§6. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI 2
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT. 2
1. Tam thức bậc hai 2
2. Dấu của tam thức bậc hai 2
B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI. 2
DẠNG TOÁN 1: XÉT DẤU CỦA BIỂU THỨC CHỨA TAM THỨC BẬC HAI. 2
1. Phương pháp giải. 2
2. Các ví dụ minh họa. 3
3. Bài tập luyện tập. 7
DẠNG TOÁN 2: BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ LIÊN QUAN ĐẾN TAM THỨC BẬC HAI LUÔN MANG MỘT DẤU. 12
1. Các ví dụ minh họa. 12
3. Bài tập luyện tập. 15
§7. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI 17
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT. 17
1. Định nghĩa và cách giải 17
2. Ứng dụng 17
DẠNG TOÁN 1: GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI 17
1. Các ví dụ minh họa. 17
2. Bài tập luyện tập. 21
DẠNG TOÁN 2: GIẢI HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN. 24
1. Các ví dụ minh họa. 24
3. Bài tập luyện tập 28
DẠNG TOÁN 3: GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH TÍCH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU THỨC. 32
1. Các ví dụ minh họa. 32
2. Bài tập luyện tập. 37
DẠNG TOÁN 4: ỨNG DỤNG TAM THỨC BẬC HAI, BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT. 38
1. Phương pháp giải. 39
2. Các ví dụ minh họa. 39
3. Bài tập luyện tập. 41
C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN. 45
TỔNG HỢP LẦN 1. 45
TỔNG HỢP LẦN 2. 53

§6. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Tam thức bậc hai

Tam thức bậc hai (đối với x) là biểu thức dạng ax^2+bx+c. Trong đó a,b,c là những số cho trước với $a\neq 0$.

Nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$ được gọi là ***nghiệm của tam thức bậc hai*** $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$;

$\Delta=b^2-4ac$ và $\Delta'=b'^2-ac$ theo thứ tự được gọi là biệt thức và biệt thức thu gọn của tam thức bậc hai $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$.

2. Dấu của tam thức bậc hai

Dấu của tam thức bậc hai được thể hiện trong bảng sau

$f\left(x\right)=ax^2+bx+c,\ \left(a\neq 0\right)$	
$\Delta<0$	$a.f\left(x\right)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$
$\Delta=0$	$a.f\left(x\right)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$
$\Delta>0$	$a.f\left(x\right)>0,\ \forall x\in\left(-\infty;x_1\right)\cup\left(x_2;+\infty\right)$
	$a.f\left(x\right)<0,\ \forall x\in\left(x_1;\ x_2\right)$

Nhận xét: Cho tam thức bậc hai ax^2+bx+c

- $ax^2+bx+c>0,\forall x\in R\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$;
- $ax^2+bx+c\geq 0,\forall x\in R\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$
- $ax^2+bx+c<0,\forall x\in R\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$;
- $ax^2+bx+c\leq 0,\forall x\in R\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

➢ DẠNG TOÁN 1: XÉT DẤU CỦA BIỂU THỨC CHỨA TAM THỨC BẬC HAI.

1. Phương pháp giải.

Dựa vào định lí về dấu của tam thức bậc hai để xét dấu của biểu thức chứa nó.

* Đối với đa thức bậc cao $P(x)$ ta làm như sau

- Phân tích đa thức $P\left(x\right)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất)
- Lập bảng xét dấu của $P\left(x\right)$. Từ đó suy ra dấu của nó.

* Đối với phân thức $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (trong đó $P\left(x\right),\ Q\left(x\right)$ là các đa thức) ta làm như sau

- Phân tích đa thức $P\left(x\right),\ Q\left(x\right)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất)
- Lập bảng xét dấu của $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Từ đó suy ra dấu của nó.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Xét dấu của các tam thức sau

a) $3x^2-2x+1$

A. $3x^2-2x+1\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ **B.** $3x^2-2x+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

C. $3x^2-2x+1<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ **D.** $3x^2-2x+1\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

b) $-x^2+4x+5$

A. $-x^2+4x+5>0\Leftrightarrow x\in(-1;5)$ **B.** $-x^2+4x+5<0\Leftrightarrow x\in(-1;5)$

C. $-x^2+4x+5>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$ **D.** $-x^2+4x+5<0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)$

c) $-4x^2+12x-9$

A. $-4x^2+12x-9<0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ **B.** $-4x^2+12x-9>0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$

C. $-4x^2+12x-9<0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$ **D.** $-4x^2+12x-9>0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

d) $3x^2-2x-8$

A. $3x^2-2x-8<0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)\cup(2;+\infty)$ **B.** $3x^2-2x-8<0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)$

C. $3x^2-2x-8<0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{4}{3};2\right)$ **D.** $3x^2-2x-8>0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{4}{3};2\right)$

e) $25x^2+10x+1$

A. $25x^2+10x+1>0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{5}\right\}$ **B.** $25x^2+10x+1<0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{5}\right\}$

C. $25x^2+10x+1<0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{5}\right\}$ **D.** $25x^2+10x+1>0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{5}\right\}$

f) $-2x^2+6x-5$

A. $-2x^2+6x-5>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ **B.** $-2x^2+6x-5\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

C. $-2x^2+6x-5\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ **D.** $-2x^2+6x-5<0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Lời giải:

a) Ta có $\Delta'=-2<0,\ a=3>0$ suy ra $3x^2-2x+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

b) Ta có $-x^2+4x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=5\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$ -1 5 $+\infty$
$-x^2+4x+5$	$-$ 0 $+$ $\vert$ $-$

Suy ra $-x^2+4x+5>0 \Leftrightarrow x\in(-1;5)$ và $-x^2+4x+5<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$

c) Ta có $\Delta'=0,\ a<0$ suy ra $-4x^2+12x-9<0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$

d) Ta có $3x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\frac{4}{3}\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$ $-\frac{4}{3}$ 2 $+\infty$
$3x^2-2x-8$	$+$ 0 $-$ $\vert$ $+$

Suy ra $3x^2-2x-8>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)\cup(2;+\infty)$ và $3x^2-2x-8<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{4}{3};2\right)$

e) Ta có $\Delta'=0,\ a>0$ suy ra $25x^2+10x+1>0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{5}\right\}$

f) Ta có $\Delta'=-1<0,\ a<0$ suy ra $-2x^2+6x-5<0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Nhận xét:

Cho tam thức bậc hai ax^2+bx+c. Xét nghiệm của tam thức, nếu:

* Vô nghiệm khi đó tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$ cùng dấu với a với mọi x

* Nghiệm kép khi đó tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$ cùng dấu với a với mọi $x\neq-\frac{b}{2a}$

* Có hai nghiệm $f(x)$ cùng dấu với a khi và chỉ khi $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$ (ngoài hai nghiệm) và $f(x)$ trái dấu với a khi và chỉ khi $x\in(x_1;x_2)$ (trong hai nghiệm)(ta có thể nhớ câu là trong trái ngoài cùng)

Ví dụ 2: Tùy theo giá trị của tham số *m*, hãy xét dấu của các biểu thức $f(x)=x^2+2mx+3m-2$

<u>***Lời giải:***</u>

Tam thức $f(x)$ có $a=1>0$ và $\Delta'=m^2-3m+2$.

* Nếu $1<m<2\Rightarrow\Delta'<0\Rightarrow f(x)>0\ \ \forall x\in R$.

