HavaMATH

ĐẠO HÀM

A. LÝ THUYẾT CHUNG

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

1.1. Định nghĩa :

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a\,;b)$ và $x_0\in(a\,;b)$, đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 là : $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

1.2. Chú ý :

- Nếu kí hiệu $\Delta x=x-x_0$; $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ thì :

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

2. Ý nghĩa của đạo hàm

2.1. Ý nghĩa hình học: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C)

- $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ tại $M_0(x_0,y_0)\in(C)$.
- Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M_0(x_0,y_0)\in(C)$ là : $y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+y_0$

2.2. Ý nghĩa vật lí :

- Vận tốc tức thời của chuyển động thẳng xác định bởi phương trình : $s=s(t)$ tại thời điểm t_0 là $v(t_0)=s'(t_0)$.
- Cường độ tức thời của điện lượng $Q=Q(t)$ tại thời điểm t_0 là : $I(t_0)=Q'(t_0)$.

3. Qui tắc tính đạo hàm và công thức tính đạo hàm

3.1. Các quy tắc : Cho $u=u(x)$; $v=v(x)$; C : là hằng số .

\+ $(u\pm v)'=u'\pm v'$

\+ $(u.v)'=u'.v+v'.u \quad \Rightarrow (C.u)'=C.u'$

\+ $\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{u'.v-v'.u}{v^2}\ ,(v\neq 0)\Rightarrow\left(\dfrac{C}{u}\right)'=-\dfrac{C.u'}{u^2}$

+ Nếu $y=f(u), u=u(x) \Rightarrow y'_x = y'_u.u'_x$.

3.2. Các công thức :

+ $(C)'=0$; $(x)'=1$

+ $(x^n)'=n.x^{n-1} \Rightarrow (u^n)'=n.u^{n-1}.u'$, $(n\in\mathbb{N}, n\geq 2)$

+ $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x>0) \Rightarrow (\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, $(u>0)$

+ $(\sin x)'=\cos x \Rightarrow (\sin u)'=u'\cos u$

+ $(\cos x)'=-\sin x \Rightarrow (\cos u)'=-u'.\sin u$

+ $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow (\tan u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$

+ $(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow (\cot u)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.

4. Vi phân

4.1. Định nghĩa :

- Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 vi phân của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 là :

$$df(x_0)=f'(x_0).\Delta x \ .$$

- Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ thì tích $f'(x).\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm số $y=f(x)$. Kí hiệu : $df(x)=f'(x).\Delta x=f'(x).dx$ hay $dy=y'.dx$.

4.2. Công thức tính gần đúng :

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0).\Delta x \ .$$

5. Đạo hàm cấp cao

5.1. Đạo hàm cấp 2 :

- *Định nghĩa :* $f''(x)=\left[f'(x)\right]'$

- *Ý nghĩa cơ học:* Gia tốc tức thời của chuyển động $s=f(t)$ tại thời điểm t_0 là $a(t_0)=f''(t_0)$.

5.2. Đạo hàm cấp cao : $f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]'$, $(n\in\mathbb{N}, n\geq 2)$.

B. BÀI TẬP

TÍNH ĐẠO HÀM

Câu 1: Tìm a,b để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & khi\, x\ge 0\\ ax+b & khi\, x<0\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.

A. $\begin{cases}a=-11\\ b=11\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}a=-10\\ b=10\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}a=-12\\ b=12\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}a=-1\\ b=1\end{cases}$.

Câu 2: Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+1 & khi\, x\ge 0\\ a\sin x+b\cos x & khi\, x<0\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x_0=0$

A. $a=1;b=1$. **B.** $a=-1;b=1$. **C.** $a=-1;b=-1$. **D.** $a=0;b=1$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=x(x-1)(x-2)...(x-1000)$. Tính $f'(0)$.

A. $10000!$. **B.** $1000!$. **C.** $1100!$. **D.** $1110!$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{4x^2+8}-\sqrt{8x^2+4}}{x} & khi\;\; x\ne 0\\ 0 & khi\;\; x=0\end{cases}$ .Giá trị của $f'(0)$ bằng:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $-\dfrac{5}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** Không tồn tại.

Câu 5: Với hàm số $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{\pi}{x} & khi\;\; x\ne 0\\ 0 & khi\;\; x=0\end{cases}$.Để tìm đạo hàm $f'(x)=0$ một học sinh lập luận qua các bước như sau:

1.$\left|f(x)\right|=\left|x\right|.\left|\sin\dfrac{\pi}{x}\right|\le\left|x\right|$.

2.Khi $x\to 0$ thì $\left|x\right|\to 0$ nên $\left|f(x)\right|\to 0\Rightarrow f(x)\to 0$.

3.Do $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=0$ nên hàm số liên tục tại $x=0$.

4.Từ $f(x)$ liên tục tại $x=0\Rightarrow f(x)$ có đạo hàm tại $x=0$.

Lập luận trên nếu sai thì bắt đầu từ bước:

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x^2} & khi\;\; x\ne 0\\ 0 & khi\;\; x=0\end{cases}$.

(1) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=0$.

(2) Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm $x=0$.

Trong các mệnh đề trên:

A. Chỉ (1) đúng. **B.** Chỉ (2) đúng.

C. Cả (1), (2) đều đúng. **D.** Cả (1), (2) đều sai.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & khi\ \ x\geq 1 \\ 2x-1 & khi\ \ x<1 \end{cases}$. Tìm a,b để hàm số có đạo hàm tại $x=1$

A. $a=-1, b=0$. **B.** $a=-1, b=1$. **C.** $a=1, b=0$. **D.** $a=1, b=1$.

Câu 8: Đạo hàm của hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & khi\ \ x\leq 1 \\ \sqrt{x-1}+3 & khi\ \ x>1 \end{cases}$ là:

A. $f'(x)=\begin{cases} 2x & khi\ \ x<1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & khi\ \ x>1 \end{cases}$. **B.** $f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & khi\ \ x<1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & khi\ \ x>1 \end{cases}$.

C. $f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & khi\ \ x\leq 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & khi\ \ x>1 \end{cases}$. **D.** $f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & khi\ \ x<1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & khi\ \ x>1 \end{cases}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x+1}{x+1} & khi\, x\geq 0 \\ x^2+ax+b & khi\, x<0 \end{cases}$. Tìm a, b để hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

A. $a=0$, $b=11$. **B.** $a=10$, $b=11$. **C.** $a=20$, $b=21$. **D.** $a=0$, $b=1$.

Câu 10: Đạo hàm của hàm số $y=(x^2+1)(x^3+2)(x^4+3)$ bằng biểu thức có dạng $ax^8+bx^6+cx^5+15x^4+dx^3+ex^2+gx$. Khi đó $a-b+c-d+e-g$ bằng:

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 11: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{-x^2+2x+3}{x^3-2}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{(x^3-2)^2}$.

Khi đó $a+b+c+d+e$ bằng:

A. -12. **B.** -10. **C.** 8. **D.** 5.

Câu 12: Đạo hàm của hàm số $y=(x-2)\sqrt{x^2+1}$ biểu thức có dạng $\dfrac{ax^2+bx+c}{\sqrt{x^2+1}}$. Khi đó $a.b.c$ bằng:

A. -2. **B.** -4. **C.** -6. **D.** -8.

Câu 13: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ biểu thức có dạng $\dfrac{ax+b}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. Khi đó $P=a.b$ bằng:

A. $P=1$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2$.

Câu 14: Cho $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)(x-2)\cdots(x-2017)}$ thì $f'(0)$

A. $\dfrac{1}{2017!}$. **B.** $2017!$. **C.** $-\dfrac{1}{2017!}$. **D.** $-2017!$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|}$. Đạo hàm $f'(x)$ là biểu thức nào sau đây?

A. $\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2} & khi\, x<-1, x>1\\ 1 & khi -1<x<1\end{cases}$.

B. $\begin{cases}\dfrac{2}{x^2} & khi\, x<-1, x>1\\ 1 & khi -1\le x\le 1\end{cases}$.

C. $\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & khi\, x<-1, x>1\\ -1 & khi -1\le x\le 1\end{cases}$.

D. $\begin{cases}-\dfrac{3}{x^2} & khi\, x<-1, x>1\\ 2 & khi -1<x<1\end{cases}$.

Câu 16: Cho hàm số $y=\sin\left(\cos^2 x\right).\cos\left(\sin^2 x\right)$. Đạo hàm $y'=a.\sin 2x.\cos\left(\cos 2x\right)$. Giá trị của a là số nguyên thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(-1;5)$. **C.** $(-3;2)$. **D.** $(4;7)$.

Câu 17: Cho hàm số $y=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos x}}}$ với $x\in(0;\pi)$ có y' là biểu thức có dạng $a.\sin\dfrac{x}{8}$. Khi đó a nhận giá trị nào sau đây:

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $-\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{8}$. **D.** $-\dfrac{1}{8}$.

Câu 18: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (a là hằng số) là:

A. $-\dfrac{a^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$. **B.** $\dfrac{a^2}{\sqrt{\left(a^2+x^2\right)^3}}$. **C.** $\dfrac{2a^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$. **D.** $\dfrac{a^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$.

Câu 19: Cho hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. $y^3.y''+1=0$. **B.** $y^2.y''-1=0$. **C.** $3y^2.y''+1=0.$. **D.** $2y^3.y''+3=0.$

Câu 20: Cho hàm số $y=\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{1-\sin x\cos x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $2y''+y=0$. **B.** $y''+y=0$. **C.** $y''-y=0$. **D.** $2y''-3y=0$.

Câu 21: Cho $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x$ và $g(x)=3\sin^2 x.\cos^2 x$. Tổng $f'(x)+g'(x)$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $6(\sin^5 x+\cos^5 x+\sin x.\cos x)$. **B.** $6(\sin^5 x-\cos^5 x-\sin x.\cos x)$.

C. 6. **D.** 0.

Câu 22: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{-x+1}$. Tìm $f^{(30)}\left(x\right)$:

A. $f^{(30)}\left(x\right)=30!\left(1-x\right)^{-30}$. **B.** $f^{(30)}\left(x\right)=30!\left(1-x\right)^{-31}$.

C. $f^{(30)}\left(x\right)=-30!\left(1-x\right)^{-30}$. **D.** $f^{(30)}\left(x\right)=-30!\left(1-x\right)^{-31}$.

Câu 23: Cho hàm số $y=\cos x$. Khi đó $y^{(2016)}(x)$ bằng

A. $-\cos x$. **B.** $\sin x$. **C.** $-\sin x$. **D.** $\cos x$.

Câu 24: Cho hàm số $y=\cos^2 2x$. Giá trị của biểu thức $y'''+y''+16y'+16y-8$ là kết quả nào sau đây?

A. 0. **B.** 8.

C. $\Leftrightarrow \cos x=\dfrac{1}{2}$. **D.** $\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$. Phương trình $f^{(4)}\left(x\right)=-8$ có các nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{3}$. **B.** $x=\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{6}$.

Câu 26: Cho hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{-5x^2+14x-9}$. Tập hợp các giá trị của x để $f'\left(x<0\right)$ là

A. $\left(\dfrac{7}{5};\dfrac{9}{5}\right)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{7}{5}\right)$. **C.** $\left(1;\dfrac{7}{5}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{7}{5};+\infty\right)$.

Câu 27: Cho hàm số $f\left(x\right)=x+\sqrt{x^2+1}$. Tập các giá trị của x để $2x.f'\left(x\right)-f\left(x\right)\geq 0$ là:

A. $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. **D.** $\left[\dfrac{2}{\sqrt{3}};+\infty\right)$.

Câu 28: Cho hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-x}$. Tập nghiệm S của bất phương trình $f'\left(x\right)\leq f\left(x\right)$là:

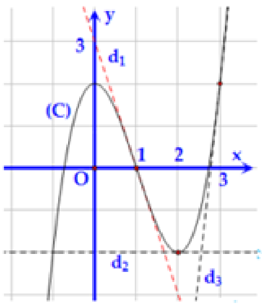
A. $S=\left(-\infty;0\right)\cup\left[\dfrac{2+\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$. **B.** $S=\left(-\infty;0\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

C. $S=\left(-\infty;\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$. **D.** $S=\left(-\infty;\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]\cup[1;+\infty)$

Câu 29: Cho các hàm số $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x,\ g(x)=\sin^6 x+\cos^2 x$. Tính biểu thức $3f'(x)-2g'(x)+2$

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Tính $A=f'(1)-f'(2)-f'(3)$



A. $A=6$ **B.** $A=-6$ **C.** $A=0$ **D.** $A=-12$

Câu 31: Cho hàm số $f(x)=\frac{mx^3}{3}-mx^2+(3m-1)x+1$. Tập các giá trị của tham số m để $y'\le 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ là:

A. $\left(-\infty;\sqrt{2}\right]$. **B.** $(-\infty;2]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 32: Cho hàm số $y=(m-1)x^3-3(m+2)x^2-6(m+2)x+1$. Tập giá trị của m để $y'\ge 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ là

A. $[3;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\left[4\sqrt{2};+\infty\right)$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)=\sin^2 x+\sin 2x$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$.

A. $m=-\sqrt{2}$, $M=\sqrt{2}$. **B.** $m=-1$, $M=1$.

C. $m=-2$, $M=2$. **D.** $m=-\sqrt{5}$, $M=\sqrt{5}$.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)=2\frac{\cos^3 x}{3}+\sin^3 x-2\cos x-3\sin x$. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $f'(x)$ trên đường tròn ta được mấy điểm phân biệt?

A. 1 điểm. **B.** 2 điểm. **C.** 4 điểm. **D.** 6 điểm.

Câu 35: Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n=n.2^{n-1},n\in N$.

