases}$$

Do đó: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 7$

$\Leftrightarrow (2m)^2 - 3.(-1) = 7 \Leftrightarrow 4m^2 = 4 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1.$

<u>Câu 10</u>: Cho phương trình ẩn x: $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 5m = 0$

a) Giải phương trình với m = -2.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm sao cho tích các nghiệm bằng 6.

Đáp án:

a) m = - 2, phương trình là: $x^2 + 3x - 6 = 0$; $\Delta = 33 > 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$

b) Ta có $\Delta = [-(2m+1)]^2 - 4(m^2 + 5m) = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 20m$

$= 1 - 16m$.

Phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 16m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{16}$

Khi đó hệ thức Vi-ét ta có tích các nghiệm là $m^2 + 5m$.

Mà tích các nghiệm bằng 6, do đó $m^2 + 5m = 6$

$$\Leftrightarrow m^2 + 5m - 6 = 0$$

Ta thấy $a + b + c = 1 + 5 + (-6) = 0$ nên $m_1 = 1$; $m_2 = -6$.

Đối chiếu với điều kiện $m \leq \frac{1}{16}$ thì m = - 6 là giá trị cần tìm.

<u>Câu 11</u>: Cho phương trình: $x^2 - 4x + m + 1 = 0$ (1)

a) Giải phương trình (1) khi m = 2.

b) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn đẳng thức $x_1^2 + x_2^2 = 5(x_1 + x_2)$

Đáp án:

a) Khi m = 2, PT đã cho trở thành: $x^2 - 4x + 3 = 0$

Ta thấy: $a + b + c = 1 - 4 + 3 = 0$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$

b) Điều kiện để phương trình đã cho có nghiệm là: $\Delta' = b'^2 - ac \geq 0 \Leftrightarrow 2^2 - (m+1) \geq 0$

$\Leftrightarrow 3 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3$ (1)

Áp dụng hệ thức Vi ét ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = m+1 \end{cases}$

$x_1^2 + x_2^2 = 5(x_1 + x_2) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5(x_1 + x_2)$

$\Leftrightarrow 4^2 - 2(m+1) = 5.4 \Leftrightarrow 2(m+1) = -4 \Leftrightarrow m = -3$

Kết hợp với điều kiện (1) , ta có m = - 3

Câu 12: Cho phương trình x^2 - (m + 5)x - m + 6 = 0 (1)

a) Giải phương trình với m = 1

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có một nghiệm x = - 2

c) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = 24$

Đáp án:

$x^2 - (m + 5)x - m + 6 = 0$ (1)

a) Khi m = 1, ta có phương trình $x^2 - 6x + 5 = 0$

$a + b + c = 1 - 6 + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 5$

b) Phương trình (1) có nghiệm x = - 2 khi:

$(-2)^2 - (m + 5) . (-2) - m + 6 = 0 \Leftrightarrow 4 + 2m + 10 - m + 6 = 0$

$\Leftrightarrow m = - 20$

c) $\Delta = (m + 5)^2 - 4(- m + 6) = m^2 + 10m + 25 + 4m - 24$

$= m^2 + 14m + 1$

Phương trình (1) có nghiệm khi $\Delta = m^2 + 14m + 1 \geq 0$ (*)

Với điều kiện trên, áp dụng định lí Vi-ét, ta có:

$S = x_1 + x_2 = m + 5$; $P = x_1. x_2 = - m + 6$. Khi đó: $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = 24 \Leftrightarrow x_1x_2(x_1 + x_2) = 24$

$\Leftrightarrow (-m+6)(m+5) = 24 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 3; m = -2.$

Giá trị m = 3 thoả mãn, m = - 2 không thoả mãn điều kiện. (*)

Vậy m = 3 là giá trị cần tìm.

Câu 13: Tìm m để phương trình ẩn x sau đây có ba nghiệm phân biệt:

$$x^3 - 2mx^2 + (m^2 + 1) x - m = 0 \quad (1).$$

Đáp án: (1) $\Leftrightarrow x^3 - 2mx^2 + m^2x + x - m = 0$

$\Leftrightarrow x (x^2 - 2mx + m^2) + x - m = 0$

$\Leftrightarrow x (x - m)^2 + (x - m) = 0$

$\Leftrightarrow (x - m) (x^2 - mx + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x^2 - mx + 1 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$

Để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt khác m.