* Nếu $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2\end{array}\right.\Rightarrow\Delta'=0\Rightarrow f(x)\geq0\ \ \forall x\in R$ và $f(x)=0\Leftrightarrow x=-m$

* Nếu $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<1\end{array}\right.\Rightarrow\Delta'>0\Rightarrow f(x)$ có hai nghiệm

$x_1=-m-\sqrt{m^2-3m+2}$ và $x_2=-m+\sqrt{m^2-3m+2}$. Khi đó:

+) $f(x)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$

+) $f(x)<0 \Leftrightarrow x \in (x_1; x_2)$.

Ví dụ 3: Xét dấu của các biểu thức sau

a) $\left(-x^2+x-1\right)\left(6x^2-5x+1\right)$

A. $\left(-x^2+x-1\right)\left(6x^2-5x+1\right)$ dương khi và chỉ khi $x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$

B. $\left(-x^2+x-1\right)\left(6x^2-5x+1\right)$ âm khi và chỉ khi $x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$

C. $\left(-x^2+x-1\right)\left(6x^2-5x+1\right)$ dương khi và chỉ khi $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

D. $\left(-x^2+x-1\right)\left(6x^2-5x+1\right)$ âm khi và chỉ khi $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$

b) $\frac{x^2-x-2}{-x^2+3x+4}$

A. $\frac{x^2-x-2}{-x^2+3x+4}$ âm khi và chỉ khi $x \in (2;4)$,

B. $\frac{x^2-x-2}{-x^2+3x+4}$ dương khi và chỉ khi $x \in (2;4)$,

C. $\frac{x^2-x-2}{-x^2+3x+4}$ dương khi và chỉ khi $x \in (-\infty;-1) \cup (-1;2)$.

D. $\frac{x^2-x-2}{-x^2+3x+4}$ âm khi và chỉ khi $x \in (-1;2) \cup (4;+\infty)$.

c) x^3-5x+2

A. x^3-5x+2 âm khi và chỉ khi $x \in \left(-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}\right) \cup (2;+\infty)$

B. x^3-5x+2 dương khi và chỉ khi $x \in \left(-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}\right)$

C. x^3-5x+2 âm khi và chỉ khi $x \in \left(-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}\right)$

D. x^3-5x+2 dương khi và chỉ khi $x \in \left(-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}\right) \cup (2;+\infty)$

d) $x - \frac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$

A. $x - \frac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$ dương khi và chỉ khi $x \in (-2;-1) \cup (4;+\infty)$

B. $x - \frac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$ dương khi và chỉ khi $x \in (4;+\infty)$

C. $x-\dfrac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$ âm khi và chỉ khi $x\in(-\infty;-2)\cup(3;4)$

D. $x-\dfrac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$ âm khi và chỉ khi $x\in(-\infty;-2)\cup(-1;1)\cup(3;4)$

<u>Lời giải:</u>

a) Ta có $-x^2+x-1=0$ vô nghiệm, $6x^2-5x+1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ hoặc $x=\dfrac{1}{3}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-x^2+x-1$		$-$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$6x^2-5x+1$		$+$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(-x^2+x-1)(6x^2-5x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra $(-x^2+x-1)(6x^2-5x+1)$ dương khi và chỉ khi $x\in\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$

$(-x^2+x-1)(6x^2-5x+1)$ âm khi và chỉ khi $x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

b) Ta có $x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$, $-x^2+3x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=4\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$-x^2+3x+4$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$\dfrac{x^2-x-2}{-x^2+3x+4}$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Suy ra $\dfrac{x^2-x-2}{-x^2+3x+4}$ dương khi và chỉ khi $x\in(2;4)$, $\dfrac{x^2-x-2}{-x^2+3x+4}$ âm khi và chỉ khi $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;2)\cup(4;+\infty)$.

c) Ta có $x^3-5x+2=(x-2)(x^2+2x-1)$

Ta có $x^2+2x-1=0\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{2}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$-$	0	$-$	$\vert$	$+$	
x^2+2x-1		$+$	0	$-$	$\vert$	$+$	0	$+$	
x^3-5x+2		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra x^3-5x+2 dương khi và chỉ khi $x\in(-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2})\cup(2;+\infty)$, x^3-5x+2 âm khi và chỉ khi $x\in(-\infty;-1-\sqrt{2})\cup(-1+\sqrt{2};2)$.

d) Ta có $x-\dfrac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}=\dfrac{-x^3+2x^2+5x-6}{-x^2+3x+4}=\dfrac{(x-1)(-x^2+x+6)}{-x^2+3x+4}$

Ta có $-x^2+x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=3\end{array}\right.$, $-x^2+3x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=4\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		1		3		4		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-x^2+x+6$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$-x^2+3x+4$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-\dfrac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	

Suy ra $x-\dfrac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$ dương khi và chỉ khi $x\in(-2;-1)\cup(1;3)\cup(4;+\infty)$, $x-\dfrac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$ âm khi và chỉ khi $x\in(-\infty;-2)\cup(-1;1)\cup(3;4)$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.84: Xét dấu các tam thức sau

a) $f(x)=-2x^2+3x-1$

A. $f(x)<0\ \Leftrightarrow x\in(\frac{1}{2};1)$; **B.** $f(x)>0\ \Leftrightarrow x\in(-\infty;\frac{1}{2})\cup(1;+\infty)$.

C. $f(x)<0\ \Leftrightarrow x\in(-\infty;\frac{1}{2})\cup(1;+\infty)$. **D.** $f(x)<0\Leftrightarrow x\in(-\infty;\frac{1}{2})$.

b) $g(x)=\dfrac{1}{4}x^2-x+1$

A. $g(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ **B.** $g(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ **C.** $g(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$ **D.** $g(x)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

c) $h(x)=-2x^2+x-1$.

A. $g(x)>0\ \ \forall x\in R$. **B.** $g(x)\le 0\ \ \forall x\in R$.

C. $g(x)\ge 0\ \ \forall x\in R$. **D.** $g(x)<0\ \ \forall x\in R$.

<u>Lời giải:</u>

Bài 4.84: a) Tam thức $f(x)$ có $a=-2<0$, có hai nghiệm $x_1=\dfrac{1}{2}$; $x_2=1$

* $f(x)>0$ (trái dấu với a) $\Leftrightarrow x\in(\frac{1}{2};1)$

* $f(x)<0$ (cùng dấu với a) $\Leftrightarrow x\in(-\infty;\frac{1}{2})\cup(1;+\infty)$.

b) Tam thức $g(x)$ có $a=\dfrac{1}{4}>0$, có $\Delta=0$ $\Rightarrow g(x)>0$ (cùng dấu với a) $\forall x\ne\dfrac{1}{2}$ và $g(\frac{1}{2})=0$.

c) Tam thức $g(x)$ có $a=-2>0$, có $\Delta=-7<0$ $\Rightarrow g(x)<0$ (cùng dấu với a) $\forall x\in R$.

Bài 4.85: Xét dấu các biểu thức sau

a) $f(x)=(x^2-5x+4)(2-5x+2x^2)$

A.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		2		4		$+\infty$
x^2-5x+4		+	|	+	0	–	|	–	0	+	
$2x^2-5x+2$		+	0	–	|	+	0	+	|	+	
f(x)		+	0	+	0	+	0	–	0	+	

B.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		2		4		$+\infty$
x^2-5x+4		+	|	+	0	–	|	+	0	+	
$2x^2-5x+2$		+	0	+	|	–	0	+	|	+	
f(x)		+	0	–	0	+	0	+	0	+	

C.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		2		4		$+\infty$
x^2-5x+4		+	|	+	0	+	|	–	0	+	
$2x^2-5x+2$		+	0	–	|	+	0	+	|	+	
f(x)		+	0	–	0	+	0	–	0	+	

D.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		2		4		$+\infty$
x^2-5x+4		+	|	+	0	–	|	–	0	+	
$2x^2-5x+2$		+	0	–	|	–	0	+	|	+	
f(x)		+	0	–	0	+	0	–	0	+	

b) $f(x)=x^2-3x-2-\dfrac{8}{x^2-3x}$.