B. $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n=(n+1).2^n,n\in N$.

C. $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n=(n-1).2^{n-1},n\in N$.

D. $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n=(n+1).2^{n+1},n\in N$.

Câu 36: Tính tổng với $n\in N,n\geq 2$:

$S=1.2.C_n^2+2.3.C_n^3+...+(n-2).(n-1).C_n^{n-1}+(n-1).n.C_n^n$

A. $(n-1).(n-2).2^{n-2}$. **B.** $n.(n-1).2^{n-2}$. **C.** $n.(n-1).2^{n-1}$. **D.** $(n-1).(n-2).2^n$.

Câu 37: Tính tổng $S=C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+...+(n+1)C_n^n$ bằng

A. $n.2^{n-1}$. **B.** $(n+1).2^{n-1}$. **C.** $(n+2).2^{n-1}$. **D.** $(n+1).2^n$.

Câu 38: Tính tổng: $S=100.C_{100}^0\left(\frac{1}{2}\right)^{99}-101.C_{100}^1\left(\frac{1}{2}\right)^{100}+...+199.C_{100}^0\left(\frac{1}{2}\right)^{198}+200.C_{100}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^{199}$

A. 10. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 100.

PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

Câu 39: Biết tiếp tuyến (d) của hàm số $y=x^3-2x+2$ vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ nhất. Phương trình (d) là:

A. $y=-x+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{18-5\sqrt{3}}{9},y=-x+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{18+5\sqrt{3}}{9}$.

B. $y=x,y=x+4$.

C. $y=-x+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{18-5\sqrt{3}}{9},y=-x-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{18+5\sqrt{3}}{9}$.

D. $y=x-2,y=x+4$.

Câu 40: Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ (C). Có bao nhiêu cặp điểm A,B thuộc (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau:

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 41: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+x+1$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến với đồ thị (C), hãy tìm phương trình tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

A. $y=-8x-19$. **B.** $y=x-19$. **C.** $y=-8x+10$. **D.** $y=-x+19$.

Câu 42: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x$ có đồ thị (C). Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm M, N trên (C), mà tại đó tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2017$. Khi đó $x_1 + x_2$ bằng:

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{-4}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** -1.

Câu 43: Cho đồ thị hàm số $(C): y = x^4 - 4x^2 + 2017$ và đường thẳng $d: y = \frac{1}{4}x + 1$. Có bao nhiêu tiếp tuyến của **(*C*)** vuông góc với đường thẳng *d*?

A. 2 tiếp tuyến. **B.** 1 tiếp tuyến.

C. Không có tiếp tuyến nào. **D.** 3 tiếp tuyến.

Câu 44: Trên đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ có điểm M sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2. Tọa độ M là:

A. $(2;1)$. **B.** $\left(4;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(-\frac{3}{4};-\frac{4}{7}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{4};-4\right)$.

Câu 45: Tiếp tuyến của parabol $y = 4 - x^2$ tại điểm $(1;3)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông. Diện tích của tam giác vuông đó là:

A. $\frac{25}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{25}{4}$.

Câu 46: Cho đồ thị hàm số $(C): y = \frac{1}{x}$; điểm M có hoành độ $x_M = 2 - \sqrt{3}$ thuộc **(*C*)**. Biết tiếp tuyến của **(C)** tại M lần lượt cắt *Ox*, *Oy* tại A,. B**.** Tính diện tích tam giác OAB**.**

A. $S_{\Delta OAB} = 1$. **B.** $S_{\Delta OAB} = 4$. **C.** $S_{\Delta OAB} = 2$. **D.** $S_{\Delta OAB} = 2 + \sqrt{3}$.

Câu 47: Biết với một điểm M tùy ý thuộc $(C): y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$, tiếp tuyến tại M cắt (C) tại hai điểm A,B tạo với $I(-2;-1)$ một tam giác có diện tích không đổi, diện tích tam giác đó là?

A. 2 (đvdt). **B.** 4 (đvdt). **C.** 5 (đvdt). **D.** 7 (đvdt).

Câu 48: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$ có đồ thị là (C). Tìm những điểm trên trục hoành sao cho từ đó kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị hàm số và trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

A. $M\left(-\frac{8}{27};0\right)$. **B.** $M\left(-\frac{28}{7};0\right)$. **C.** $M\left(-\frac{8}{7};0\right)$. **D.** $M\left(-\frac{28}{27};0\right)$.

Câu 49: Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$ lần lượt tại các điểm A,B thoả mãn $\mathrm{OA}=4\mathrm{OB}$.

A. $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4} \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} \\ y=-\frac{1}{4}x-\frac{13}{4} \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4} \\ y=-\frac{1}{4}x-\frac{13}{4} \end{array}\right.$.

Câu 50: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$ có đồ thị là $A\left(\frac{4}{9};\frac{4}{3}\right)$. Có bao nhiêu giá trị $\left[\begin{array}{l} \Delta: y=x \\ \Delta: y=\frac{4}{3}x \\ \Delta: y=-\frac{5}{9}x+\frac{8}{81} \end{array}\right.$ để tiếp tuyến của $\left[\begin{array}{l} \Delta: y=3x \\ \Delta: y=\frac{4}{3}x+1 \\ \Delta: y=-\frac{5}{9}x+\frac{128}{81} \end{array}\right.$ tại giao điểm của nó với trục tung tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 51: Cho hàm số $y=\frac{x+1}{2x-1}$.Tìm giá trị nhỏ nhất của m sao cho tồn tại ít nhất một điểm $M \in (C)$ mà tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai trục toạ độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $d: y=2m-1$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 52: Cho hàm số $y=133x+508;\ y=8x+8;\ y=5x-4.$, có đồ thị là (C). Có bao nhiêu điểm (C) thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại (Δ) của (C) cắt (Δ) Oy tại $-24=\left(3x_0^2-4x_0+1\right)\left(-4-x_0\right)+x_0^3-2x_0^2+x_0+4$ B sao cho diện tích tam giác $x_0=-1$ bằng $\frac{1}{4}$, $x_0=-6$ là gốc tọa độ.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 53: $y=\frac{x^2+2mx+2m^2-1}{x-1}$ (C_m) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến với (C_m) tại hai điểm này vuông góc với nhau.

A. $m=\frac{2}{3}$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=\frac{2}{3}, m=-1$. **D.** $m=0$.

Câu 54: Cho hàm số $y=\frac{x^2-2mx+m}{x+m}$. Giá trị m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại hai điểm và tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm đó vuông góc là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 55: Phương trình tiếp tuyến của $(C): y=x^3$ biết nó đi qua điểm $M(2;\ 0)$ là:

A. $y=27x\pm 54$. **B.** $y=27x-9;\ y=27x-2$.

C. $y=27x\pm 27$. **D.** $y=0; y=27x-54$.

Câu 56: Cho hàm số $f(x)=\frac{x^2}{4}-x+1$, có đồ thị (C). Từ điểm $M(2;-1)$ kẻ đến (C) hai tiếp tuyến phân biệt. Hai tiếp tuyến này có phương trình:

A. $y=-x+1$ và $y=x-3$. **B.** $y=2x-5$ và $y=-2x+3$.

C. $y=-x-1$ và $y=-x+3$. **D.** $y=x+1$ và $y=-x-3$.

Câu 57: Tiếp tuyến của parabol $y=4-x^2$ tại điểm $(1;3)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông. Diện tích của tam giác vuông đó là:

A. $\frac{25}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{25}{4}$.

Câu 58: Cho hai hàm số $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{2}}$ và $g(x)=\frac{x^2}{\sqrt{2}}$.

Gọi d_1, d_2 lần lượt là tiếp tuyến của mỗi đồ thị hàm số $f(x), g(x)$ đã cho tại giao điểm của chúng. Hỏi góc giữa hai tiếp tuyến trên bằng bao nhiêu

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Câu 59: Cho hàm số $y=\frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

A. $\Delta: y=-x+7; \Delta: y=-x-1$. **B.** $\Delta: y=-2x+7; \Delta: y=-x-11$.

C. $\Delta: y=-x+78; \Delta: y=-x-11$. **D.** $\Delta: y=-x+9; \Delta: y=-x-1$.

Câu 60: Cho hàm số $y=-x-1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng x_0.

A. $(\Delta); y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)=(3x_0^2-6x_0-9)(x-x_0)+x_0^3-3x_0^2-9x_0+11$.

B. (Δ); $I\left(\frac{29}{3};184\right)$.

C. $184=\left(3x_0^2-6x_0-9\right)\left(\frac{29}{3}-x_0\right)+x_0^3-3x_0^2-9x_0+11$

$\Leftrightarrow 2x_0^3-32x_0^2+58x_0+260=0 \Leftrightarrow x_0=13$

D. $x_0=5$; $x_0=-2$..

Câu 61: Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ (C). Có bao nhiêu cặp điểm A, B thuộc (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau:

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 62: Trên đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{x-1}$ có điểm M sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2. Tọa độ M là:

A. $(2;1)$. **B.** $\left(4;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(-\frac{3}{4};-\frac{4}{7}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{4};-4\right)$.

Câu 63: Định m để đồ thị hàm số $y=x^3-mx^2+1$ tiếp xúc với đường thẳng $d: y=5$?

A. $m=-3$. **B.** $m=3$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=2$.

Câu 64: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của m sao cho đường thẳng $d: y=mx-m-3$ cắt đồ thị $(C): y=2x^3-3x^2-2$ tại ba điểm phân biệt $A, B, I(1;-3)$ mà tiếp tuyến với (C) tại A và tại B vuông góc với nhau. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 65: Cho hàm số $y=x^3-2018x$ có đồ thị là (C). M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1=1$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1, tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2, tiếp tuyến của (C) tại điểm M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} $(n=4;5;...)$, gọi $(x_n;y_n)$ là tọa độ điểm M_n. Tìm n để: $2018x_n+y_n+2^{2019}=0$.

A. $n=647$. **B.** $n=675$. **C.** $n=674$. **D.** $n=627$.

Câu 66: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left[f(1+2x)\right]^2=x-\left[f(1-x)\right]^3$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

A. $y=-\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$. **B.** $y=\frac{1}{7}x-\frac{8}{7}$. **C.** $y=-\frac{1}{7}x+\frac{8}{7}$. **D.** $y=-x+\frac{6}{7}$.

Câu 67: Tìm tất cả các giá trị thực của thàm số m sao cho hàm số $y=x^3-3x+1(C)$, đường thẳng $d:y=mx+m+3$ giao nhau tại $A(-1;3),B,C$ và tiếp tuyến của (C) tại B và C vuông góc nhau.

A. $\left[\begin{array}{l} m=\frac{-3+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\frac{-3-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m=\frac{-2+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\frac{-2-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} m=\frac{-4+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\frac{-4-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m=\frac{-5+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\frac{-5-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

Câu 68: Cho hàm số: $y=\frac{x^4}{2}-3x^2+\frac{5}{2}(C)$ và điểm M $\in(C)$ có hoành độ x_M = a. Với giá trị nào của a thì tiếp tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) 2 điểm phân biệt khác M.

A. $\begin{cases} |a|<\sqrt{3} \\ a\neq\pm1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} |a|<\sqrt{3} \\ a\neq1 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a<\sqrt{3} \\ a\neq\pm1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} |a|<\sqrt{7} \\ a\neq\pm2 \end{cases}$

Câu 69: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+(4-3m)x+1$ có đồ thị là (C_m), m là tham số. Tìm các giá trị của m để trên (C_m) có duy nhất một điểm có hoành độ âm mà tiếp tuyến của (C_m) tại điểm đó vuông góc với đường thẳng $d:x+2y=0$.

A. $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>\frac{2}{3} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>1 \end{array}\right.$ **C.** $0<m<\frac{1}{3}$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>\frac{5}{3} \end{array}\right.$

Câu 70: Cho hàm số $y=x^3-12x+12$ có đồ thị (C) và điểm $A(m;-4)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m nguyên thuộc khoảng $(2;5)$ để từ A kẻ được ba tiếp tuyến với đồ thị (C). Tổng tất cả các phần tử nguyên của S bằng

A. 7. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 71: Cho hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm thuộc đồ thị (C) có tung độ là nghiệm phương trình $2f'(x)-x.f''(x)-6=0$.

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2

Câu 72: Cho các hàm số $y = f(x), y = f(x^2), y = \dfrac{f(x)}{f(x^2)}$ có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2),(C_3)$. Hệ số góc các tiếp tuyến của $(C_1),(C_2),(C_3)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ lần lượt là k_1, k_2, k_3 thỏa mãn $k_1 + 2k_2 = 3k_3 \neq 0$. Tính $f(1)$.

A. $f(1) = -\dfrac{1}{5}$. **B.** $f(1) = -\dfrac{2}{5}$. **C.** $V = -\dfrac{3}{5}$ **D.** $f(1) = -\dfrac{4}{5}$.

Câu 73: Cho các hàm số $y = f(x), y = g(x), y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Nếu các hệ số góc của các tiếp tuyến của các đồ thị các hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x = 0$ bằng nhau và khác 0 thì:

A. $f(0) < \dfrac{1}{4}$. **B.** $f(0) \leq \dfrac{1}{4}$. **C.** $f(0) > \dfrac{1}{4}$. **D.** $f(0) \geq \dfrac{1}{4}$.

Câu 74: Cho hàm số $y = f(x); y = g(x)$ dương có đạo hàm $f'(x); g'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_o = 0$ của đồ thị hàm số $y = f(x); y = g(x)$ và $y = \dfrac{f(x)+1}{g(x)+1}$ có cùng hệ số góc và khác 0. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(0) \leq -\dfrac{3}{4}$. **B.** $f(0) \geq -\dfrac{3}{4}$. **C.** $f(0) \leq \dfrac{3}{4}$. **D.** $f(0) \geq \dfrac{3}{4}$.