Dễ thấy x = m không là nghiệm của (2). Vậy (2) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$\Delta = m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < - 2 \end{array}\right.$.

Vậy các giá trị m cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right.$

<u>Câu 14</u>: Cho phương trình $2x^2+(2m-1)x+m-1=0$ với m là tham số.

a) Giải phương trình khi $m=2$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn

$4x_1^2+2x_1x_2+4x_2^2=1$.

Đáp án:

a) Với $m=2$, ta có phương trình: $2x^2+3x+1=0$. Các hệ số của phương trình thoả mãn $a-b+c=2-3+1=0$ nên phương trình có các nghiệm: $x_1=-1,\ x_2=-\frac{1}{2}$.

b) Phương trình có biệt thức $\Delta=(2m-1)^2-4.2.(m-1)=(2m-3)^2\geq 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi m.

Theo định lý Viet, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2m-1}{2} \\ x_1.x_2=\dfrac{m-1}{2} \end{cases}$.

Điều kiện đề bài $4x_1^2+2x_1x_2+4x_2^2=1 \Leftrightarrow 4(x_1+x_2)^2-6x_1x_2=1$. Từ đó ta có: $(1-2m)^2-3(m-1)=1$ $\Leftrightarrow 4m^2-7m+3=0$.

Phương trình này có tổng các hệ số $a+b+c=4+(-7)+3=0$ nên phương trình này có các nghiệm $m_1=1,\ m_2=\frac{3}{4}$.

Vậy các giá trị cần tìm của m là $m=1,\ m=\frac{3}{4}$.

<u>Câu 15</u>: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + px + q = 0$ biết $p + q = 198$.

Đáp án:

Phương trình có nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow p^2 + 4q \geq 0$; gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm.

- Khi đó theo hệ thức Viét có $x_1 + x_2 = -p$ và $x_1x_2 = q$

mà $p + q = 198 \Rightarrow x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 198$

$\Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 199 = 1 . 199 = (-1)(-199)$ (Vì $x_1, x_2 \in Z$)

Nên ta có :

$x_1 - 1$	1	-1	199	-199
$x_2 - 1$	199	-199	1	-1

x_1	2	0	200	-198
x_2	200	-198	2	0

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên:

(2; 200); (0; -198); (200; 2); (-198; 0)

Câu 16: Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ với m là tham số.

a) Giải phương trình khi $m = 3$.

b) Tìm giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn điều kiện: $x_1^2 - 2x_2 + x_1x_2 = -12$.

Đáp:

a) Khi $m = 3$ phương trình trở thành $x^2 - 2x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0;\ x = 2.$$

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = 1 - (m-3) > 0$

$\Leftrightarrow m < 4$.

Khi đó theo định lí Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = 2$ (1) và $x_1x_2 = m - 3$ (2).

Điều kiện bài toán $x_1^2 - 2x_2 + x_1x_2 = -12 \Leftrightarrow x_1(x_1 + x_2) - 2x_2 = -12$

$\Leftrightarrow 2x_1 - 2x_2 = -12$ (do (1)) $\Leftrightarrow x_1 - x_2 = -6$ (3).

Từ (1) và (3) ta có: $x_1 = -2, x_2 = 4$. Thay vào (3) ta được: $(-2).4 = m - 3 \Leftrightarrow m = -5$, thoả mãn điều kiện.

Vậy $m = -5$.

Câu 17: Cho phương trình $x^2 + ax + b + 1 = 0$ với a, b là tham số.

a) Giải phương trình khi $a = 3$ và $b = -5$.

b) Tìm giá trị của a, b để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn điều kiện: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1^3 - x_2^3 = 9 \end{cases}$.

Đáp án:

a) Khi $a = 3$ và $b = -5$ ta có phương trình: $x^2 + 3x - 4 = 0$.