A.

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ -1 0 1 2 3 4 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>x^2-3x</td><td>+ | + 0 + | – | – 0 + | +</td></tr>
<tr><td>x^2-3x-4</td><td>+ 0 – | + | – | – | – 0 +</td></tr>
<tr><td>x^2-3x+2</td><td>+ | + | + 0 – 0 + | + | +</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>+ || – 0 + || – || + 0 – || +</td></tr>
</table>

B.

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ -1 0 1 2 3 4 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>x^2-3x</td><td>+ | + 0 – | + | – 0 + | +</td></tr>
<tr><td>x^2-3x-4</td><td>+ 0 – | – | + | – | – 0 +</td></tr>
<tr><td>x^2-3x+2</td><td>+ | + | + 0 – 0 + | + | +</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>+ || – 0 + || – || + 0 – || +</td></tr>
</table>

C.

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ -1 0 1 2 3 4 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>x^2-3x</td><td>+ | + 0 – | – | + 0 + | +</td></tr>
<tr><td>x^2-3x-4</td><td>+ 0 – | – | – | + | – 0 +</td></tr>
<tr><td>x^2-3x+2</td><td>+ | + | + 0 – 0 + | + | +</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>+ || – 0 + || – || + 0 – || +</td></tr>
</table>

D.

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ -1 0 1 2 3 4 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>x^2-3x</td><td>+ | + 0 – | – | – 0 + | +</td></tr>
<tr><td>x^2-3x-4</td><td>+ 0 – | – | – | – | – 0 +</td></tr>
<tr><td>x^2-3x+2</td><td>+ | + | + 0 – 0 + | + | +</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>+ || – 0 + || – || + 0 – || +</td></tr>
</table>

<u>Lời giải:</u>

Bài 4.85: a) Ta có: $x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1; x=4$

$$2-5x+2x^2=0 \Leftrightarrow x=2; x=\frac{1}{2}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$ $\qquad \frac{1}{2}$ $\qquad 1$ $\qquad 2$ $\qquad 4$ $\qquad +\infty$
x^2-5x+4	+ $\quad$ | $\quad$ + $\quad$ 0 $\quad$ – $\quad$ | $\quad$ – $\quad$ 0 $\quad$ +
$2x^2-5x+2$	+ $\quad$ 0 $\quad$ – $\quad$ | $\quad$ – $\quad$ 0 $\quad$ + $\quad$ | $\quad$ +
f(x)	+ $\quad$ 0 $\quad$ – $\quad$ 0 $\quad$ + $\quad$ 0 $\quad$ – $\quad$ 0 $\quad$ +

b) Ta có: $f(x)=\frac{(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8}{x^2-3x}=\frac{(x^2-3x+2)(x^2-3x-4)}{x^2-3x}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 0 $\quad$ 1 $\quad$ 2 $\quad$ 3 $\quad$ 4 $\quad$ $+\infty$
x^2-3x	+ $\quad$ | $\quad$ + $\quad$ 0 $\quad$ – $\quad$ | $\quad$ – $\quad$ | $\quad$ – $\quad$ 0 $\quad$ + $\quad$ | $\quad$ +
x^2-3x-4	+ $\quad$ 0 $\quad$ – $\quad$ | $\quad$ – $\quad$ | $\quad$ – $\quad$ | $\quad$ – $\quad$ | $\quad$ – $\quad$ 0 $\quad$ +
x^2-3x+2	+ $\quad$ | $\quad$ + $\quad$ | $\quad$ + $\quad$ 0 $\quad$ – $\quad$ 0 $\quad$ + $\quad$ | $\quad$ + $\quad$ | $\quad$ +
f(x)	+ $\quad$ || $\quad$ – $\quad$ 0 $\quad$ + $\quad$ || $\quad$ – $\quad$ || $\quad$ + $\quad$ 0 $\quad$ – $\quad$ || $\quad$ +

Bài 4.86: Xét dấu các biểu thức sau

a) $\frac{1}{x+9}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$

A. $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-6;-3)\cup(2;0)$

B. $f(x)<0 \Leftrightarrow (-\infty;-6)\cup(-3;2)\cup(0;+\infty)$

C. $f(x)\leq 0 \Leftrightarrow (-\infty;-6)\cup(-3;2)\cup(0;+\infty)$

D. $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-6;-3)\cup(2;0)$

b) x^4-4x+1.

A. $f(x)\leq 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2};+\infty\right)$

B. $f(x)>0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2};\frac{\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}\right)$

C. $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2};\frac{\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}\right)$

D. $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2};+\infty\right)$

c) $\frac{3x+7}{x^2-x-2}+5$

A. $\frac{5x^2-2x-3}{x^2-x-2}<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{3}{5};1\right)\cup(2;+\infty)$

B. $\frac{5x^2-2x-3}{x^2-x-2}>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{3}{5};1\right)$

C. $\frac{5x^2-2x-3}{x^2-x-2}<0 \Leftrightarrow x\in\left(-1;-\frac{3}{5}\right)\cup(1;2)$

D. $\frac{5x^2-2x-3}{x^2-x-2}>0 \Leftrightarrow x\in\left(-1;-\frac{3}{5}\right)\cup(1;2)$

d) x^3-3x+2

A. $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-2;+\infty)$

B. $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)$

C. $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)$

D. $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-2;+\infty)\setminus\{1\}$

Lời giải:

Bài 4.86: a) Ta có: $f(x)=\frac{2x-2(x+9)-x(x+9)}{2x(x+9)}=\frac{-x^2-9x-18}{2x(x+2)}$

$\Rightarrow f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-6;-3)\cup(2;0)$

$f(x)<0 \Leftrightarrow (-\infty;-6)\cup(-3;2)\cup(0;+\infty)$

b) Ta có: $f(x)=x^4+2x^2+1-2(x^2+2x+1)=(x^2+1)^2-\left[\sqrt{2}(x+1)\right]^2$

$\Rightarrow f(x)=\left(x^2-\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}\right)$

$\Rightarrow f(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2};+\infty\right)$

$f(x)<0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2};\frac{\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}\right)$

c) $\frac{5x^2-2x-3}{x^2-x-2}>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{3}{5};1\right)\cup(2;+\infty)$

Và $\dfrac{5x^2-2x-3}{x^2-x-2}<0 \Leftrightarrow x\in\left(-1;-\dfrac{3}{5}\right)\cup(1;2)$

d) $f\left(x\right)=(x-1)^2(x+2) \Rightarrow f\left(x\right)>0 \Leftrightarrow x\in\left(-2;+\infty\right)\backslash\{1\}$

$f\left(x\right)<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-2\right)$

Bài 4.87: Tùy theo giá trị của tham số m $g(x)=(m-1)x^2+2(m-1)+m-3$, Khẳng định nào sau đây đúng là sai?

A. $m=1 \Rightarrow g(x)<0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

B. $T=\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$ có hai nghiệm phân biệt

C. $m<1 \Rightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta'<0 \end{cases} \Rightarrow g(x)<0 \quad \forall x\in R$.