Câu 75: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ có đồ thị (C). Hai điểm A, B phân biệt trên (C) có hoành độ lần lượt là a và b$(a > b)$ và tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau. $AB = 2$. Tính $S = 2a + 3b$.

A. $S = 4$. **B.** $S = 6$. **C.** $S = 7$. **D.** $S = 8$.

Câu 76: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C). Xét điểm A thuộc (C). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại điểm thứ hai B $(B \neq A)$ thỏa mãn $ab = -\dfrac{1}{2}$ trong đó a, b lần lượt là hoành độ của A và B. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. $S = 4$. **B.** $S = 6$. **C.** $S = 7$. **D.** $S = 8$.

Câu 77: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để trên đồ thị hàm số $y = -\dfrac{2}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (3m-2)x - \dfrac{5}{3}$ tồn tại hai điểm $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$ có toạ độ thoả mãn $x_1.x_2>0$ sao cho tiếp tuyến với đồ thị hàm số đồ thị hàm số tại hai điểm đó cùng vuông góc với đường thẳng $x-2y+1=0$. Tìm số nguyên âm lớn nhất thuộc tập S.

A. -1. **B.** -3. **C.** -2. **D.** -4.

Câu 78: Gọi A là điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{5}{2}$ (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt B, C khác A sao cho $AC=3AB$ (với B nằm giữa A và C). Tính độ dài đoạn thẳng O**A.**

A. $OA=\sqrt{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{14}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Câu 79: Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ có đồ thị (C). Xét điểm A_1 có hoành độ $x_1=\frac{5}{2}$ thuộc (C). Tiếp tuyến của (C) tại A_1 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_2\neq A_1$ có hoành độ x_2. Tiếp tuyến của (C) tại A_2 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_3\neq A_2$ có hoành độ x_3. Cứ tiếp tục như thế tiếp tuyến của (C) tại A_{n-1} cắt (C) tại điểm thứ hai $A_n\neq A_{n-1}$ có hoành độ x_n. Tìm x_{2018}.

A. $x_{2018}=-2^{2018}+\frac{1}{2}$. **B.** $x_{2018}=-2^{2018}-\frac{1}{2}$.

C. $x_{2018}=-3.2^{2017}-\frac{1}{2}$. **D.** $x_{2018}=3.2^{2017}-\frac{1}{2}$.

Câu 80: Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ có đồ thị (C). Xét điểm A_1 có hoành độ $x_1=1$ thuộc (C). Tiếp tuyến của (C) tại A_1 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_2\neq A_1$ có hoành độ x_2. Tiếp tuyến của (C) tại A_2 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_3\neq A_2$ có hoành độ x_3. Cứ tiếp tục như thế, tiếp tuyến của (C) tại A_{n-1} cắt (C) tại điểm thứ hai $A_n\neq A_{n-1}$ có hoành độ x_n. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $x_n>5^{100}$.

A. 235 **B.** 234 **C.** 118 **D.** 117

Câu 81: Biết rằng tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=(x+a)^3+(x+b)^3+(x+c)^3$ có hệ số góc nhỏ nhất tại tiếp điểm có hoành độ $x=-1$ đồng thời a,b,c là các số thực không âm. Tìm GTLN tung độ của giao điểm đồ thị hàm số với trục tung?

A. 27 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 18

C. HƯỚNG DẪN GIẢI

TÍNH ĐẠO HÀM

Câu 1: Tìm a,b để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & khi\, x\ge 0\\ ax+b & khi\, x<0\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.

A. $\begin{cases}a=-11\\ b=11\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}a=-10\\ b=10\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}a=-12\\ b=12\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}a=-1\\ b=1\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Trước tiên hàm số phải liên tục tại $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1=f(0), \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=b \Rightarrow b=1$

Xét $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-1}{x+1}=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-} a=a$

Hàm số có đạo hàm tại $x=0 \Leftrightarrow a=-1$

Câu 2: Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+1 & khi\, x\ge 0\\ a\sin x+b\cos x & khi\, x<0\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x_0=0$

A. $a=1; b=1$. **B.** $a=-1; b=1$. **C.** $a=-1; b=-1$. **D.** $a=0; b=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $f(0)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(ax^2+bx+1)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(a\sin x+b\cos x)=b$

Để hàm số liên tục thì $b=1$

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax^2+x+1-1}{x}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{a\sin x+b\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.\lim_{x\to 0^-}\left(a\cos\frac{x}{2}\right)-\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.\lim_{x\to 0^-}\sin\frac{x}{2}=a$$

Để tồn tại $f'(0) \Rightarrow f'(0^+) = f'(0^-) \Leftrightarrow a = 1$

Giới hạn lượng giác $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)...(x-1000)$. Tính $f'(0)$.

A. $10000!$. **B.** $1000!$. **C.** $1100!$. **D.** $1110!$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)(x-2)...(x-1000)-0}{x} = \lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)...(x-1000)$$
$$= (-1)(-2)...(-1000) = 1000!$$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{4x^2+8}-\sqrt{8x^2+4}}{x} & khi\ x \ne 0\\ 0 & khi\ x = 0\end{cases}$ .Giá trị của $f'(0)$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** Không tồn tại.

Chọn B.

Ta có:
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{4x^2+8}-\sqrt{8x^2+4}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{4x^2+8}-2+2-\sqrt{8x^2+4}}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{4x^2}{\sqrt[3]{(4x^2+8)^2}+2\sqrt[3]{4x^2+8}+4}-\frac{8x^2}{2+\sqrt{8x^2+4}}\right) = \frac{1}{3}-2 = -\frac{5}{3}$$

Câu 5: Với hàm số $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{\pi}{x} & khi\ \ x \ne 0\\ 0 & khi\ \ x = 0\end{cases}$.Để tìm đạo hàm $f'(x) = 0$ một học sinh lập luận qua các bước như sau:

1.$|f(x)| = |x|.\left|\sin\frac{\pi}{x}\right| \le |x|$.

2.Khi $x \to 0$ thì $|x| \to 0$ nên $|f(x)| \to 0 \Rightarrow f(x) \to 0$.

3.Do $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$ nên hàm số liên tục tại $x = 0$.

4.Từ $f(x)$ liên tục tại $x = 0 \Rightarrow f(x)$ có đạo hàm tại $x = 0$.

Lập luận trên nếu sai thì bắt đầu từ bước:

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Chọn D.

Một hàm số liên tục tại x_0 chưa chắc có đạo hàm tại điểm đó, hơn nữa $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\sin\dfrac{\pi}{x}$

không có giới hạn khi $x\to 0$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x^2} & khi\ x\neq 0\\ 0 & khi\ x=0\end{cases}$.

(1) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=0$.

(2) Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm $x=0$.

Trong các mệnh đề trên:

A. Chỉ (1) đúng. **B.** Chỉ (2) đúng. **C.** Cả (1), (2) đều đúng. **D.** Cả (1), (2) đều sai.

Chọn C.

Ta có: $-|x|\le x.\sin\dfrac{1}{x^2}\le |x|$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(-|x|\right)\le \lim\limits_{x\to 0} x.\sin\dfrac{1}{x^2}\le \lim\limits_{x\to 0}|x|=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x.\sin\dfrac{1}{x^2}=0=f(0)$

Vậy hàm số liên tục tại $x=0$

Xét $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\left(\sin\dfrac{1}{x^2}\right)$

Lấy dãy (x_n): $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\pi}{2}+2n\pi}}$ có:

$\lim x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\pi}{2}+2n\pi}}=0\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1$

Lấy dãy $\left(x_n'\right)$: $x_n'=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\pi}{6}+2\pi n}}=\dfrac{1}{2}$, tương tự ta cũng có:

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n'=0\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_n'\right)=0\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+2n\pi\right)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x^2}$

không tồn tại

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & khi\ \ x\ge 1\\ 2x-1 & khi\ \ x<1\end{cases}$.Tìm a,b để hàm số có đạo hàm tại $x=1$

A. $a=-1, b=0$. **B.** $a=-1, b=1$. **C.** $a=1, b=0$. **D.** $a=1, b=1$.

Chọn C.

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=a+b=f(1)\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x-1)=1\end{cases} \Rightarrow a+b=1$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax^2+bx-(a+b)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\left[a(x+1)+b\right]=2a+b$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2-1-(a+b)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x-1-1}{x-1}=2$$

Ta có hệ: $\begin{cases}a+b=1\\2a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$

Câu 8: Đạo hàm của hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1 & khi\ \ x\le 1\\ \sqrt{x-1}+3 & khi\ \ x>1\end{cases}$ là:

A. $f'(x)=\begin{cases}2x & khi\ \ x<1\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & khi\ \ x>1\end{cases}$. **B.** $f'(x)=\begin{cases}2x+1 & khi\ \ x<1\\ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & khi\ \ x>1\end{cases}$.

C. $f'(x)=\begin{cases}2x+1 & khi\ \ x\le 1\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & khi\ \ x>1\end{cases}$. **D.** $f'(x)=\begin{cases}2x+1 & khi\ \ x<1\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & khi\ \ x>1\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Với $x<1$: $f'(x)=2x+1$

Với $x>1$: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

Với $x=1$, ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}=+\infty$ nên không có đạo hàm tại $x=1$.

Vậy $f'(x)=\begin{cases}2x+1 & khi\ \ x<1\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & khi\ \ x>1\end{cases}$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x+1}{x+1} & khi\, x\ge 0\\ x^2+ax+b & khi\, x<0\end{cases}$. Tìm a, b để hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

A. $a=0$, $b=11$. **B.** $a=10$, $b=11$. **C.** $a=20$, $b=21$. **D.** $a=0$, $b=1$.

Chọn D.

Với $x \neq 0$ hàm số luôn có đạo hàm.

Để hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải có đạo hàm tại $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = b \Rightarrow b = 1$.

Để hàm số liên tục tại $x = 0 \Rightarrow b = 1$.

Xét $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1} - 1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 + ax + b - 1}{x} = a$.

$\Rightarrow a = 0$. Vậy $a = 0$, $b = 1$.

Câu 10: Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + 1)(x^3 + 2)(x^4 + 3)$ bằng biểu thức có dạng $ax^8 + bx^6 + cx^5 + 15x^4 + dx^3 + ex^2 + gx$. Khi đó $a - b + c - d + e - g$ bằng:

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Chọn C.

$y' = 2x\left(x^3 + 2\right)\left(x^4 + 3\right) + 3x^2\left(x^2 + 1\right)\left(x^4 + 3\right) + 4x^3\left(x^2 + 1\right)\left(x^3 + 2\right)$

$= 2x\left(x^7 + 2x^4 + 3x^3 + 6\right) + 3x^2\left(x^6 + x^4 + 3x^2 + 3\right) + 4x^3\left(x^5 + x^3 + 2x^2 + 2\right)$

$= 9x^8 + 7x^6 + 12x^5 + 15x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 12x.$

$\Rightarrow a - b + c - d + e - g = 3$.

Câu 11: Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{x^3 - 2}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}{(x^3 - 2)^2}$.

Khi đó $a + b + c + d + e$ bằng:

A. -12. **B.** -10. **C.** 8. **D.** 5.

Chọn A.

$$y' = \frac{(-2x + 2)\left(x^3 - 2\right) - 3x^2\left(-x^2 + 2x + 3\right)}{\left(x^3 - 2\right)^2} = \frac{x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 4x - 4}{\left(x^3 - 2\right)^2}$$

$\Rightarrow a + b + c + d + e = -12$

Câu 12: Đạo hàm của hàm số $y = (x - 2)\sqrt{x^2 + 1}$ biểu thức có dạng $\dfrac{ax^2 + bx + c}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Khi đó $a.b.c$ bằng:

A. -2. **B.** -4. **C.** -6. **D.** -8.

Chọn B.

$$y' = \sqrt{x^2+1} + (x-2).\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Câu 13: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ biểu thức có dạng $\frac{ax+b}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. Khi đó $P = a.b$ bằng:

A. $P = 1$. **B.** $P = -1$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = -2$.

Chọn A.

$$y' = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x-1).\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2+x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}} = \frac{x+1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}.$$

$\Rightarrow P = a.b = 1$.

Câu 14: Cho $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)\cdots(x-2017)}$ thì $f'(0)$

A. $\frac{1}{2017!}$. **B.** $2017!$. **C.** $-\frac{1}{2017!}$. **D.** $-2017!$.

Chọn C.

Ta có: $f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-2017) - x\left[(x-1)(x-2)\ldots(x-2017)\right]'}{\left[(x-1)(x-2)\ldots(x-2017)\right]^2}$

$\Rightarrow f'(0) = \frac{(-1)(-2)\ldots(-2017)}{\left[(-1)(-2)\ldots(-2017)\right]^2} = -\frac{1}{2017!}$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = \frac{|1+x| - |1-x|}{|1+x| + |1-x|}$. Đạo hàm $f'(x)$ là biểu thức nào sau đây?

A. $\begin{cases} -\frac{1}{x^2} & khi\, x < -1, x > 1 \\ 1 & khi -1 < x < 1 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} \frac{2}{x^2} & khi\, x < -1, x > 1 \\ 1 & khi -1 \le x \le 1 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} \frac{1}{x^2} & khi\, x < -1, x > 1 \\ -1 & khi -1 \le x \le 1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} -\frac{3}{x^2} & khi\, x < -1, x > 1 \\ 2 & khi -1 < x < 1 \end{cases}$.

Chọn A.

Lập bảng dấu ta được: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & khi\, x < -1, x > 1 \\ x & khi -1 \le x \le 1 \end{cases}$.