Do a + b + c = 0 nên phương trình có nghiệm $x_1 = 1,\ x_2 = -4$.

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = a^2 - 4(b+1) > 0$ (*)

Khi đó theo định lý Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1x_2 = b + 1 \end{cases}$ (1).

Bài toán yêu cầu $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1^3 - x_2^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ (x_1 - x_2)^3 + 3x_1x_2(x_1 - x_2) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1x_2 = -2 \end{cases}$ (2).

Từ hệ (2) ta có: $(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2 = 3^2 + 4(-2) = 1$, kết hợp với (1) được $\begin{cases} a^2 = 1 \\ b + 1 = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1, b = -3 \\ a = -1, b = -3 \end{array}\right.$.

Các giá trị này đều thoả mãn điều kiện (*) nên chúng là các giá trị cần tìm.

<u>Câu 18</u>: Cho phương trình ẩn x: $x^2 – x + m = 0$ (1)

a) Giải phương trình đã cho với m = 1.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $(x_1x_2 – 1)^2 = 9(x_1 + x_2)$.

Đáp án:

a) Với m = 1, ta có phương trình: $x^2 – x + 1 = 0$

Vì $\Delta = -3 < 0$ nên phương trình trên vô nghiệm.

b) Ta có: $\Delta = 1 – 4m$. Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0$

$\Leftrightarrow 1 – 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}$ (1).

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 1$ và $x_1.x_2 = m$

Thay vào đẳng thức: $(x_1x_2 – 1)^2 = 9(x_1 + x_2)$, ta được:

$(m – 1)^2 = 9 \Leftrightarrow m^2 – 2m – 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 4 \end{array}\right.$..

Đối chiếu với điều kiện (1) suy ra chỉ có m = -2 thỏa mãn.

<u>Câu 19</u>: Cho phương trình ẩn x: $x^2 – 2mx - 1 = 0$ (1)

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b) Tìm các giá trị của m để: $x_1^2 + x_2^2 – x_1x_2 = 7$.

Đáp án:

a) Ta có $\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall m \in R$. Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Theo định lí Vi-ét thì: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1.x_2 = -1$. Ta có: $x_1^2 + x_2^2 – x_1x_2 = 7$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 – 3x_1.x_2 = 7 \Rightarrow 4m^2 + 3 = 7 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

<u>Câu 20:</u> Cho phương trình $2x^2 - (m+3)x + m = 0$ (1) với m là tham số.

a) Giải phương trình khi $m = 2$.

b) Chứng tỏ phương trình (1) có nghiệm với mọi giá trị của m. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: A = $|x_1 - x_2|$.

Đáp án:

a) Với $m=2$ phương trình trở thành $2x^2-5x+2=0$.

$\Delta=5^2-4.2.2=9$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$.

b) Phương trình có biệt thức $\Delta=(m+3)^2-4.2.m=m^2-2m+9=(m-1)^2+8>0$ với mọi m.

Do đó phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó theo định lý Viet thì $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{m+3}{2} \\ x_1x_2=\dfrac{m}{2} \end{cases}$.

Biểu thức A = $|x_1-x_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{\left(\frac{m+3}{2}\right)^2-4\frac{m}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{m^2-2m+9}=\frac{1}{2}\sqrt{(m-1)^2+8}$.

Do $(m-1)^2\geq 0$ nên $\sqrt{(m-1)^2+8}\geq\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, suy ra A ≥ $\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $m=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\sqrt{2}$, đạt được khi $m=1$.

<u>Câu 21</u>: Cho phương trình $x^2 + (2m + 1)x + m^2 + 1 = 0$ (1)

a) Giải phương trình (1) khi m = 1

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm âm.

Đáp án:

a) Khi m = 1 ta có phương trình: $x^2 + 3x + 2 = 0$

Vì a = 1; b = 3; c = 2 => a - b + c = 0

Vậy phương trình có $x_1 = -1$; $x_2 = -2$

b) Phương trình (1) có 2 nghiệm âm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\Delta\geq 0\\ S<0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2m+1)^2-4(m^2+1)\geq 0\\ -(2m+1)<0\\ m^2+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m-3\geq 0\\ 2m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq\dfrac{3}{4}\\ m>-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m\geq\frac{3}{4}.$$

<u>Câu 22</u>: Cho phương trình $x^2 + 2(m-1)|x| + m + 1 = 0$ với m là tham số.