D. Cả A, B, C đều sai

<u>Lời giải:</u>

Bài 4.87: Nếu $m=1 \Rightarrow g(x)=-2<0 \quad \forall x\in R$

Nếu $m\neq 1$, khi đó $g(x)$ là tam thức bậc hai có $a=m-1$ và $\Delta'=2(m-1)$, do đó ta có các trường hợp sau:

* $T=\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$ có hai nghiệm phân biệt

$x_1=\dfrac{m-1-\sqrt{2(m-1)}}{m-1}$ và $x_2=\dfrac{m-1+\sqrt{2(m-1)}}{m-1}$.

$\Rightarrow g(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$; $g(x)<0 \Leftrightarrow x\in(x_1;x_2)$.

* $m<1 \Rightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta'<0 \end{cases} \Rightarrow g(x)<0 \quad \forall x\in R$

➢ DẠNG TOÁN 2: BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ LIÊN QUAN ĐẾN TAM THỨC BẬC HAI LUÔN MANG MỘT DẤU.

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì

a) Phương trình $mx^2-\left(3m+2\right)x+1=0$ luôn có nghiệm

b) Phương trình $\left(m^2+5\right)x^2-\left(\sqrt{3}m-2\right)x+1=0$ luôn vô nghiệm

Lời giải

a) Với $m=0$ phương trình trở thành $-2x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ suy ra phương trình có nghiệm

Với $m\neq 0$, ta có $\Delta=\left(3m+2\right)^2-4m=9m^2+8m+4$

Vì tam thức $9m^2+8m+4$ có $a_m=9>0, \Delta'_m=-20<0$ nên $9m^2+8m+4>0$ với mọi m

Do đó phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m.

b) Ta có $\Delta = \left(\sqrt{3}m-2\right)^2 - 4\left(m^2+5\right) = -m^2 - 4\sqrt{3}m - 16$

Vì tam thức $-m^2 - 4\sqrt{3}m - 8$ có $a_m = -1 < 0, \Delta'_m = -4 < 0$ nên $-m^2 - 4\sqrt{3}m - 8 < 0$ với mọi m

Do đó phương trình đã cho luôn vô nghiệm với mọi m.

Ví dụ 2: Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn âm

a) $f\left(x\right) = mx^2 - x - 1$

A. $-\frac{1}{4} < m < 0$ **B.** $-\frac{1}{4} < m$ **C.** $m < 0$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -\frac{1}{4} \end{array}\right.$

b) $g\left(x\right) = \left(m-4\right)x^2 + \left(2m-8\right)x + m - 5$

A. $m < 4$ **B.** $m \le 4$ **C.** $m > 4$ **D.** $m \le 2$

<u>Lời giải:</u>

a) Với $m = 0$ thì $f\left(x\right) = -x - 1$ lấy cả giá trị dương(chẳng hạn $f\left(-2\right) = 1$) nên $m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán

Với $m \ne 0$ thì $f\left(x\right) = mx^2 - x - 1$ là tam thức bậc hai dó đó

$$f\left(x\right) < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = m < 0 \\ \Delta = 1 + 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < m < 0$$

Vậy với $-\frac{1}{4} < m < 0$ thì biểu thức $f\left(x\right)$ luôn âm.

b) Với $m = 4$ thì $g\left(x\right) = -1 < 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Với $m \ne 4$ thì $g\left(x\right) = \left(m-4\right)x^2 + \left(2m-8\right)x + m - 5$ là tam thức bậc hai dó đó

$$g\left(x\right) < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = m - 4 < 0 \\ \Delta' = \left(m-4\right)^2 - \left(m-4\right)\left(m-5\right) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4$$

Vậy với $m \le 4$ thì biểu thức $g\left(x\right)$ luôn âm.

Ví dụ 3: Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn dương

a) $h\left(x\right) = \frac{-x^2 + 4\left(m+1\right)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2}$

A. $m < -\frac{5}{8}$ **B.** $m \le -\frac{5}{8}$ **C.** $m > -\frac{5}{8}$ **D.** $m < -\frac{3}{8}$

b) $k\left(x\right) = \sqrt{x^2 - x + m} - 1$

A. $m > \frac{1}{4}$ **B.** $m \ge \frac{1}{4}$ **C.** $m \le \frac{1}{4}$ **D.** $m > \frac{3}{4}$

<u>Lời giải:</u>

a) Tam thức $-4x^2 + 5x - 2$ có $a = -4 < 0, \Delta = -7 < 0$ suy ra $-4x^2 + 5x - 2 < 0 \ \forall x$

Do đó $h(x)$ luôn dương khi và chỉ khi $h'(x)=-x^2+4(m+1)x+1-4m^2$ luôn âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1<0 \\ \Delta'=4(m+1)^2+(1-4m^2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow 8m+5<0 \Leftrightarrow m<-\frac{5}{8}$$

Vậy với $m<-\frac{5}{8}$ thì biểu thức $h(x)$ luôn dương.

b) Biểu thức $k(x)$ luôn dương $\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+m}-1>0,\ \forall x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+m}>1,\ \forall x \Leftrightarrow x^2-x+m>0,\ \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1>0 \\ \Delta=1-4m<0 \end{cases} \Leftrightarrow m>\frac{1}{4}$$

Vậy với $m>\frac{1}{4}$ thì biểu thức $k(x)$ luôn dương.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng hàm số sau có tập xác định là $\mathbb{R}$ với mọi giá trị của m.

a) $y=\dfrac{mx}{(2m^2+1)x^2-4mx+2}$

b) $y=\sqrt{\dfrac{2x^2-2(m+1)x+m^2+1}{m^2x^2-2mx+m^2+2}}$

<u>***Lời giải:***</u>

a) ĐKXĐ: $(2m^2+1)x^2-4mx+2\neq 0$

Xét tam thức bậc hai $f(x)=(2m^2+1)x^2-4mx+2$

Ta có $a=2m^2+1>0,\ \Delta'=4m^2-2(2m^2+1)=-2<0$

Suy ra với mọi m ta có $f(x)=(2m^2+1)x^2-4mx+2>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Do đó với mọi m ta có $(2m^2+1)x^2-4mx+2\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$

b) ĐKXĐ: $\dfrac{2x^2-2(m+1)x+m^2+1}{m^2x^2-2mx+m^2+2}\geq 0$ và $m^2x^2-2mx+m^2+2\neq 0$

Xét tam thức bậc hai $f(x)=2x^2-2(m+1)x+m^2+1$ và

Ta có $a_f=2>0,\ \Delta_f'=(m+1)^2-2(m^2+1)=-m^2+2m-1=-(m-1)^2\leq 0$

Suy ra với mọi m ta có $f(x)=2x^2-2(m+1)x+m^2+1\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (1)

Xét tam thức bậc hai $g(x)=m^2x^2-2mx+m^2+2$

Với $m=0$ ta có $g(x)=2>0$, xét với $m\neq 0$ ta có

$a_g=m^2>0,\ \Delta_g'=m^2-m^2(m^2+2)=-m^2(m^2+1)<0$

Suy ra với mọi m ta có $g(x)=m^2x^2-2mx+m^2+2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra với mọi m thì $\dfrac{2x^2-2(m+1)x+m^2+1}{m^2x^2-2mx+m^2+2}\geq 0$ và $m^2x^2-2mx+m^2+2\neq 0$ đúng với mọi giá trị của x

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.88: Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì

a) Phương trình $x^2 - 2(m+2)x - (m+3) = 0$ luôn có nghiệm

b) Phương trình $(m^2+1)x^2 + (\sqrt{3}m - 2)x + 2 = 0$ luôn vô nghiệm

Lời giải:

Bài 4.88: a) Ta có $\Delta = (m+2)^2 + m + 3 = m^2 + 5m + 7$

Vì tam thức $m^2 + 5m + 7$ có $a_m = 1 > 0, \Delta'_m = -2 < 0$ nên $x = -4, x = 0$ với mọi m

Do đó phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m.

b) Ta có $\Delta = (\sqrt{3}m - 2)^2 - 8(m^2+1) = -5m^2 - 4\sqrt{3}m - 4$

Vì tam thức $-5m^2 - 4\sqrt{3}m - 4$ có $a_m = -5 < 0, \Delta'_m < 0$ nên $-5m^2 - 4\sqrt{3}m - 4 < 0$ với mọi m. Do đó phương trình đã cho luôn vô nghiệm với mọi m.