- Với $x < -1$ hoặc $x > 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

- Với $-1<x<1 \Rightarrow f'(x)=1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-1$ nên hàm số liên tục tại $x=-1$.

Xét $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=-1$, $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=1$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x=-1$.

Bằng cách tương tự ta cũng chỉ ra được hàm số không có đạo hàm tại $x=1$.

Vậy $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & khi\, x<-1, x>1\\ x & khi -1<x<1\end{cases}$.

Câu 16: Cho hàm số $y=\sin(\cos^2 x).\cos(\sin^2 x)$. Đạo hàm $y'=a.\sin 2x.\cos(\cos 2x)$. Giá trị của a là số nguyên thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(-1;5)$. **C.** $(-3;2)$. **D.** $(4;7)$.

Chọn C

$$y' = -2\sin x.\cos x.\cos(\cos^2 x).\cos(\sin^2 x) - 2\sin x.\cos x.\sin(\cos^2 x).\sin(\sin^2 x)$$
$$= -\sin(2x).\cos(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\sin(2x).\cos(\cos 2x)$$

$\Rightarrow a=-1$.

Câu 17: Cho hàm số $y=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x}}}$ với $x\in(0;\pi)$ có y' là biểu thức có dạng $a.\sin\frac{x}{8}$. Khi đó a nhận giá trị nào sau đây:

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $-\frac{1}{8}$.

Chọn D.

Ta có: $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x}=\sqrt{\cos^2\frac{x}{2}}=\cos\frac{x}{2}$

Tương tự ta có biểu thức tiếp theo: $y=\sqrt{\cos^2\frac{x}{8}}=\cos\frac{x}{8}\Rightarrow y'=-\frac{1}{8}\sin\frac{x}{8}$

Câu 18: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (a là hằng số) là:

A. $-\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$. **B.** $\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. **C.** $\dfrac{2a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$. **D.** $\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$y'=\frac{\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}=\frac{a^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$$

Câu 19: Cho hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. $y^3.y''+1=0$. **B.** $y^2.y''-1=0$. **C.** $3y^2.y''+1=0.$. **D.** $2y^3.y''+3=0.$

Chọn A

Hướng dẫn giải :

Ta có: $y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, $y''=-\dfrac{1}{\sqrt{\left(2x-x^2\right)^3}}$

Thay vào: $y^3.y''+1=\sqrt{\left(2x-x^2\right)^3}.\dfrac{(-1)}{\sqrt{\left(2x-x^2\right)^3}}+1=-1+1=0.$

Câu 20: Cho hàm số $y=\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{1-\sin x\cos x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $2y''+y=0.$ **B.** $y''+y=0.$ **C.** $y''-y=0.$ **D.** $2y''-3y=0.$

Hướng dẫn giải :

Ta có : $y=\dfrac{(\sin x+\cos x)\left(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x\right)}{1-\sin x\cos x}=\sin x+\cos x$

$\Rightarrow y'=\cos x-\sin x, y''=-\sin x-\cos x$

$\Rightarrow y''+y=0.$

Câu 21: Cho $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x$ và $g(x)=3\sin^2 x.\cos^2 x$. Tổng $f'(x)+g'(x)$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $6(\sin^5 x+\cos^5 x+\sin x.\cos x)$. **B.** $6(\sin^5 x-\cos^5 x-\sin x.\cos x)$.

C. 6. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có:

$$f'(x)=6\sin^5 x.\cos x+6\cos^5 x.(-\sin x)=6\sin^5 x.\cos x-6\cos^5 x.\sin x$$

$$g'(x)=\left(\frac{3}{4}.\sin^2 2x\right)'=\frac{3}{2}\sin 2x.2.\cos 2x$$

Suy ra:

$f'(x)+g'(x)=6.\sin x.\cos x\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)+6\sin x.\cos x.\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)$

$\Leftrightarrow -6\sin x.\cos x.\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)+6\sin x.\cos x.\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=0$

Câu 22: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2}{-x+1}$. Tìm $f^{(30)}(x)$:

A. $f^{(30)}(x)=30!(1-x)^{-30}$.

B. $f^{(30)}(x)=30!(1-x)^{-31}$.

C. $f^{(30)}(x)=-30!(1-x)^{-30}$.

D. $f^{(30)}(x)=-30!(1-x)^{-31}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Với $g(x)=\dfrac{k}{(ax+b)}\left(x\neq -\dfrac{b}{a},k\in R,k\neq 0\right)$. Ta có: $g^{(n)}(x)=\dfrac{k.(-1)^n.a^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$, $\forall x\neq -\dfrac{b}{a}$.

Hàm số $f(x)=\dfrac{x^2}{-x+1}=-(x+1)+\dfrac{1}{-x+1}$. Nên $f^{(30)}(x)=\dfrac{30!}{(-x+1)^{31}}=30!(-x+1)^{-31}$.

Câu 23: Cho hàm số $y=\cos x$. Khi đó $y^{(2016)}(x)$ bằng

A. $-\cos x$.

B. $\sin x$.

C. $-\sin x$.

D. $\cos x$.

Hướng dẫn giải

$y'=-\sin x=\cos(x+\dfrac{\pi}{2})$; $y''=-\cos x=\cos(x+\pi)$;

Dự đoán $y^{(n)}(x)=\cos(x+\dfrac{n\pi}{2})$.

Thật vậy:

Dễ thấy MĐ đúng khi $n=1$. Giả sử MĐ đúng khi $n=k(k\geq 1)$, tức là ta có $y^{(k)}(x)=\cos(x+\dfrac{k\pi}{2})$

Khi đó $y^{(k+1)}(x)=[y^{(k)}(x)]'=[\cos(x+\dfrac{k\pi}{2})]'=-\sin(x+\dfrac{k\pi}{2})=\sin(-x-\dfrac{k\pi}{2})=\cos(x+\dfrac{(k+1)\pi}{2})$.

Vậy MĐ đúng khi $n=k+1$ nên nó đúng với mọi n.

Do đó $y^{(2016)}(x)=\cos(x+1008\pi)=\cos x$

Chọn D.

Câu 24: Cho hàm số $y=\cos^2 2x$. Giá trị của biểu thức $y'''+y''+16y'+16y-8$ là kết quả nào sau đây?

A. 0. **B.** 8.

C. $\Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2}$. **D.** $\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

$y' = -2\cos 2x.2\sin 2x = -2\sin 4x$, $y'' = -8\cos 4x$, $y''' = 32\sin 4x$.

$y''' + y'' + 16y' + 16y - 8 = 32\sin 4x - 8\cos 4x - 32\sin 4x + 16\cos^2 2x - 8$
$= 16\cos^2 2x - 8\cos 4x - 8 = 0$.

Chọn A.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$. Phương trình $f^{(4)}(x) = -8$ có các nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{3}$. **B.** $x = \dfrac{\pi}{2}$. **C.** $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$. **D.** $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải

$f'(x) = -2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$, $f''(x) = -4\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$, $f'''(x) = 8\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$,

$f^{(4)}(x) = 16\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

$$f^{(4)}(x) = -8 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ nên lấy được $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Chọn B.

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{-5x^2 + 14x - 9}$. Tập hợp các giá trị của x để $f'(x < 0)$ là

A. $\left(\dfrac{7}{5}; \dfrac{9}{5}\right)$. **B.** $\left(-\infty; \dfrac{7}{5}\right)$. **C.** $\left(1; \dfrac{7}{5}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{7}{5}; +\infty\right)$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Tập các giá trị của x để $2x.f'(x) - f(x) \geq 0$ là:

A. $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. **D.** $\left[\dfrac{2}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow 2x.f'(x)-f(x)\geq 0\Leftrightarrow 2x.\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}-f(x)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x\geq\sqrt{x^2+1}\ \left(do\ \ f(x)>x+\sqrt{x^2}=x+|x|\geq 0\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\3x^2\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow x\geq\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vậy $x\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$

Câu 28: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-x}$. Tập nghiệm S của bất phương trình $f'(x)\leq f(x)$ là:

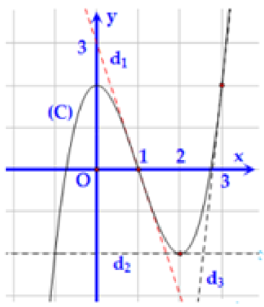
A. $S=(-\infty;0)\cup\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$. **B.** $S=(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$.

C. $S=\left(-\infty;\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$. **D.** $S=\left(-\infty;\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]\cup[1;+\infty)$

Câu 29: Cho các hàm số $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$, $g(x)=\sin^6 x+\cos^2 x$. Tính biểu thức $3f'(x)-2g'(x)+2$

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Tính $A=f'(1)-f'(2)-f'(3)$



A. $A=6$ **B.** $A=-6$ **C.** $A=0$ **D.** $A=-12$

Câu 31: Cho hàm số $f(x)=\frac{mx^3}{3}-mx^2+(3m-1)x+1$. Tập các giá trị của tham số m để $y'\leq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ là:

A. $\left(-\infty;\sqrt{2}\right]$. **B.** $(-\infty;2]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn C.

$y' = mx^2 - 2mx + 3m - 1$

$y' \le 0 \Leftrightarrow mx^2 - 2mx + 3m - 1 \le 0 \ (1)$

+ Với $m = 0$ thì (1) trở thành $-1 \le 0$ nên đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

+ Với $m \ne 0$ khi đó (1) đúng với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 1 - 2m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$

Vậy $m \le 0$

Câu 32: Cho hàm số $y = (m-1)x^3 - 3(m+2)x^2 - 6(m+2)x + 1$. Tập giá trị của m để $y' \ge 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ là

A. $[3; +\infty)$. **B.** $[1; +\infty)$. **C.** $\varnothing$. **D.** $[4\sqrt{2}; +\infty)$.

Chọn C.

$y' = 3\left[(m-1)x^2 - 2(m+2)x - 2(m+2)\right]$.

$y' \ge 0 \Leftrightarrow (m-1)x^2 - 2(m+2)x - 2(m+2) \ge 0 \ (1)$

Với $m = 1$ thì $(1) \Leftrightarrow -6x - 6 \ge 0 \Leftrightarrow x \le -1 \Rightarrow m = 1$ (loại).

Với $m \ne 1 \Rightarrow (1)$ đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ (m+2)3m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m$ vô nghiệm.

Câu 33: Cho hàm số $f(x) = \sin^2 x + \sin 2x$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$.

A. $m = -\sqrt{2}$, $M = \sqrt{2}$. **B.** $m = -1$, $M = 1$. **C.** $m = -2$, $M = 2$. **D.** $m = -\sqrt{5}$, $M = \sqrt{5}$.

Chọn D.

$f'(x) = 2\sin x.\cos x + 2\cos 2x = \sin 2x + 2\cos 2x$

Đặt $t = \sin 2x + 2\cos x$.

Điều kiện phương trình có nghiệm là: $1^2 + 2^2 \ge t^2 \Leftrightarrow -\sqrt{5} \le t \le \sqrt{5}$.

Vậy $M = \sqrt{5}, m = -\sqrt{5}$.

Câu 34: Cho hàm số $f(x) = 2\dfrac{\cos^3 x}{3} + \sin^3 x - 2\cos x - 3\sin x$. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $f'(x)$ trên đường tròn ta được mấy điểm phân biệt?

A. 1 điểm. **B.** 2 điểm. **C.** 4 điểm. **D.** 6 điểm.

Chọn B.

$f'(x)=2\sin^3 x-3\cos^3 x$

$f'(x)=0\Leftrightarrow \tan^3 x=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow \tan x=\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$.

Vậy có hai điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Câu 35: Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n=n.2^{n-1},n\in N$.

B. $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n=(n+1).2^n,n\in N$.

C. $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n=(n-1).2^{n-1},n\in N$.

D. $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n=(n+1).2^{n+1},n\in N$.

Chọn A

Hướng dẫn giải

Cách 1: Xét $f(x)=(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x^1+\ldots+C_n^nx^{n-1}+C_n^nx^n\ \forall x\in R$

$f'(x)=n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2xC_n^2+\ldots+(n-1)x^{n-2}.C_n^{n-1}+n.x^{n-1}.C_n^n$

$f'^{(1)}=C_n^1+2C_n^2+\ldots+(n-1).C_n^{n-1}+n.C_n^n=n.2^{n-1}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT

-Chọn với $n=1$: $C_1^1=2^0=1$ (đúng)

-Chọn với $n=2: C_2^1+2C_2^2=2.2=4$ (đúng)

….

Từ việc thử đáp án ta được kết quả

Câu 36: Tính tổng với $n\in N,n\geq 2$:

$S=1.2.C_n^2+2.3.C_n^3+...+(n-2).(n-1).C_n^{n-1}+(n-1).n.C_n^n$

A. $(n-1).(n-2).2^{n-2}$. **B.** $n.(n-1).2^{n-2}$. **C.** $n.(n-1).2^{n-1}$. **D.** $(n-1).(n-2).2^n$.

Chọn B

Hướng dẫn giải

Cách 1: Xét hàm số $f(x)=(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x^1+C_n^2x^2+...+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n$

Suy ra:

$f'(x)=n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2xC_n^2+\ldots+(n-1)x^{n-2}.C_n^{n-1}+n.x^{n-1}.C_n^n$

$f''(x)=(n-1).n.(1+x)^{n-2}$

$=1.2.C_n^2+2.3.x.C_n^3+...+(n-2).(n-1)x^{n-3}.C_n^{n-1}+(n-1).n.x^{n-2}.C_n^n$

$f''(1)=1.2.C_n^2+2.3.C_n^3+\ldots+(n-2).(n-1).C_n^{n-1}+(n-1).n.C_n^n=n(n-1)2^{n-2}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT ta thử với một vài giá trị $n\geq 2$.