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.

Đáp án: Đặt $|x| = t$, được $t^2 + 2(m-1)t + m + 1 = 0$ (1)

Phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt

⇔ (1) có 2 nghiệm khác dấu hoặc (1) có nghiệm kép $t > 0$.

+) (1) Có 2 nghiệm khác dấu <=> $m + 1 < 0$ <=> $m < -1$

+) $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 3 \end{array}\right.$

Thay vào (1) để xét thì $m = 0$ thỏa mãn, $m = 3$ bị loại.

Vậy $m < -1$ hoặc $m = 0$.

<u>Câu 23</u>: Cho phương trình: $(x^2 - x - m)(x - 1) = 0$ (1)

a) Giải phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm m để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.

Đáp án:

a) Với $m = 2$, ta có phương trình

$(x^2 - x - 2)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1;\ x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 3 nghiệm $x \pm 1$; $x = 2$

b) Vì phương trình (1) luôn có nghiệm $x_1 = 1$ nên phương trình (1) có 2 đúng nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

- Hoặc phương trình $f(x) = x^2 - x - m = 0$ có nghiệm kép khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4m = 0 \\ 1 - 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{1}{4} \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}.$$

- Hoặc phương trình $f(x) = x^2 - x - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4m > 0 \\ m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{4} \\ m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$m = -\frac{1}{4}$; $m = 0$.

<u>Câu 24</u>: Cho phương trình: $x^4 - 5x^2 + m = 0$ (1)

a) Giải phương trình khi $m = 4$.

b) Tìm m để phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt.

Đáp án:

a) Với $m = 4$ ta có $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Đặt $x^2 = t$, với $t \geq 0$ ta có pt $t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1$; $t_2 = 4$

Từ đó, ta được: $\left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm $x = \pm 1;\ x = \pm 2$.

b) $x^4 - 5x^2 + m = 0$ (1) có dạng $f(y) = y^2 - 5y + m = 0$ (2)

(với $y = x^2$; $y \geq 0$)

Phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt ⇔phương trình (2):

1) Hoặc có nghiệm kép khác 0 <=> $\begin{cases} \Delta = 0 \\ f(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{25}{4} \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{25}{4}$.

2) Hoặc có 2 nghiệm khác dấu $\Leftrightarrow m < 0$.

Vậy m = $\dfrac{25}{4}$ hoặc m < 0 thì phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt

<u>Câu 25</u>: Cho phương trình: $x^2 - 2x + m = 0$ (1)

a) Giải phương trình khi m = - 3.

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn:

$\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = 1$.

Đáp án:

a) Khi m = - 3, ta có phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0$

Vì a - b + c = 1 - (- 2) + (- 3) = 0 nên $x_1 = -1$; $x_2 = 3$

b) Phương trình có nghiệm ⇔ $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$

Khi đó theo hệ thức Viét, ta có: $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1x_2 = m$ (1)

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = 1 \qquad (2)$$

Từ (1), (2), ta được: $4 - 2m = m^2 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 4 = 0$

$\Delta' = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{5}$ nên $m = -1 + \sqrt{5}$ (loại);

$m = -1 - \sqrt{5}$ (T/m vì $m \leq 1$).

Vậy giá trị m cần tìm là: $m = -1 - \sqrt{5}$

<u>Câu 26</u>: Cho phương trình: $x^2 - 2mx - 6m = 0$ (1)

a) Giải phương trình (1) khi m = 2

b) Tìm m để phương trình (1) có 1 nghiệm gấp 2 lần nghiệm kia.