Bài 4.89: Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn âm

a) $f(x) = -x^2 - 2x - m$

A. $-\frac{1}{4} < m$ **B.** $m < 0$ **C.** $-\frac{1}{4} < m < 0$ **D.** $\mathbb{R}$

b) $g(x) = 4mx^2 - 4(m-1)x + m - 3$

A. $m < 1$ **B.** $m > -1$ **C.** $m \le -1$ **D.** $m < -1$

Lời giải:

Bài 4.89: a) $f(x) < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = 1 - 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$

Vậy với $-\frac{1}{4} < m < 0$ thì biểu thức $f(x)$ luôn âm.

b) Với $m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán

Với $m \ne 0$ thì $g(x) = 4mx^2 - 4(m-1)x + m - 3$ là tam thức bậc hai dó đó

$$g(x) < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4m < 0 \\ \Delta' = 4(m-1)^2 - 4m(m-3) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 4m + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1$$

Vậy với $m < -1$ thì biểu thức $g(x)$ luôn âm.

Bài 4.90: Chứng minh rằng hàm số sau có tập xác định là $\mathbb{R}$ với mọi giá trị của m.

a) $y = \sqrt{m^2x^2 - 4mx + m^2 - 2m + 5}$

b) $y = \dfrac{2x + 3m}{\sqrt{x^2 + 2(1-m)x + 2m^2 + 3}}$

Lời giải:

Bài 4.90: a) ĐKXĐ: $m^2x^2-4mx+m^2-2m+5\ge 0$ (*)

Với $m=0$ thì điều kiện (*) đúng với mọi x

Với $m\ne 0$ xét tam thức bậc hai $f\left(x\right)=m^2x^2-4mx+m^2-2m+5$

Ta có $a=m^2>0,\ \Delta'=4m^2-8\left(2m^2+1\right)=-12m^2-8<0$

Suy ra $f\left(x\right)=m^2x^2-4mx+m^2-2m+5\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Do đó với mọi m ta có $m^2x^2-4mx+m^2-2m+5\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$

b) ĐKXĐ: $x^2+2\left(1-m\right)x+2m^2+3>0$

Xét tam thức bậc hai $f\left(x\right)=x^2+2\left(1-m\right)x+2m^2+3$

Ta có $a=1>0,\ \Delta'=\left(1-m\right)^2-\left(2m^2+3\right)=-m^2-2m-2<0$

(Vì tam thức bậc hai $f\left(m\right)=-m^2-2m-2$ có $a_m=-1<0,\ \Delta'_m=-1<0$)

Suy ra với mọi m ta có $x^2+2\left(1-m\right)x+2m^2+3>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$

Bài 4.91: Tìm m để

a) $3x^2-2(m+1)x-2m^2+3m-2\ge 0\ \ \forall x\in R$

A. $m<1$ **B.** $m>-1$ **C.** $m\le -1$ **D.** Vô nghiệm

b) Hàm số $y=\sqrt{(m+1)x^2-2(m-1)x+3m-3}$ có nghĩa với mọi x.

A. $m<1$ **B.** $m\ge 1$ **C.** $m\le -1$ **D.** $m<-1$

c) $\left|\dfrac{x+m}{x^2+x+1}\right|\le 1\quad \forall x\in R$

A. $0\le m$ **B.** $m\le 1$ **C.** $0\le m\le 1$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<0 \end{array}\right.$

Lời giải:

Bài 4.91: a) $3x^2-2(m+1)x-2m^2+3m-2\ge 0\ \ \forall x\in R$

$\Leftrightarrow \Delta'=(m+1)^2+3(2m^2-3m+2)\le 0\ \ 7m^2-7m+7\le 0$ bpt vô nghiệm

Vậy không có m thỏa mãn yêu cầu bài toán

b) Hàm số có nghĩa với mọi x

$\Leftrightarrow (m+1)x^2-2(m-1)x+3m-3\ge 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ (1)

* $m=-1$không thỏa mãn

* $m\ne -1\Rightarrow (1)\Leftrightarrow \begin{cases} m+1>0 \\ \Delta'=(m-1)(-2m-4)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\ge 1$

c) Ta có $x^2+x+1>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \left|\frac{x+m}{x^2+x+1}\right|\le 1\Leftrightarrow -1\le \frac{x+m}{x^2+x+1}\le 1\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1-m\ge 0 & (1) \\ x^2+2x+m+1\ge 0 & (2) \end{cases}$$

(1) đúng $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 1-m\ge 0\Leftrightarrow m\le 1$

(2) đúng $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \Delta'=-m\le 0\Leftrightarrow m\ge 0$

Vậy $0\le m\le 1$ là những giá trị cần tìm

§7. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa và cách giải

Bất phương trình bậc hai (ẩn x) là bất phương trình có một trong các dạng

$f\left(x\right)>0,\ f(x)<0,\ f(x)\ge 0,\ f(x)\le 0$, trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai.

Cách giải. Để giải bất phương trình bậc hai, ta áp dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai.

2. Ứng dụng

Giải bất phương trình tích, thương chứa các tam thức bậc hai bằng cách lập bảng xét dấu của chúng

➢ DẠNG TOÁN 1: GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $-3x^2+2x+1<0$

A. $S=(-\infty;-\frac{1}{3})$ **B.** $S=(1;+\infty)$ **C.** $S=\left(-\frac{1}{3};1\right)$ **D.** $S=(-\infty;-\frac{1}{3})\cup(1;+\infty)$

b) $x^2+x-12<0$

A. $\mathrm{S}=\left(-4;3\right)$ **B.** $\mathrm{S}=\left(-\infty;-4\right)$ **C.** $\mathrm{S}=\left(3;+\infty\right)$ **D.** $\mathrm{S}=\mathbb{R}$

c) $5x^2-6\sqrt{5}x+9>0$

A. $\mathrm{S}=\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right\}$ **B.** $\mathrm{S}=\mathbb{R}\backslash\left\{\pm\frac{3\sqrt{5}}{5}\right\}$ **C.** $\mathrm{S}=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3\sqrt{5}}{5}\right\}$ **D.** $\mathrm{S}=\mathbb{R}$

d) $-36x^2+12x-1\geq 0$

A. $S=\left\{\pm\frac{1}{6}\right\}$ **B.** $S=\left(-\infty;\frac{1}{6}\right)$ **C.** $S=\left\{\frac{1}{6}\right\}$ **D.** $S=\left(\frac{1}{6};+\infty\right)$

<u>Lời giải:</u>

a) Tam thức $f(x)=-3x^2+2x+1$ có $a=-3<0$ và có hai nghiệm $x_1=-\frac{1}{3};\ x_2=1$

($f(x)$ cùng dấu với hệ số a).

Suy ra $-3x^2+2x+1<0\Leftrightarrow x<-\frac{1}{3}$ hoặc $x>1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình : $S=(-\infty;-\frac{1}{3})\cup(1;+\infty)$.

b) Tam thức $f\left(x\right)=x^2+x-12$ có $a=1>0$ và có hai nghiệm $x_1=-4;\ x_2=3$

($f(x)$ trái dấu với hệ số a).