-Với $n=2 \Rightarrow S=1.2.C_2^2=2.1.2^1=2$ (đúng)

-Với $n=3 \Rightarrow S=1.2.C_3^2+2.3.C_3^3=3.2.2=12$ (đúng)

…

So sánh, đối chiếu các đáp án ta được kết quả.

Câu 37: Tính tổng $S=C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+...+(n+1)C_n^n$ bằng

A. $n.2^{n-1}$. **B.** $(n+1).2^{n-1}$. **C.** $(n+2).2^{n-1}$. **D.** $(n+1).2^n$.

Chọn C

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có: $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x^1+C_n^2x^2+...+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n \quad \forall x\in R$

Nhân 2 vế với x ta được: $x(1+x)^n=x.C_n^0+x^2.C_n^1+x^3.C_n^2+...+x^n.C_n^{n-1}+x^{n+1}.C_n^n$

Lấy đạo hàm 2 vế ta được : $(1+x)^n+nx(1+x)^{n-1}=C_n^0+2x.C_n^1+3x^2.C_n^2+...+(n+1)x^n.C_n^n$

Thay $x=1$ ta được: $S=C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+...+(n+1)C_n^n=2^n+n.2^{n-1}=(n+2).2^{n-1}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT (bạn đọc tự thử lại)

Câu 38: Tính tổng: $S=100.C_{100}^0\left(\frac{1}{2}\right)^{99}-101.C_{100}^1\left(\frac{1}{2}\right)^{100}+...+199.C_{100}^0\left(\frac{1}{2}\right)^{198}+200.C_{100}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^{199}$

A. 10. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 100.

Chọn B.

Hướng dẫn giải

Xét $f(x)=\left(x^2+x\right)^{100}=x^{100}(1+x)^{100}$

$=x^{100}\left(C_{100}^0+C_{100}^1x+C_{100}^2x^2+C_{100}^{100}x^{100}\right)$

$=C_{100}^0.x^{100}+C_{100}^1.x^{101}+C_{100}^2x^{102}+...+C_{100}^{100}x^{200}$

$\Rightarrow f'(x)=100(2x+1).\left(x^2+x\right)^{99}$

$=100x^{99}.C_{100}^0+101x^{100}.C_{100}^1+102x^{101}.C_{100}^2+...+200x^{199}C_{100}^{100}$

Lấy $x=-\frac{1}{2}$ ta được: $0=-100\left(\frac{1}{2}\right)^{99}C_{100}^0+101\left(\frac{1}{2}\right)^{100}C_{100}^1-...-200\left(\frac{1}{2}\right)^{199}C_{100}^{100} \Leftrightarrow S=0$

PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

Câu 39: Biết tiếp tuyến (d) của hàm số $y = x^3 - 2x + 2$ vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ nhất. Phương trình (d) là:

A. $y = -x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18 - 5\sqrt{3}}{9}, y = -x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18 + 5\sqrt{3}}{9}$.

B. $y = x, y = x + 4$.

C. $y = -x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18 - 5\sqrt{3}}{9}, y = -x - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18 + 5\sqrt{3}}{9}$.

D. $y = x - 2, y = x + 4$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 2$.

Đường phân giác góc phần tư thứ nhất có phương trình $\Delta : x = y$.

$\Rightarrow (d)$ có hệ số góc là -1.

$y'(x_o) = -1 \Leftrightarrow 3x_o^2 - 2 = -1 \Leftrightarrow x_o = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$(d): y = -x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18 - 5\sqrt{3}}{9},\ y = -x - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18 + 5\sqrt{3}}{9}$.

Chọn C.

Câu 40: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ (C). Có bao nhiêu cặp điểm A, B thuộc (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau:

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có tâm đối xứng $I(1;1)$.

Lấy điểm tùy ý $A(x_0; y_0) \in (C)$.

Gọi B là điểm đối xứng với A qua I suy ra $B(2 - x_0; 2 - y_0) \in (C)$. Ta có:

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm A là: $k_A = y'(x_0) = \dfrac{-2}{(x_0-1)^2}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm B là: $k_B = y'(2-x_0) = \dfrac{-2}{(1-x_0)^2}$.

Ta thấy $k_A = k_B$ nên có vô số cặp điểm A, B thuộc (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau.

Chọn D.

Câu 41: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+x+1$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến với đồ thị (C), hãy tìm phương trình tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

A. $y=-8x-19$. **B.** $y=x-19$. **C.** $y=-8x+10$. **D.** $y=-x+19$.

Câu 42: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+2x$ có đồ thị (C). Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm M, N trên (C), mà tại đó tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y=-x+2017$. Khi đó x_1+x_2 bằng:

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{-4}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** -1.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=3x^2-4x+2$.

Tiếp tuyến tại M, N của (C) vuông góc với đường thẳng $y=-x+2017$. Hoành độ x_1, x_2 của các điểm M, N là nghiệm của phương trình $3x^2-4x+1=0$.

Suy ra $x_1+x_2=\frac{4}{3}$.

Chọn A.

Câu 43: Cho đồ thị hàm số $(C): y=x^4-4x^2+2017$ và đường thẳng $d: y=\frac{1}{4}x+1$. Có bao nhiêu tiếp tuyến của **(C)** vuông góc với đường thẳng d?

A. 2 tiếp tuyến. **B.** 1 tiếp tuyến.

C. Không có tiếp tuyến nào. **D.** 3 tiếp tuyến.

Câu 44: Trên đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{x-1}$ có điểm M sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2. Tọa độ M là:

A. $(2;1)$. **B.** $\left(4;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(-\frac{3}{4};-\frac{4}{7}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{4};-4\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=-\frac{1}{(x-1)^2}$. Lấy điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là: $y=-\frac{1}{(x_0-1)^2}.(x-x_0)+\frac{1}{x_0-1}\quad(\Delta)$.

Giao với trục hoành: $(\Delta)\cap Ox=A(2x_0-1;0)$.

Giao với trục tung: $(\Delta)\cap Oy=B\left(0;\frac{2x_0-1}{(x_0-1)^2}\right)$

$S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB\Leftrightarrow 4=\left(\frac{2x_0-1}{x_0-1}\right)^2\Leftrightarrow x_0=\frac{3}{4}$. Vậy $M\left(\frac{3}{4};-4\right)$.

Chọn D.

Câu 45: Tiếp tuyến của parabol $y=4-x^2$ tại điểm $(1;3)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông. Diện tích của tam giác vuông đó là:

A. $\frac{25}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{25}{4}$.

Hướng dẫn giải

+ $y'=-2x\Rightarrow y'(1)=-2$.

+PTTT tại điểm có tọa độ $(1;3)$ là: $y=-2(x-1)+3\Leftrightarrow y=-2x+5\quad(d)$.

+ Ta có (d) giao Ox tại $A\left(\frac{5}{2};0\right)$, giao Oy tại $B(0;5)$ khi đó (d) tạo với hai trục tọa độ tam giác vuông OAB vuông tại O.

Diện tích tam giác vuông OAB là: $S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.\frac{5}{2}.5=\frac{25}{4}$.

Chọn D.

Câu 46: Cho đồ thị hàm số $(C):y=\frac{1}{x}$; điểm M có hoành độ $x_M=2-\sqrt{3}$ thuộc **(C)**. Biết tiếp tuyến của **(C)** tại M lần lượt cắt Ox, Oy tại A,. B. Tính diện tích tam giác OAB.

A. $S_{\Delta OAB}=1$. **B.** $S_{\Delta OAB}=4$. **C.** $S_{\Delta OAB}=2$. **D.** $S_{\Delta OAB}=2+\sqrt{3}$.

Câu 47: Biết với một điểm M tùy ý thuộc $(C): y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$, tiếp tuyến tại M cắt (C) tại hai điểm A,B tạo với $I(-2;-1)$ một tam giác có diện tích không đổi, diện tích tam giác đó là?

A. 2 (đvdt). **B.** 4 (đvdt). **C.** 5 (đvdt). **D.** 7 (đvdt).

Hướng dẫn giải

Chọn A

$y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}=x+1+\dfrac{1}{x+2}$. Ta có: $y'=1-\dfrac{1}{(x+2)^2}$.

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow y_0=x_0+1+\dfrac{1}{x_0+2}(*)$

Tiếp tuyến với (C) tại M là $\Delta: y=\left[1-\dfrac{1}{(x_0+2)^2}\right](x-x_0)+x_0+1+\dfrac{1}{x_0+2}$

Nếu $\Delta\cap x=-2$ tại điểm A, thì $y_A=-\dfrac{x_0}{x_0+2}\Rightarrow A\left(-2;-\dfrac{x_0}{x_0+2}\right)$

Nếu Δ cắt tiệm cận xiên tại điểm B thì

$$\left[1-\dfrac{1}{(x_0+2)^2}\right](x_B-x_0)+x_0+1+\dfrac{1}{x_0+2}=x_B+1\Leftrightarrow x_B=2x_0+2\Rightarrow y_B=x_B+1=2x_0+3$$

$\Rightarrow B(2x_0+2;2x_0+3)$

Nếu I là giao hai tiệm cận, thì I có tọa độ $I(-2;-1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên tiệm cận đứng $x=-2$ suy ra $H(-2;2x_0+3)$

Diện tích tam giác AIB: $S=\dfrac{1}{2}AI.BH=\dfrac{1}{2}|y_A-y_I|.|x_B-x_H|=\dfrac{1}{2}\left|-\dfrac{x_0}{x_0+2}+1\right||2x_0+2+2|$

Hay $S=\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{|x_0+2|}.2|x_0+2|=2$ (đvdt)

Chứng tỏ S là một hằng số, không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

Câu 48: Cho hàm số $y=-x^3+3x+2$ có đồ thị là (C). Tìm những điểm trên trục hoành sao cho từ đó kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị hàm số và trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

A. $M\left(-\dfrac{8}{27};0\right)$. **B.** $M\left(-\dfrac{28}{7};0\right)$. **C.** $M\left(-\dfrac{8}{7};0\right)$. **D.** $M\left(-\dfrac{28}{27};0\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét điểm $M(m;0)\in Ox$.

Cách 1: Đường thẳng d đi qua M, hệ số góc k có phương trình: $y=k(x-m)$.

d là tiếp tuyến của $(C)\Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases}-x^3+3x+2=k(x-m)\\ -3x^2+3=k\end{cases}$ có nghiệm x

Thế k vào phương trình thứ nhất, ta được:

$3(x^2-1)(x-m)-(x^3-3x-2)=0$

$\Leftrightarrow(x+1)(3x^2-3(1+m)x+3m)-(x+1)(x^2-x-2)=0$

$\Leftrightarrow(x+1)[2x^2-(3m+2)x+3m+2]=0\ (1)$

$\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $2x^2-(3m+2)x+3m+2=0\ (2)$

Để từ M kẻ được ba tiếp tuyến thì (1) phải có nghiệm x, đồng thời phải có 3 giá trị k khác nhau, khi đó (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác -1, đồng thời phải có 2 giá trị k khác nhau và khác 0

(2) phải có hai nghiệm phân biệt khác -1 khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\Delta=(3m+2)(3m-6)>0\\ 3m+3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-\dfrac{2}{3},\ m>2\\ m\neq -1\end{cases}\ (3)$$

Với điều kiện (3), gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của (2), khi đó hệ số góc của ba tiếp tuyến là $k_1=-3x_1^2+3,\ k_2=-3x_2^2+3,\ k_3=0$.

Để hai trong ba tiếp tuyến này vuông góc với nhau $k_1.k_2=-1$ và $k_1\neq k_2$

$k_1.k_2=-1\Leftrightarrow 9(x_1^2-1)(x_2^2-1)=-1\Leftrightarrow 9x_1^2x_2^2-9(x_1+x_2)^2+18x_1x_2+10=0\ (i)$

Mặt khác theo Định lí Viet $x_1+x_2=\dfrac{3m+2}{2};\ x_1x_2=\dfrac{3m+2}{2}$.

Do đó $(i)\Leftrightarrow 9(3m+2)+10=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{28}{27}$ thỏa điều kiện (3), kiểm tra lại ta thấy $k_1\neq k_2$

Vậy, $M\left(-\dfrac{28}{27};0\right)$ là điểm cần tìm.

Cách 2: Gọi $N(x_0;y_0)\in(C)$. Tiếp tuyến Δ của (C) tại N có phương trình: $y=\left(-3x_0^2+3\right)(x-x_0)+y_0$.

Δ đi qua $M \Leftrightarrow 0=\left(-3x_0^2+3\right)(m-x_0)+y_0$

$\Leftrightarrow 3(x_0-1)(x_0+1)(x_0-m)-(x_0+1)^2(x_0-2)=0$

$\Leftrightarrow (x_0+1)\left[2x_0^2-(3m+2)x_0+3m+2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \\ 2x_0^2-(3m+2)x_0+3m+2=0 \quad \text{(a)} \end{array}\right.$

Từ M vẽ được đến (C) ba tiếp tuyến $\Leftrightarrow (a)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1, và có hai giá trị $k=-3x_0^2+3$ khác nhau và khác 0 điều đó xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta=(3m+2)^2-8(3m+2)>0 \\ 2+2(3m+2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m+2)(3m-6)>0 \\ 3m+3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -1 \\ m<-\frac{2}{3}, m>2 \end{cases} \quad (b).$$

Vì tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=-1$ có hệ số góc bằng 0 nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (-3p^2+3)(-3q^2+3)=-1$(trong đó p,q là hai nghiệm của phương trình (a))

$\Leftrightarrow 9p^2q^2-9(p^2+q^2)+10=0 \Leftrightarrow 9p^2q^2-9(p+q)^2+18pq+10=0$

$\Leftrightarrow \frac{9(3m+2)^2}{4}-\frac{9(3m+2)^2}{4}+9(3m+2)+10=0 \Leftrightarrow m=-\frac{28}{27}$. Vậy $M\left(-\frac{28}{27};0\right)$.