Đáp án:

a) Khi m = 2, phương trình (1) trở thành: $x^2 - 4x - 12 = 0$

$\Delta' = 16$, pt đã cho có 2 nghiệm: x = - 2; x = 6.

c) Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m$

$$\Leftrightarrow m \leq -6;\ m \geq 0 \quad (2)$$

Khi đó, theo hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = -6m \end{cases}$ (3)

Phương trình có 1nghiệm gấp 2 lần nghiệm kia khi và chỉ khi:

$x_1 = 2x_2;\ x_2 = 2x_1 \Leftrightarrow (x_1 - 2x_2)(x_2 - 2x_1) = 0 \Leftrightarrow 5x_1x_2 - 2(x_1^2 + x_2^2) = 0$

$\Leftrightarrow 5x_1x_2 - 2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] = 0 \Leftrightarrow 9x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)^2 = 0$ (4)

Từ (3), (4), ta có: $-54m - 8m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0;\ m = -\dfrac{27}{4}$ (TMĐK (2))

Vậy các giá trị m cần tìm là $m = 0;\ m = -\dfrac{27}{4}$.

<u>Câu 27</u>: Cho phương trình: $(1+\sqrt{3})x^2 - 2x + 1 - \sqrt{3} = 0$ (1)

a) Chứng tỏ phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

b) Gọi 2 nghiệm của phương trình (1) là x_1, x_2. Lập một phương trình bậc 2 có 2 nghiệm là $\dfrac{1}{x_1}$ và $\dfrac{1}{x_2}$.

Đáp án :

a) Do $ac = (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) = 1 - 3 = -2 < 0$ nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

b) Vì x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1) nên theo hệ thức Vi-et, ta có:

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{1+\sqrt{3}},\quad x_1x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}.$$

Do đó: $S = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{2}{1-\sqrt{3}} = \dfrac{2(1+\sqrt{3})}{-2} = -(1+\sqrt{3})$.

và $P = \dfrac{1}{x_1}.\dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{x_1x_2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{-2} = \dfrac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -(2+\sqrt{3})$.

Vậy phương trình bậc 2 cần tìm là: $X^2 + (1+\sqrt{3})X - (2+\sqrt{3}) = 0$.

<u>Câu 28</u>: Cho phương trình: $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$ (1) (m là tham số)

a) Giải phương trình (1) với m = 3.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{3}{2}$

Đáp án:

a) Với m = 3 ta có PT $(3+1)x^2 - 2(3-1)x + 3 - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0$$

Suy ra PT có nghiệm kép x = 1/2

b) Để PT có 2 nghiệm phân biệt thì $\begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - 2m + 1 - (m+1)(m-2) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - 2m + 1 - m^2 + m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ -m+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \neq -1 \end{cases} (*)$$

Mà theo ĐL Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m+1}; x_1x_2 = \dfrac{m-2}{m+1}$

Từ $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{3}{2}$ ta có: $\dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2(m-1)}{m+1} : \frac{m-2}{m+1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2(m-1)}{m+1} . \frac{m+1}{m-2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(m-1)}{m-2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4m - 4 = 3m - 6 \Leftrightarrow m = -2 \text{ thoả mãn } (*)$$

Vậy m phải tìm là -2.

<u>Câu 29</u>: Cho phương trình: $mx^2 - (2m+3)x + m - 4 = 0$

a) Tìm m để pt có 2 nghiệm phân biệt?

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào tham số m.

Đáp án:

a) Phương trình trên có 2 nghiệm phân biệt khi:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = (2m+3)^2 - 4m(m-4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 28m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\dfrac{9}{28} \end{cases}$$

Vậy với $0 \neq m > -\dfrac{9}{28}$ thì pt trên có 2 nghiệm phân biệt.

b) Khi đó pt có 2 nghiệm thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2m+3}{m} \\ x_1x_2 = \dfrac{m-4}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 + \dfrac{3}{m} \\ x_1x_2 = 1 - \dfrac{4}{m} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x_1+x_2)=8+\dfrac{12}{m} \\ 3x_1x_2=3-\dfrac{12}{m} \end{cases}$ Cộng 2 vế pt trên ta đọc:

$4(x_1+x_2)+3x_1x_2=11$. Đây chính là hệ thức cần tìm.