Suy ra $x^2+x-12<0\Leftrightarrow -4<x<3$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-4;3\right)$

c) Tam thức $f\left(x\right)=5x^2-6\sqrt{5}x+9$ có $a=5>0$ và $\Delta=0$

($f(x)$ cùng dấu với hệ số a).

Suy ra $5x^2-6\sqrt{5}x+9>0\Leftrightarrow x\neq\frac{3\sqrt{5}}{5}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\sqrt{5}}{5}\right\}$

d) Tam thức $f\left(x\right)=-36x^2+12x-1$ có $a=-36<0$ và $\Delta=0$

$f(x)$ trái dấu với hệ số a nên $f\left(x\right)$ âm với $\forall x\neq\frac{1}{6}$ và $f\left(\frac{1}{6}\right)=0$

Suy ra $-36x^2+12x-1\geq 0\Leftrightarrow x=\frac{1}{6}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left\{\frac{1}{6}\right\}$

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình sau có nghiệm

a) $x^2-mx+m+3=0$

A. $m\in(-\infty;-2]$ **B.** $m\in[6;+\infty)$ **C.** $m\in\left[-2;6\right]$ **D.** $m\in(-\infty;-2]\cup[6;+\infty)$

b) $(1+m)x^2-2mx+2m=0$

A. $m \le 0$ **B.** $-2 \le m$ **C.** $-2 \le m \le 0$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -2 \end{array}\right.$

<u>Lời giải:</u>

a) Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \ge 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 4(m+3) \ge 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 6 \\ m \le -2 \end{array}\right.$

Vậy với $m \in (-\infty; -2] \cup [6; +\infty)$ thì phương trình có nghiệm

b) Với $m = -1$ phương trình trở thành $2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ suy ra $m = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Với $m \ne -1$ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \ge 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 2m(1+m) \ge 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m \le 0 \Leftrightarrow -2 \le m \le 0$

Vậy với $-2 \le m \le 0$ thì phương trình có nghiệm

Ví dụ 3: Tìm m để mọi $x \in [-1;1]$ đều là nghiệm của bất phương trình

$3x^2 - 2(m+5)x - m^2 + 2m + 8 \le 0$ (1)

A. $m \in (-\infty; -3] \cup [7; +\infty)$ **B.** $m > -\dfrac{1}{2}$ **C.** $m \ge 7$ **D.** $m \le -3$

<u>Lời giải:</u>

Ta có $3x^2 - 2(m+5)x - m^2 + 2m + 8 = 0 \Leftrightarrow x = m + 2$ hoặc $x = \dfrac{4-m}{3}$

* Với $m + 2 > \dfrac{4-m}{3} \Leftrightarrow 3m + 6 > 4 - m \Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{2}$ ta có

Bất phương trình $(1) \Leftrightarrow \dfrac{4-m}{3} \le x \le m + 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là $\left[\dfrac{4-m}{3}; m+2\right]$

Suy ra mọi $x \in [-1;1]$ đều là nghiệm của bất phương trình (1)

khi và chỉ khi $[-1;1] \subset \left[\dfrac{4-m}{3}; m+2\right] \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \ge \dfrac{4-m}{3} \\ 1 \le m + 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 7 \\ m \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 7$

Kết hợp với điều kiện $m > -\dfrac{1}{2}$ ta có $m \ge 7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

* Với $m + 2 < \dfrac{4-m}{3} \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{2}$ ta có

Bất phương trình $(1) \Leftrightarrow m + 2 \le x \le \dfrac{4-m}{3}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là $\left[m+2; \dfrac{4-m}{3}\right]$

Suy ra mọi $x \in [-1;1]$ đều là nghiệm của bất phương trình (1) khi và chỉ khi $[-1;1]\subset\left[m+2;\dfrac{4-m}{3}\right]\Leftrightarrow\begin{cases}-1\ge m+2\\ 1\le\dfrac{4-m}{3}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\le -3\\ m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow m\le -3$

Kết hợp với điều kiện $m<-\dfrac{1}{2}$ ta có $m\le -3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

* Với $m=-\dfrac{1}{2}$ ta có bất phương trình (1) $\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ nên $m=-\dfrac{1}{2}$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $m\in(-\infty;-3]\cup[7;+\infty)$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4: Cho $(m+1)x^2-2(2m-1)x-4m+2<0$ khẳng định nào sau đây sai?

A. $m=-1$ bất phương trình có tập nghiệm là $\mathrm{S}=(-\infty;-1)$

B. $-\dfrac{1}{4}\le m\le\dfrac{1}{2}$ bất phương trình có tập nghiệm là $\mathrm{S}=\varnothing$

C. $\left[\begin{array}{l}m>\dfrac{1}{2}\\ -1<m<-\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$ bất phương trình có tập nghiệm là $S=(x_1;x_2)$

D. $m>-1$ bất phương trình có tập nghiệm là $S=(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$

<u>Lời giải:</u>

Với $m=-1$: bất phương trình trở thành $6x+6<0\Leftrightarrow x<-1$

Với $m\ne -1$ ta có $g(x)=(m+1)x^2-2(2m-1)x-4m+2$ là tam thức bậc hai có :
$a=m+1;\ \Delta'=8m^2-2m-1$.

Bảng xét dấu

m	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$m+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$8m^2-2m-1$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

* $-\dfrac{1}{4}\le m\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\Rightarrow g(x)\ge 0\ \ \forall x\in R\Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm.

* $\left[\begin{array}{l}m>\dfrac{1}{2}\\ -1<m<-\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'>0\end{cases}\Rightarrow S=(x_1;x_2)$, với

$x_1=\dfrac{2m-1-\sqrt{(2m-1)(m+1)}}{m+1};x_2=\dfrac{2m-1+\sqrt{(2m-1)(m+1)}}{m+1}$.

* $m < -1 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Rightarrow S = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

Kết luận

$m = -1$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; -1)$

$-\frac{1}{4} \le m \le \frac{1}{2}$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = \varnothing$

$\left[\begin{array}{l} m > \frac{1}{2} \\ -1 < m < -\frac{1}{4} \end{array} \right.$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = (x_1; x_2)$

$m < -1$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

2. Bài tập luyện tập.

Bài 4.92: Giải các bất phương trình sau:

a) $-2x^2 + 3x - 1 \ge 0$

A. $T = \left(\frac{1}{2}; 1 \right)$ **B.** $T = \left(-\infty; \frac{1}{2} \right)$ **C.** $T = \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$ **D.** $T = (1; +\infty)$

b) $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 \le 0$

A. $T = \{3\}$ **B.** $T = \{4\}$ **C.** $T = (2; 3)$ **D.** $T = \{2\}$

c) $-2x^2 + x - 1 \le 0$.