Câu 49: Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A,B thoả mãn $OA=4OB$.

A. $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4} \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} \\ y=-\frac{1}{4}x-\frac{13}{4} \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4} \\ y=-\frac{1}{4}x-\frac{13}{4} \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Giả sử tiếp tuyến (d) của (C) tại $M(x_0;y_0)\in(C)$ cắt Ox tại A, Oy tại B sao cho $OA=4OB$.

Do ΔOAB vuông tại O nên $\tan A=\frac{OB}{OA}=\frac{1}{4} \Rightarrow$ Hệ số góc của (d) bằng $\frac{1}{4}$ hoặc $-\frac{1}{4}$.

Hệ số góc của (d) là $y'(x_0)=-\frac{1}{(x_0-1)^2}<0 \Rightarrow -\frac{1}{(x_0-1)^2}=-\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1\ \left(y_0=\dfrac{3}{2}\right) \\ x_0=3\ \ \left(y_0=\dfrac{5}{2}\right) \end{array}\right.$$

Khi đó có 2 tiếp tuyến thoả mãn là: $\left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{4}(x+1)+\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{1}{4}(x-3)+\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4} \\ y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4} \end{array}\right.$.

Câu 50: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x$ có đồ thị là $A\left(\dfrac{4}{9};\dfrac{4}{3}\right)$. Có bao nhiêu giá trị

$\left[\begin{array}{l} \Delta: y=x \\ \Delta: y=\dfrac{4}{3}x \\ \Delta: y=-\dfrac{5}{9}x+\dfrac{8}{81} \end{array}\right.$ để tiếp tuyến của $\left[\begin{array}{l} \Delta: y=3x \\ \Delta: y=\dfrac{4}{3}x+1 \\ \Delta: y=-\dfrac{5}{9}x+\dfrac{128}{81} \end{array}\right.$ tại giao điểm của nó với trục

tung tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\left[\begin{array}{l} \Delta: y=3x \\ \Delta: y=\dfrac{4}{3} \\ \Delta: y=-\dfrac{5}{9}x+\dfrac{128}{81} \end{array}\right.$ là giao điểm của (C_m) với trục tung $y'=3x^2-m \Rightarrow y'(0)=-m$

Phương trình tiếp tuyến với (C_m) tại điểm m là $y=-mx+1-m$

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến này với trục hoanh và trục tung, ta có tọa

độ $A\left(\dfrac{1-m}{m};0\right)$ và $B(0;1-m)$

Nếu $m=0$ thì tiếp tuyến song song với Ox nên loại khả năng này

Nếu $m\neq 0$ ta có

$$S_{OAB}=8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}OA.OB=8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\frac{1-m}{m}\right||1-m|=8 \Leftrightarrow \frac{(1-m)^2}{|m|}=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=9\pm 4\sqrt{5} \\ m=-7\pm 4\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy có 4 giá trị cần tìm.

Câu 51: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$.Tìm giá trị nhỏ nhất của m sao cho tồn tại ít nhất một điểm $M \in (C)$ mà tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai trục toạ độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $d: y=2m-1$.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$. Phương trình tiếp tuyến tại M: $y=\dfrac{-3}{(2x_0-1)^2}(x-x_0)+y_0$

Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành và trục tung

$\Rightarrow y_B=\dfrac{2x_0^2+4x_0-1}{(2x_0-1)^2}$.

Từ đó trọng tâm G của ΔOAB có: $\mathrm{y}=3\mathrm{x}\text{-}\dfrac{1}{3}$.

Vì $G\in d$ nên $\dfrac{2x_0^2+4x_0-1}{3(2x_0-1)^2}=2m-1$

Mặt khác: $\dfrac{2x_0^2+4x_0-1}{(2x_0-1)^2}=\dfrac{6x_0^2-(2x_0-1)^2}{(2x_0-1)^2}=\dfrac{6x_0^2}{(2x_0-1)^2}-1\geq -1$

Do đó để tồn tại ít nhất một điểm M thỏa bài toán thì $2m-1\geq -\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow m\geq\dfrac{1}{3}$.

Vậy GTNN của m là $\dfrac{1}{3}$.

Câu 52: Cho hàm số $y=133x+508;\ y=8x+8;\ y=5x-4.$, có đồ thị là (C). Có bao nhiêu điểm (C) thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại (Δ) của (C) cắt (Δ) Oy tại $-24=\left(3x_0^2-4x_0+1\right)\left(-4-x_0\right)+x_0^3-2x_0^2+x_0+4$ B sao cho diện tích tam giác $x_0=-1$ bằng $\dfrac{1}{4}$, $x_0=-6$ là gốc tọa độ.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)\in(C)\Rightarrow y_0=\dfrac{2x_0}{x_0+1}\Rightarrow y'_0=\dfrac{2}{\left(x_0+1\right)^2}$

Phương trình tiếp tuyến $x_0=-1$ của (C) tại $x_0=2$ là: $y=5x-4$.

Tiếp tuyến $y=133x+508;\ y=8x+8;\ y=5x-4.$ cắt hai trục tọa độ $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt $A\left(-x_0^2;0\right)$,

$y=5$ sao cho diện tích tam giác AOB có diện tích bằng $y=4$ khi đó

$\dfrac{1}{2}.OA.OB=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow OA.OB=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x_0^2.\dfrac{2x_0^2}{\left(x_0+1\right)^2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 4x_0^2-\left(x_0+1\right)^2=0$

$\left[\begin{array}{l}2x_0^2+x_0+1=0\\2x_0^2-x_0-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{2};-2\right)\\x_0=1\Rightarrow M(1;1)\end{array}\right..$

Câu 53: $y=\dfrac{x^2+2mx+2m^2-1}{x-1}$ $\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến với $\left(C_m\right)$ tại hai điểm này vuông góc với nhau.

A. $m=\dfrac{2}{3}$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=\dfrac{2}{3},m=-1$. **D.** $m=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $\left(C_m\right)$ và trục hoành:

$\dfrac{x^2+2mx+2m^2-1}{x-1}=0\Leftrightarrow x^2+2mx+2m^2-1=0,\ (x\neq 1)\ (1)$

Để $\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A,B thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1. Tức là ta phải có: $\begin{cases}\Delta'=m^2-2m^2+1>0\\1+2m+2m^2-1\neq 0\end{cases}$ hay

$\begin{cases}(1-m)(1+m)>0\\2m(m+1)\neq 0\end{cases}$ tức $\begin{cases}-1<m<1\\m\neq 0\end{cases}$ (2).

Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của (1). Theo định lý Vi – ét, ta có: $x_1+x_2=-2m$, $x_1.x_2=2m^2-1$

Giả sử $I\left(x_0;0\right)$ là giao điểm của $\left(C_m\right)$ và trục hoành. Tiếp tuyến của $\left(C_m\right)$ tại điểm I có hệ số góc $y'\left(x_0\right)=\dfrac{\left(2x_0+2m\right)\left(x_0-1\right)-\left(x_0^2+2mx_0+2m^2-1\right)}{\left(x_0-1\right)^2}=\dfrac{2x_0+2m}{x_0-1}$

Như vậy, tiếp tuyến tại A,B lần lượt có hệ số góc là $y'\left(x_1\right)=\dfrac{2x_1+2m}{x_1-1}$, $y'\left(x_2\right)=\dfrac{2x_2+2m}{x_2-1}$.

Tiếp tuyến tại A,B vuông góc nhau khi và chỉ khi $y'\left(x_1\right)y'\left(x_2\right)=-1$ hay $\left(\dfrac{2x_1+2m}{x_1-1}\right)\left(\dfrac{2x_2+2m}{x_2-1}\right)=-1 \Leftrightarrow 5x_1.x_2+(4m-1)\left(x_1+x_2\right)+4m^2+1=0$ tức $3m^2+m-2=0$ $\Leftrightarrow m=-1$ hoặc $m=\dfrac{2}{3}$. Đối chiếu điều kiện chỉ có $m=\dfrac{2}{3}$ thỏa mãn.

Câu 54: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m}{x+m}$. Giá trị m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại hai điểm và tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm đó vuông góc là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{x^2-2mx+m}{x+m}$ và trục hoành:

$$\frac{x^2-2mx+m}{x+m}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2mx+m=0 \ (*) \\ x\neq -m \end{cases}.$$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m}{x+m}$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $-m \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-m>0 \\ 3m^2+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \vee m>1 \\ m\neq -\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là giao điểm của đồ thị (C) với trục hoành thì $y_0=x_0^2-2mx_0+m=0$ và hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại M là:

$$k=y'\left(x_0\right)=\frac{\left(2x_0-2m\right)\left(x_0-1\right)-\left(x_0^2-2mx_0+m\right)}{\left(x_0+m\right)^2}=\frac{2x_0-2m}{x_0+m}.$$

Vậy hệ số góc của hai tiếp tuyến với (C) tại hai giao điểm với trục hoành là $k_1 = \dfrac{2x_1 - 2m}{x_1 + m}$, $k_2 = \dfrac{2x_2 - 2m}{x_2 + m}$.

Hai tiếp tuyến này vuông góc $\Leftrightarrow k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2x_1 - 2m}{x_1 + m}\right)\left(\dfrac{2x_2 - 2m}{x_2 + m}\right) = -1$

$\Leftrightarrow 4\left[x_1x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2\right] = -\left[x_1x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2\right]$ $(**)$.

Ta lại có $\begin{cases} x_1x_2 = m \\ x_1 + x_2 = 2m \end{cases}$, do đó $(**) \Leftrightarrow m^2 - 5m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 5 \end{array}\right.$. Nhận $m = 5$.

Câu 55: Phương trình tiếp tuyến của (C): $y = x^3$ biết nó đi qua điểm $M(2;\ 0)$ là:

A. $y = 27x \pm 54$. **B.** $y = 27x - 9;\ y = 27x - 2$.

C. $y = 27x \pm 27$. **D.** $y = 0; y = 27x - 54$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$+\ y' = 3x^2$.

\+ Gọi $A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. PTTT của (C) tại $A(x_0; y_0)$ là:

$y = 3x_0^2(x - x_0) + x_0^3 \quad (d)$.

\+ Vì tiếp tuyến (d) đí qua $M(2;0)$ nên ta có phương trình:

$3x_0^2(2 - x_0) + x_0^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 3 \end{array}\right.$.

\+ Với $x_0 = 0$ thay vào (d) ta có tiếp tuyến $y = 0$.

\+ Với $x_0 = 3$ thay vào (d) ta có tiếp tuyến $y = 27x - 54$.

Câu 56: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - x + 1$, có đồ thị (C). Từ điểm $M(2; -1)$ kẻ đến (C) hai tiếp tuyến phân biệt. Hai tiếp tuyến này có phương trình:

A. $y = -x + 1$ và $y = x - 3$. **B.** $y = 2x - 5$ và $y = -2x + 3$.

C. $y = -x - 1$ và $y = -x + 3$. **D.** $y = x + 1$ và $y = -x - 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi $N(x_0; y_0)$ là tiếp điểm; $y_0 = \dfrac{x_0^{\ 2}}{4} - x_0 + 1$; $f'(x_0) = \dfrac{x_0}{2} - 1$

Phương trình tiếp tuyến tại N là: $y=\left(\frac{x_0}{2}-1\right)\left(x-x_0\right)+\frac{{x_0}^2}{4}-x_0+1$

Mà tiếp tuyến đi qua $M\left(2;-1\right)$ $\Rightarrow -1=\left(\frac{x_0}{2}-1\right)\left(2-x_0\right)+\frac{{x_0}^2}{4}-x_0+1 \Leftrightarrow -\frac{{x_0}^2}{4}+x_0=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0;\, y_0=1;\, f'\left(0\right)=-1 \\ x_0=4;\, y_0=1;\, f'\left(4\right)=1 \end{array}\right.$

Phương trình tiếp tuyến : $y=-x+1$ và $y=x-3$.

Câu 57: Tiếp tuyến của parabol $y=4-x^2$ tại điểm $(1;3)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông. Diện tích của tam giác vuông đó là:

A. $\frac{25}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{25}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

+ $y'=-2x \Rightarrow y'(1)=-2$.

+PTTT tại điểm có tọa độ $(1;3)$ là: $y=-2(x-1)+3 \Leftrightarrow y=-2x+5 \quad (d)$.

+ Ta có (d) giao Ox tại $A\left(\frac{5}{2};0\right)$, giao Oy tại $B(0;5)$ khi đó (d) tạo với hai trục tọa độ tam giác vuông OAB vuông tại O.

Diện tích tam giác vuông OAB là: $S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.\frac{5}{2}.5=\frac{25}{4}$.

Câu 58: Cho hai hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{x\sqrt{2}}$ và $g\left(x\right)=\frac{x^2}{\sqrt{2}}$.

Gọi d_1,d_2 lần lượt là tiếp tuyến của mỗi đồ thị hàm số $f\left(x\right),g\left(x\right)$ đã cho tại giao điểm của chúng. Hỏi góc giữa hai tiếp tuyến trên bằng bao nhiêu

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Câu 59: Cho hàm số $y=\frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị là $\left(C\right)$. Viết phương trình tiếp tuyến của $\left(C\right)$, biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

A. $\Delta: y=-x+7; \Delta: y=-x-1$. **B.** $\Delta: y=-2x+7; \Delta: y=-x-11$.

C. $\Delta: y=-x+78; \Delta: y=-x-11$. **D.** $\Delta: y=-x+9; \Delta: y=-x-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Hàm số xác định với mọi $x \neq 1$.