A. $T = \mathbb{R}$ **B.** $T = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ **C.** $T = (-1; +\infty)$ **D.** $T = \mathbb{R} \setminus (3; 7)$

d) $7x > 2x^2 - 6$

A. $\left(\frac{3}{2}; 2 \right)$ **B.** $\left[\frac{3}{2}; 2 \right]$ **C.** $\left(-\infty; \frac{3}{2} \right)$ **D.** $(2; +\infty)$

e) $x^2 - 22x + 51 < 0$

A. $T = \varnothing$ **B.** $T = \mathbb{R}$ **C.** $T = \left(9; \frac{170}{3} \right)$ **D.** $T = (-\infty; 2)$

f) $x^2 + 5x + 6 \ge 0$

A. $T = (-\infty; -3] \cup [-2; +\infty)$ **B.** $T = (-\infty; -3]$

C. $T = [-3; -2]$ **D.** $T = [-2; +\infty)$

Lời giải:

Bài 4.92: a) $T=\left[\frac{1}{2};1\right]$ b) $T=\{2\}$ c) $T=\mathbb{R}$

d) $\left(\frac{3}{2};2\right)$ e) $T=\varnothing$ f) $T=(-\infty;-3]\cup[-2;+\infty)$

Bài 4.93: Tìm m để phương trình sau vô nghiệm

a) $x^2-2mx+m+3=0$

A. $m\in\left(\frac{1-2\sqrt{13}}{2};\frac{1+2\sqrt{13}}{2}\right)$ **B.** $m\in\left(\frac{1-3\sqrt{13}}{2};\frac{1+3\sqrt{13}}{2}\right)$

C. $m\in\left(\frac{1-4\sqrt{13}}{2};\frac{1+4\sqrt{13}}{2}\right)$ **D.** $m\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

b) $(m-1)x^2-(2m-2)x+2m=0$

A. $\left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ m<-2 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 3 \\ m<-3 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m<-1 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 4 \\ m<-4 \end{array}\right.$

Lời giải:

Bài 4.93: a) Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta'<0$

$\Leftrightarrow m^2-m-3<0\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

Vậy với $m\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$ thì phương trình vô nghiệm

b) Với $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Với $m\ne 1$ phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta'<0$

$\Leftrightarrow (m-1)^2-2m(m-1)<0\Leftrightarrow (m-1)(-m-1)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right.$

Vậy với $\left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m<-1 \end{array}\right.$ thì phương trình có nghiệm

Bài 4.94: Cho $mx^2-2mx+m-1>0$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $m\le 0$ bất phương trình có tập nghiệm là $S=\varnothing$

B. $m>0$ bất phương trình có tập nghiệm là $S=(-\infty;\frac{m-\sqrt{m}}{m})\cup(\frac{m+\sqrt{m}}{m};+\infty)$

C. Cả A, B đều đúng

D. Cả A, B đều sai

Lời giải:

Bài 4.94: Với $m=0$, bất phương trình trở thành: $-1>0 \Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm

Với $m\neq 0 \Rightarrow f(x)=mx^2-2mx+m-1$ là tam thức bậc hai có $a=m,\ \Delta'=m$

* $m>0 \Rightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ a>0\end{cases} \Rightarrow$ bất phương trình có tập nghiệm: $S=(-\infty;\dfrac{m-\sqrt{m}}{m})\cup(\dfrac{m+\sqrt{m}}{m};+\infty)$.

* $m<0 \Rightarrow \begin{cases}a<0\\ \Delta'<0\end{cases} \Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm .

Kết luận

$m\le 0$ bất phương trình có tập nghiệm là $S=\varnothing$

$m>0$ bất phương trình có tập nghiệm là $S=(-\infty;\dfrac{m-\sqrt{m}}{m})\cup(\dfrac{m+\sqrt{m}}{m};+\infty)$

Bài 4.95: Tìm m để mọi $x\in[0;+\infty)$ đều là nghiệm của bất phương trình $(m^2-1)x^2-8mx+9-m^2\ge 0$

A. $m\in(-3;-1)$ **B.** $m\in\{-3;-1\}$ **C.** $m\in[-3;-1]$ **D.** $m\in\varnothing$

Lời giải:

Bài 4.95: $m=1$ không thỏa mãn ycbt; $m=-1$ thỏa mãn ycbt

Với $m\neq\pm1$ ta có $bpt \Leftrightarrow [(m+1)x+m-3][(m-1)x-m-3]\ge 0$

Đáp số $m\in[-3;-1]$

Bài 4.96: Cho hàm số $f(x)=x^2+bx+1$ với $b\in\left(3,\dfrac{7}{2}\right)$. Giải bất phương trình $f(f(x))>x$.

A. $S=\left(-\infty;\dfrac{1-b-2\sqrt{b^2-2b-3}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1-b+2\sqrt{b^2-2b-3}}{2};+\infty\right)$

B. $S=\left(-\infty;\dfrac{1-2b-\sqrt{b^2-2b-3}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1-2b+\sqrt{b^2-2b-3}}{2};+\infty\right)$

C. $S=\left(-\infty;\dfrac{1-3b-\sqrt{b^2-2b-3}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1-3b+\sqrt{b^2-2b-3}}{2};+\infty\right)$

D. $S=\left(-\infty;\dfrac{1-b-\sqrt{b^2-2b-3}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1-b+\sqrt{b^2-2b-3}}{2};+\infty\right)$

Lời giải:

Bài 4.96: Ta có $f(f(x))-x=[x^2+(b+1)x+b+2]\,[x^2+(b-1)x+1]$

Suy ra $f\left(f\left(x\right)\right)-x>0 \Leftrightarrow \left[x^2+(b+1)x+b+2\right]\left[x^2+(b-1)x+1\right]>0$

Đặt $g\left(x\right)= x^2+\left(b-1\right)x+1,\ h\left(x\right)=x^2+\left(b+1\right)x+b+2$

Ta có $\Delta_{g(x)}=b^2-2b-3$, $\Delta_{\mathrm{h(x)}}=b^2-2b-7$

Vì $b\in\left(3,\dfrac{7}{2}\right)$ nên $\Delta_{g(x)}>0$ và $\Delta_{h(x)}<0$. Phương trình $g\left(x\right)=0$ có hai nghiệm

$$x_1=\frac{1-b-\sqrt{b^2-2b-3}}{2},\ x_2=\frac{1-b+\sqrt{b^2-2b-3}}{2}$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=\left(-\infty;\dfrac{1-b-\sqrt{b^2-2b-3}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1-b+\sqrt{b^2-2b-3}}{2};+\infty\right)$

➢ DẠNG TOÁN 2: GIẢI HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN.

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases}2x^2+9x+7>0\\x^2+x-6<0\end{cases}$

A. $S=\left[-1;2\right]$ **B.** $S=\left(-1;2\right)$ **C.** $S=\left(-\infty;-1\right)$ **D.** $S=\mathbb{R}$

b) $\begin{cases}2x^2+x-6>0\\3x^2-10x+3\geq 0\end{cases}$

A. $S=(-\infty;-2]$ **B.** $S=(3;+\infty)$ **C.** $S=\left(-2;3\right)$ **D.** $S=(-\infty;-2]\cup(3;+\infty)$

c) $\begin{cases}-x^2+5x-4\geq 0\\x^2+x-13\leq 0\end{cases}$

A. $S=\left(1;\dfrac{-1+\sqrt{53}}{2}\right)$ **B.** $S=\left(-\infty;1\right)$ **C.** $S=\left(\dfrac{-1+\sqrt{53}}{2};+\infty\right)$ **D.** $S=\left[1;\dfrac{-1+\sqrt{53}}{2}\right]$

d) $\begin{cases}x^2+4x+3\geq 0\\2x^2-x-10\leq 0\\2x^2-5x+3>0\end{cases}$

A. $S=\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$ **B.** $S=\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$ **C.** $S=\left(-\infty;1\right)$ **D.** $S=\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$

Lời giải:

a) Ta có $\begin{cases} 2x^2+9x+7>0 \\ x^2+x-6<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq -1 \\ x \leq -\dfrac{7}{2} \end{array}\right. \\ -3<x<2 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<2$

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là $S=(-1;2)$.

b) Ta có $\begin{cases} 2x^2+x-6 \geq 0 \\ 3x^2-10x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{3}{2} \\ x \leq -2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x \leq -2 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là $S=(-\infty;-2]\cup(3;+\infty)$.

c) Ta có $\begin{cases} -x^2+5x-4 \geq 0 \\ x^2+x-13 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ \dfrac{-1-\sqrt{53}}{2} \leq x \leq \dfrac{-1+\sqrt{53}}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq \dfrac{-1+\sqrt{53}}{2}$

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là $S=\left[1;\dfrac{-1+\sqrt{53}}{2}\right]$.

d) Ta có $\begin{cases} x^2+4x+3 \geq 0 \\ 2x^2-x-10 \leq 0 \\ 2x^2-5x+3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq -1 \\ x \leq -3 \end{array}\right. \\ -2 \leq x \leq \dfrac{5}{2} \\ 1 \leq x \leq \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \dfrac{3}{2}$

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là $S=\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$.