Ta có: $y' = \dfrac{-4}{(x-1)^2}$

Tiệm cận đứng: $x = 1$; tiệm cận ngang: $y = 2$; tâm đối xứng $I(1;2)$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

$$\Delta : y = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0+2}{x_0-1}.$$

Vì tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng ± 1.

$$\frac{-4}{(x_0-1)^2} = \pm 1 \Leftrightarrow x_0 = -1, x_0 = 3$$

* $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow \Delta : y = -x - 1$.

* $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow \Delta : y = -x + 7$.

Câu 60: Cho hàm số $y = -x - 1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng x_0.

A. $(\Delta); y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) = (3x_0^2 - 6x_0 - 9)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 - 9x_0 + 11$.

B. $(\Delta); I\left(\dfrac{29}{3}; 184\right)$.

C. $184 = (3x_0^2 - 6x_0 - 9)\left(\dfrac{29}{3} - x_0\right) + x_0^3 - 3x_0^2 - 9x_0 + 11$;

$\Leftrightarrow 2x_0^3 - 32x_0^2 + 58x_0 + 260 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 13$.

D. $x_0 = 5$; $x_0 = -2$..

Hướng dẫn giải

Chọn D

Hàm số xác định với mọi $x \neq -2$.

Ta có: $y = 420x - 3876$

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$. Tiếp tuyến $y = 36x - 164$ của (C) tại M có phương trình

$$y = \frac{4}{(x_0+2)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0}{x_0+2} = \frac{4}{(x_0+2)^2}x + \frac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}$$

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến $y = 15x + 39$ với Ox, Oy

Suy ra $A:\begin{cases} y=0 \\ \dfrac{4}{(x_0+2)^2}x+\dfrac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}x_0^2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow A(-\dfrac{1}{2}x_0^2;0)$

$B:\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{2x_0^2}{(x_0+2)^2} \end{cases} \Rightarrow B\left(0;\dfrac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}\right)$

Vì $A,B\neq O \Rightarrow x_0\neq 0$.

Tam giác AOB vuông tại O nên $S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}\dfrac{x_0^4}{(x_0+2)^2}$

Suy ra $S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{18} \Leftrightarrow \dfrac{x_0^4}{(x_0+2)^2}=9 \Leftrightarrow 9x_0^4=(x_0+2)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x_0^2+x_0+2=0 \text{ (vn)} \\ 3x_0^2-x_0-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

* $x_0=1 \Rightarrow y_0=\dfrac{2}{3}$, $y'(x_0)=\dfrac{4}{9}$. Phương trình $\Delta: y=\dfrac{4}{9}x+\dfrac{2}{9}$

* $x_0=-\dfrac{2}{3} \Rightarrow y_0=-1$, $y'(x_0)=\dfrac{9}{4}$ Phương trình $\Delta: y=\dfrac{9}{4}(x+\dfrac{2}{3})-1=\dfrac{9}{4}x+\dfrac{1}{2}$.

Câu 61: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ (C). Có bao nhiêu cặp điểm A, B thuộc (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau:

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có tâm đối xứng $I(1;1)$.

Lấy điểm tùy ý $A(x_0;y_0)\in(C)$.

Gọi B là điểm đối xứng với A qua I suy ra $B(2-x_0;2-y_0)\in(C)$. Ta có:

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm A là: $k_A=y'(x_0)=\dfrac{-2}{(x_0-1)^2}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm B là: $k_B = y'(2-x_0) = \frac{-2}{(1-x_0)^2}$.

Ta thấy $k_A = k_B$ nên có vô số cặp điểm A, B thuộc (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau.

Câu 62: Trên đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ có điểm M sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2. Tọa độ M là:

A. $(2;1)$. **B.** $\left(4;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(-\frac{3}{4};-\frac{4}{7}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{4};-4\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$. Lấy điểm $M(x_0;y_0) \in (C)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là: $y = -\frac{1}{(x_0-1)^2}.(x-x_0) + \frac{1}{x_0-1}$ (Δ).

Giao với trục hoành: $(\Delta) \cap Ox = A(2x_0-1;0)$.

Giao với trục tung: $(\Delta) \cap Oy = B\left(0;\frac{2x_0-1}{(x_0-1)^2}\right)$

$S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB \Leftrightarrow 4 = \left(\frac{2x_0-1}{x_0-1}\right)^2 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{4}$. Vậy $M\left(\frac{3}{4};-4\right)$.

Câu 63: Định m để đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + 1$ tiếp xúc với đường thẳng $d: y = 5$?

A. $m = -3$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đường thẳng $y = x^3 - mx^2 + 1$ và đồ thị hàm số $y = 5$ tiếp xúc nhau

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - mx^2 + 1 = 5 \quad (1) \\ 3x^2 - 2mx = 0 \quad (2) \end{cases}$ có nghiệm.

$.(2) \Leftrightarrow x(3x-2m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{2m}{3} \end{array}\right.$.

+ Với $x = 0$ thay vào (1) không thỏa mãn.

+ Với $x=\dfrac{2m}{3}$ thay vào (1) ta có: $m^3=-27 \Leftrightarrow m=-3$.

Câu 64: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của m sao cho đường thẳng $d: y=mx-m-3$ cắt đồ thị $(C): y=2x^3-3x^2-2$ tại ba điểm phân biệt $A, B, I(1;-3)$ mà tiếp tuyến với (C) tại A và tại B vuông góc với nhau. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 65: Cho hàm số $y=x^3-2018x$ có đồ thị là (C). M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1=1$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1, tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2, tiếp tuyến của (C) tại điểm M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} $(n=4;\ 5;...)$, gọi $(x_n;y_n)$ là tọa độ điểm M_n. Tìm n để: $2018x_n+y_n+2^{2019}=0$.

A. $n=647$. **B.** $n=675$. **C.** $n=674$. **D.** $n=627$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $M_k(x_k;y_k)\in(C)$ với $k=1;\ 2;...$. Tiếp tuyến tại M_k: $y=y'(x_k)(x-x_k)+y_k$

$\Leftrightarrow y=(3x_k^2-2018)(x-x_k)+x_k^3-2018x_k$

Hoành độ của M_{k+1} nghiệm đúng phương trình:

$x^3-2018x=(3x_k^2-2018)(x-x_k)+x_k^3-2018x_k \Leftrightarrow (x-x_k)(x^2+x.x_k-2x_k^2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_k \\ x=-2x_k \end{array}\right.$

$\Rightarrow x_{k+1}=-2x_k, \forall k$ (do $x_k\neq x_{k+1}$).

Do đó: $x_1=1$; $x_2=-2$; $x_3=4$; ....; $x_n=(-2)^{n-1}$.

Theo đề bài: $2018x_n+y_n+2^{2019}=0 \Leftrightarrow 2018x_n+x_n^3-2018x_n+2^{2019}=0$

$\Leftrightarrow (-2)^{3n-3}=(-2)^{2019} \Leftrightarrow n=674$.

Câu 66: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left[f(1+2x)\right]^2=x-\left[f(1-x)\right]^3$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

A. $y=-\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$. **B.** $y=\frac{1}{7}x-\frac{8}{7}$. **C.** $y=-\frac{1}{7}x+\frac{8}{7}$. **D.** $y=-x+\frac{6}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

*** Phân tích:**

+ Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại điểm có hoàng độ x_0 là: $y=f'\left(x_0\right).\left(x-x_0\right)+f\left(x_0\right)$. Do đó, muốn viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ x_0 ta phải tính được $f'(x_0)$ và $f(x_0)$.

+ Trong giả thiết, chỉ cho duy nhất một điều kiện về hàm $f(x)$, vì vậy chắc chắn phải căn cứ vào giả thiết này để tính $f'(x_0)$ và $f(x_0)$.

Hướng dẫn giải

+ Xét $\left[f(1+2x)\right]^2=x-\left[f(1-x)\right]^3 \quad \forall x\in\mathbb{R} \qquad (1)$

Trong (1) cho $x=0$ ta được $\left[f(1)\right]^3+\left[f(1)\right]^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(1)=0\\ f(1)=-1.\end{array}\right.$

+ Đạo hàm 2 vế của (1) ta được:

$2.(1+2x)'.f'(1+2x).f(1+2x)=1-3.(1-x)'.f'(1-x).\left[f(1-x)\right]^2$

$\Rightarrow 4.f'(1+2x).f(1+2x)=1+3.f'(1-x).\left[f(1-x)\right]^2 \quad (2)$

Trong (2) cho $x=0$ sẽ được: $4.f'(1).f(1)=1+3.f'(1).\left[f(1)\right]^2 \quad (3)$.

Nếu $f(1)=0$ thay vào (2) vô lý $\Rightarrow f(1)=-1$.

Thay $f(1)=-1$ vào (2) sẽ được $f'(1)=-\frac{1}{7}$.

+ Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-\frac{1}{7}\left(x-1\right)-1$ hay $y=-\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$.

Chọn. **A.**

Câu 67: Tìm tất cả các giá trị thực của thàm số m sao cho hàm số $y=x^3-3x+1\left(C\right)$, đường thẳng $d:y=mx+m+3$ giao nhau tại $A\left(-1;3\right),B,C$ và tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại B và C vuông góc nhau.

A. $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-3+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\dfrac{-3-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-2+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-4+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\dfrac{-4-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-5+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\dfrac{-5-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=3x^2-3$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$x^3-(m+3)x-m-2=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-x-m-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y=3 \\ x^2-x-m-2=0\,(*) \end{array}\right.$

Để hàm số (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt thì (*) có 2 nghiệm phân biệt khác -1, nên:

$\begin{cases} \Delta>0 \\ f(-1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{9}{4} \\ m\neq 0 \end{cases}$

Giả sử $x_B; x_C$ là nghiệm của (*), hệ số góc của tiếp tuyến:

$k_B=3x_B^2-3; k_C=3x_C^2-3$

Theo giả thiết:

$k_B.k_C=-1 \Leftrightarrow \left(3x_B^2-3\right)\left(3x_C^2-3\right)=-1 \Leftrightarrow 9m^2+18m+1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-3+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\dfrac{-3-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

Vậy với $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-3+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\dfrac{-3-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$ thỏa ycbt.

Chọn A.

Câu 68: Cho hàm số: $y=\dfrac{x^4}{2}-3x^2+\dfrac{5}{2}(C)$ và điểm M $\in (C)$ có hoành độ x_M = a. Với giá trị nào của a thì tiếp tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) 2 điểm phân biệt khác M.

A. $\begin{cases}|a|<\sqrt{3}\\ a\neq\pm1\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}|a|<\sqrt{3}\\ a\neq1\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}a<\sqrt{3}\\ a\neq\pm1\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}|a|<\sqrt{7}\\ a\neq\pm2\end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điểm M $\in(C)$, x_M = a => $y_M=\dfrac{a^4}{2}-3a^2+\dfrac{5}{2}$ ta có Pt tiếp tuyến với (C) có dạng

(Δ): $y=y'_{x_M}(x-x_M)+y_M$ với $y'_M=2a^3-6a$

=> (Δ) $y=(2a^3-6a)(x-a)+\dfrac{a^4}{2}-3a^2+\dfrac{5}{2}$

Hoành độ giao điểm của (Δ) và (C) là nghiệm của phương trình

$$\frac{x^4}{2}-3x^2+\frac{5}{2}=(2a^3-6a)(x-a)+\frac{a^4}{2}-3a^2+\frac{5}{2}\Leftrightarrow(x-a)^2(x^2+2ax+3a^3-6)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\\ g(x)=x^2+2ax+3a^2-6=0\end{array}\right.$$

Bài toán trở thành tìm a để g(x)=0 có 2 nghiệm phân biệt khác a

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'_{g(x)}=a^2-(3a^2-6)>0\\ g(a)=6a^2-6\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-3<0\\ a^2\neq1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a|<\sqrt{3}\\ a\neq\pm1\end{cases}$$

Chọn A.

Câu 69: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+(4-3m)x+1$ có đồ thị là (C_m), m là tham số. Tìm các giá trị của m để trên (C_m) có duy nhất một điểm có hoành độ âm mà tiếp tuyến của (C_m) tại điểm đó vuông góc với đường thẳng $d: x+2y=0$.

A. $\left[\begin{array}{l}m<0\\ m>\frac{2}{3}\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m<0\\ m>1\end{array}\right.$ **C.** $0<m<\frac{1}{3}$ **D.** $\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>\frac{5}{3}\end{array}\right.$

Hướng dẫn giải:

$y'=mx^2+2(m-1)x+4-3m$. Tiếp tuyến có hệ số góc bằng 2

Ta tìm $m: mx^2+2(m-1)x+4-3m=2$ $(*)$ có đúng một nghiệm âm

$(*)\Leftrightarrow(x-1)(mx+3m-2)=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $mx=2-3m$

$m=0$: không thỏa yêu cầu

$m\neq0$, yêu cầu bài toán xảy ra khi $\dfrac{2-3m}{m}<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<0\\ m>\frac{2}{3}\end{array}\right.$ **Chọn C.**

Câu 70: Cho hàm số $y=x^3-12x+12$ có đồ thị (C) và điểm $A(m;-4)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m nguyên thuộc khoảng $(2;5)$ để từ A kẻ được ba tiếp tuyến với đồ thị (C). Tổng tất cả các phần tử nguyên của S bằng

A. 7. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đường thẳng đi qua $A(m;-4)$ với hệ số góc k có phương trình $y=k(x-m)-4$ tiếp xúc với đồ thị (C) khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} x^3-12x+12=k(x-m)-4 & (1) \\ 3x^2-12=k & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Thế (2) vào (1) ta được: $x^3-12x+12=(3x^2-12)(x-m)-4$.

$\Leftrightarrow x^3-12x+12=3x^3-3mx^2-12x+12m-4$.

$\Leftrightarrow 2x^3-3mx^2+12m-16=0$.

$\Leftrightarrow (x-2)\left[2x^2-(3m-4)x-(6m-8)\right]=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ 2x^2-(3m-4)x-(6m-8)=0 \ (*) \end{array}\right.$.

Để từ A kẻ được ba tiếp tuyến tới đồ thị (C) thì $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 2.

$\Rightarrow \begin{cases} \Delta=(3m-4)(3m+12)>0 \\ 8-6m+8-6m+8\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-4 \\ m>\dfrac{4}{3} \end{array}\right. \\ m\neq 2 \end{cases}$ hay $m\in(-\infty;-4)\cup\left(\dfrac{4}{3};2\right)\cup(2;+\infty)$.

Do đó $S=\{3;4\}$.

Tổng tất cả các giá trị nguyên của S là $3+4=7$.

Câu 71: Cho hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm thuộc đồ thị (C) có tung độ là nghiệm phương trình $2f'(x)-x.f''(x)-6=0$.

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2

Câu 72: Cho các hàm số $y = f(x), y = f(x^2), y = \frac{f(x)}{f(x^2)}$ có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2),(C_3)$. Hệ số góc các tiếp tuyến của $(C_1),(C_2),(C_3)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ lần lượt là k_1, k_2, k_3 thỏa mãn $k_1 + 2k_2 = 3k_3 \neq 0$. Tính $f(1)$.

A. $f(1) = -\frac{1}{5}$. **B.** $f(1) = -\frac{2}{5}$. **C.** $V = -\frac{3}{5}$ **D.** $f(1) = -\frac{4}{5}$.

Hướng dẫn giải

$k_1 = f'(x_0) = f'(1)$

$k_2 = 2x_0 f'(x_0^2) = 2f'(1)$

$$k_3 = \left(\frac{f(x_0)}{f(x_0^2)}\right)' = \frac{f'(x_0).f(x_0^2) - f(x_0).2x_0.f'(x_0^2)}{\left(f(x_0^2)\right)^2} = \frac{-f(1).f'(1)}{\left(f(1)\right)^2} = \frac{-f'(1)}{f(1)}$$

Vì vậy: $k_1 + 2k_2 = 3k_3 \Leftrightarrow f'(1) + 4f'(1) = -\frac{3f'(1)}{f(1)} \Leftrightarrow f(1) = -\frac{3}{5}$.

Chọn C.

Câu 73: Cho các hàm số $y = f(x), y = g(x), y = \frac{f(x)}{g(x)}$. Nếu các hệ số góc của các tiếp tuyến của các đồ thị các hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x = 0$ bằng nhau và khác 0 thì:

A. $f(0) < \frac{1}{4}$. **B.** $f(0) \le \frac{1}{4}$. **C.** $f(0) > \frac{1}{4}$. **D.** $f(0) \ge \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Theo giả thiết ta có:

$$f'(0) = g'(0) = \frac{f'(0)g(0) - g'(0)f(0)}{g^2(0)} \Rightarrow f(0) = -g^2(0) + g(0) = -\left[g(0) - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{1}{4} \le \frac{1}{4}$$

Chọn B.

Câu 74: Cho hàm số $y = f(x); y = g(x)$ dương có đạo hàm $f'(x); g'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_o = 0$ của đồ thị hàm số $y = f(x); y = g(x)$ và $y = \frac{f(x)+1}{g(x)+1}$ có cùng hệ số góc và khác 0. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(0) \le -\frac{3}{4}$. **B.** $f(0) \ge -\frac{3}{4}$. **C.** $f(0) \le \frac{3}{4}$. **D.** $f(0) \ge \frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Theo giả thiết ta có:

$k = f'(0) = g'(0) = \frac{f'(0).[g(0)+1] - g'(0)[f(0)+1]}{[g(0)+1]^2} \neq 0$

Do đó

$k = \frac{k.[g(0)+1] - k[f(0)+1]}{[g(0)+1]^2} \Leftrightarrow [g(0)+1]^2 = g(0) - f(0)$

$\Leftrightarrow f(0) = -[g(0)]^2 - g(0) - 1 = -(g(0)+\frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4} \leq -\frac{3}{4}.$

Câu 75: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ có đồ thị (C). Hai điểm A, B phân biệt trên (C) có hoành độ lần lượt là a và b$(a > b)$ và tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau. $AB = 2$. Tính $S = 2a + 3b$.

A. $S = 4$. **B.** $S = 6$. **C.** $S = 7$. **D.** $S = 8$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Điểm uốn của (C) là điểm $I(1;-1)$.

Vậy $A(a; a^3 - 3a^2 + 2a - 1), B(2-a; (2-a)^3 - 3(2-a)^2 + 2(2-a) - 1)$.

Do $AB = \sqrt{4(a-1)^2 + 4(a^3 - 3a^2 + 2a)^2} = 2|a-1|\sqrt{1 + a^2(a-2)^2} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 2 \end{array}\right.$

Do đó $a = 2, b = 0 \Rightarrow S = 4$.

Chọn A.

Câu 76: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C). Xét điểm A thuộc (C). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại điểm thứ hai B $(B \neq A)$ thỏa mãn $ab = -\frac{1}{2}$ trong đó a, b lần lượt là hoành độ của A và **B.** Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. $S = 4$. **B.** $S = 6$. **C.** $S = 7$. **D.** $S = 8$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Điểm uốn của (C) là điểm $I(1;-1)$.

Vậy $A(a; a^3 - 3a^2 + 2a - 1), B(2-a; (2-a)^3 - 3(2-a)^2 + 2(2-a) - 1)$.

Do $AB = \sqrt{4(a-1)^2 + 4(a^3 - 3a^2 + 2a)^2} = 2|a-1|\sqrt{1 + a^2(a-2)^2} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 2 \end{array}\right.$

Do đó $a = 2, b = 0 \Rightarrow S = 4$. **Chọn A.**

Câu 77: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để trên đồ thị hàm số $y=-\frac{2}{3}x^3+(m-1)x^2+(3m-2)x-\frac{5}{3}$ tồn tại hai điểm $M_1(x_1;y_1),M_2(x_2;y_2)$ có toạ độ thoả mãn $x_1.x_2>0$ sao cho tiếp tuyến với đồ thị hàm số đồ thị hàm số tại hai điểm đó cùng vuông góc với đường thẳng $x-2y+1=0$. Tìm số nguyên âm lớn nhất thuộc tập S.

A. -1. **B.** -3. **C.** -2. **D.** -4.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Do cả hai tiếp tuyến cùng vuông góc với đường thẳng $x-2y+1=0$ nên x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $y'=k=-2\Leftrightarrow -2x^2+2(m-1)x+3m=0(1)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1x_2>0$, tức là

$$\begin{cases}\Delta'=(m-1)^2+2.3m>0\\ P=\dfrac{3m}{-2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ m^2+4m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-2-\sqrt{3}\\ -2+\sqrt{3}<m<0\end{array}\right..$$

Vậy $m\in\left(-\infty;-2-\sqrt{3}\right)\cup\left(-2+\sqrt{3};0\right)$.

Chọn D.

Câu 78: Gọi A là điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{5}{2}$ (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt B, C khác A sao cho $AC=3AB$ (với B nằm giữa A và C). Tính độ dài đoạn thẳng O**A.**

A. $OA=\sqrt{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{14}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm A có $x_A=a$ có dạng $y=(2a^3-6a)(x-a)+\frac{a^4}{2}-3a^2+\frac{5}{2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của tiếp tuyến và (C):

$$\frac{x^4}{2}-3x^2+\frac{5}{2}=(2a^3-6a)(x-a)+\frac{a^4}{2}-3a^2+\frac{5}{2}\Leftrightarrow x^2+2ax+3a^2-6=0.$$

Để tiếp tuyến có 3 giao điểm với (C) thì (1) có 2 nghiệm phân biệt khác a

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} < a < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$

Khi đó x_B, x_C là nghiệm của phương trình (1) $\begin{cases} x_B + x_C = -2a \\ x_B.x_C = 3a^2 - 6 \end{cases}$ (2)

Mặt khác: $AC = 3AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow x_C - 3x_B = -2a$ (3)

Ta tìm được: $a = \pm\sqrt{2} \Rightarrow A\left(\pm\sqrt{2}; \frac{-3}{2}\right) \Rightarrow OA = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

Chọn D.

Câu 79: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C). Xét điểm A_1 có hoành độ $x_1 = \frac{5}{2}$ thuộc (C). Tiếp tuyến của (C) tại A_1 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_2 \neq A_1$ có hoành độ x_2. Tiếp tuyến của (C) tại A_2 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_3 \neq A_2$ có hoành độ x_3. Cứ tiếp tục như thế tiếp tuyến của (C) tại A_{n-1} cắt (C) tại điểm thứ hai $A_n \neq A_{n-1}$ có hoành độ x_n. Tìm x_{2018}.

A. $x_{2018} = -2^{2018} + \frac{1}{2}$. **B.** $x_{2018} = -2^{2018} - \frac{1}{2}$.

C. $x_{2018} = -3.2^{2017} - \frac{1}{2}$. **D.** $x_{2018} = 3.2^{2017} - \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Tiếp tuyến (C) tại điểm $A_1\left(\frac{5}{2}; \frac{27}{2}\right)$ là $y = \frac{45}{2}x - \frac{174}{4}$.

Vậy giao điểm thứ hai của tiếp tuyến và (C) là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm $2x^3 - 3x^2 - \frac{45}{2}x + \frac{175}{4} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5}{2} \\ x = -\frac{7}{2} \end{array}\right.$.

Tiếp tuyến (C) tại điểm $A_1\left(\frac{-7}{2}; \frac{-243}{2}\right)$ là $y = \frac{189}{2}x - \frac{837}{4}$.

Vậy giao điểm thứ hai của tiếp tuyến và (C) là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm $2x^3 - 3x^2 - \frac{189}{2}x - \frac{833}{4} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-7}{2} \\ x = \frac{17}{2} \end{array}\right.$.

Và làm tiếp tục sau đó nhận xét:

$$x_1=\frac{5}{2}=(-1)^{1+1}(2)^1+\frac{1}{2}$$
$$x_2=\frac{-7}{2}=(-1)^{2+1}2^2+\frac{1}{2}$$
$$x_3=\frac{17}{2}=(-1)^{3+1}2^3+\frac{1}{2}$$
....
$$x_n=(-1)^{n+1}2^n+\frac{1}{2}$$

Do đó $x_{2018}=(-1)^{2018+1}.2^{2018}+\frac{1}{2}=-2^{2018}+\frac{1}{2}$.

Chọn A.

Câu 80: Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ có đồ thị (C). Xét điểm A_1 có hoành độ $x_1=1$ thuộc (C). Tiếp tuyến của (C) tại A_1 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_2\neq A_1$ có hoành độ x_2. Tiếp tuyến của (C) tại A_2 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_3\neq A_2$ có hoành độ x_3. Cứ tiếp tục như thế, tiếp tuyến của (C) tại A_{n-1} cắt (C) tại điểm thứ hai $A_n\neq A_{n-1}$ có hoành độ x_n. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $x_n>5^{100}$.

A. 235 **B.** 234 **C.** 118 **D.** 117

Hướng dẫn giải

Ta có: $x_k=a\Rightarrow$ Tiếp tuyến tại A_k có phương trình hoành độ giao điểm:

$$2x^3-3x^2+1=2a^3-3a^2+1+\left(6a^2-6a\right)(x-a)\Leftrightarrow(x-a)^2(2x+4a-3)=0\Leftrightarrow x_{k+1}=-2x_k+\frac{3}{2}$$

Vậy $\begin{cases}x_1=1\\ x_{n+1}=-2x_n+\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow x_n=\alpha.(-2)^n+\beta$. Xét $\begin{cases}x_1=-2\alpha+\beta=1\\ x_2=4\alpha+\beta=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-\frac{1}{4}\\ \beta=\frac{1}{2}\end{cases}$

Do đó $x_n=-\frac{1}{4}.(-2)^n+\frac{1}{2}>5^{100}$. Chọn $n=2k+1\Rightarrow-\frac{1}{4}.4^k.(-2)+\frac{1}{2}>5^{100}\Leftrightarrow 4^k+1>2.5^{100}$

$\Leftrightarrow 4^k>2.5^{100}-1\Leftrightarrow k>\log_4\left(2.5^{100}-1\right)\Rightarrow$ Chọn $k=117\Rightarrow\boxed{n=235}$.

Câu 81: Biết rằng tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=(x+a)^3+(x+b)^3+(x+c)^3$ có hệ số góc nhỏ nhất tại tiếp điểm có hoành độ $x=-1$ đồng thời a,b,c là các số thực không âm. Tìm GTLN tung độ của giao điểm đồ thị hàm số với trục tung?

A. 27 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 18

Hướng dẫn giải

Tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất tại điểm uốn.

Mặt khác $y'=3\left((x+a)^2+(x+b)^2+(x+c)^2\right)\Rightarrow y''=6(3x+a+b+c)$

Do đó $y''=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{a+b+c}{3}=-1\Leftrightarrow a+b+c=3$.

Giao điểm với trục tung có tung độ $y=a^3+b^3+c^3$

Vì $a\left(a^2-9\right)+b\left(b^2-9\right)+c\left(c^2-9\right)\le 0\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3\le 9(a+b+c)$

Vậy tung độ giao điểm của đồ thị hàm số và Oy là $a=3;b=c=0$ và các hoán vị.

Chọn A.