Ví dụ 2: Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} mx^2-x-5 \leq 0 \\ (1-m)x^2+2mx+m+2 \geq 0 \end{cases}$

a) Giải hệ bất phương trình khi $m=1$

A. $S=\left[\dfrac{1-2\sqrt{21}}{2};\dfrac{1+2\sqrt{21}}{2}\right]$ **B.** $S=\left[\dfrac{1-3\sqrt{21}}{2};\dfrac{1+3\sqrt{21}}{2}\right]$

C. $S=\left[\frac{1-4\sqrt{21}}{2};\frac{1+4\sqrt{21}}{2}\right]$ **D.** $S=\left[\frac{1-\sqrt{21}}{2};\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right]$

b) Tìm *m* để hệ bất phương trình nghiệm đúng với mọi *x*

A. $\frac{-1-2\sqrt{17}}{4}\le m\le -\frac{31}{20}$ **B.** $m\le -\frac{1}{20}$

C. $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\le m$ **D.** $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\le m\le -\frac{1}{20}$

Lời giải:

a) Khi $m=1$ hệ bất phương trình trở thành

$$\begin{cases} x^2-x-5\le 0 \\ 2x+3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{21}}{2}\le x\le \frac{1+\sqrt{21}}{2} \\ x\ge -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{21}}{2}\le x\le \frac{1+\sqrt{21}}{2}$$

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là $S=\left[\frac{1-\sqrt{21}}{2};\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right]$

b) Khi $m=0$ hệ bất phương trình trở thành $\begin{cases} -x-5\le 0 \\ x^2+2\ge 0 \end{cases}$ (vô nghiệm) do đó $m=0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán

Khi $m=1$ theo câu a ta thấy cũng không thỏa mãn yêu cầu bài toán

Khi $\begin{cases} m\ne 0 \\ m\ne 1 \end{cases}$ ta có hệ bất phương trình nghiệm đúng với mọi *x* khi và chỉ khi các bất phương trình trong hệ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m<0 \\ \Delta_1=1+20m\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-m>0 \\ \Delta'_2=m^2-(1-m)(m+2)\le 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m\le -\frac{1}{20} \\ m<1 \\ 2m^2+m-2\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m\le -\frac{1}{20} \\ m<1 \\ \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\le m\le \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\le m\le -\frac{1}{20}$$

Vậy $\frac{-1-\sqrt{17}}{4} \le m \le -\frac{1}{20}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ sau có nghiệm $\begin{cases} x^2-3x+2\le 0 \\ mx^2-2(2m+1)x+5m+3\ge 0 \end{cases}$.

A. $m>-\frac{1}{2}$ **B.** $m=-\frac{1}{2}$ **C.** $m\ge -\frac{1}{2}$ **D.** $m=\varnothing$

<u>Lời giải:</u>

Ta có bất phương trình $x^2-3x+2\le 0 \Leftrightarrow 1\le x\le 2$.

Yêu cầu bài toán tương đương với bất phương trình:

$mx^2-2(2m+1)x+5m+3\le 0$ (1) có nghiệm $x\in S=[1;2]$.

Ta đi giải bài toán phủ định là: tìm m để bất phương trình (1) vô nghiệm trên S

Tức là bất phương trình $f(x)=mx^2-2(2m+1)x+5m+3<0$ (2) đúng với mọi $x\in S$.

- $m=0$ ta có (2) $\Leftrightarrow -2x+3<0 \Leftrightarrow x>\frac{3}{2}$ nên (2) không đúng với $\forall x\in S$

- $m\ne 0$ tam thức $f(x)$ có hệ số $a=m$, biệt thức $\Delta'=-m^2+m+1$

Bảng xét dấu

m	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
m		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$-m^2+m+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	

+) $m\ge \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ta có: $\begin{cases} a>0 \\ \Delta'\le 0 \end{cases}$ nên $f(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, suy ra $m\ge \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ không thỏa mãn

+) $m\le \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ta có: $\begin{cases} a<0 \\ \Delta'\le 0 \end{cases}$ nên $f(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=0$, suy ra $m\le \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn.

+) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<m<0$ ta có: $a<0$ và $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt

$x_1=\frac{2m+1+\sqrt{\Delta'}}{m}$, $x_2=\frac{2m+1-\sqrt{\Delta'}}{m}$ $(x_1<x_2)$

Do đó: $f(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<x_1 \\ x>x_2 \end{array}\right.$, suy ra (2) đúng với $\forall x\in S \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1>2 \\ x_2<1 \end{array}\right.$ (*)

Ta có $x_1 = 2 + \frac{1+\sqrt{\Delta'}}{m} < 2$

$x_2 < 1 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta'} < m+1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < 0 \\ \Delta' < m^2 + 2m + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < 0 \\ 2m^2 + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < 0 \\ \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < -\frac{1}{2}$.

Suy ra (*) $\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < -\frac{1}{2}$

+) $0 < m < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ta có: $a < 0$ và $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt

$x_1 = \frac{2m+1+\sqrt{\Delta'}}{m}$, $x_2 = \frac{2m+1-\sqrt{\Delta'}}{m}$ ($x_1 > x_2$)

Suy ra $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (x_2; x_1)$

Do đó (2) đúng với $\forall x \in S \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 < 1 \\ x_1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\Delta'} + m + 1 < 0 \\ \sqrt{\Delta'} + 1 > 0 \end{cases}$ (**)

Vì $m > 0$ nên (**) vô nghiệm.

Từ đó, ta thấy (2) đúng với $\forall x \in S \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$.

Vậy $m \geq -\frac{1}{2}$ là những giá trị cần tìm.

3. Bài tập luyện tập

Bài 4.97: Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} -x^2 + 4x - 7 < 0 \\ x^2 - 2x - 1 \geq 0 \end{cases}$

A. $T = \left(-\infty; 1-\sqrt{2}\right]$

B. $T = \left[1+\sqrt{2}; +\infty\right)$

C. $T = \left(-\infty; 1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2}; +\infty\right)$

D. $T = \left(1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\right)$

b) $\begin{cases} x^2+x+5<0 \\ x^2-6x+1>0 \end{cases}$

A. $S=\mathbb{R}$ **B.** $S=\varnothing$ **C.** $S=\left(\dfrac{1}{2};4\right)$ **D.** $S=\{1;2\}$

c) $-4\le \dfrac{x^2-2x-7}{x^2+1}\le 1$

A. $T=[1;+\infty)$ **B.** $T=\left[-4;-\dfrac{3}{5}\right]$ **C.** $T=\left[-4;-\dfrac{3}{5}\right]\cup[1;+\infty)$ **D.** $T=\varnothing$

d) $\dfrac{1}{13}\le \dfrac{x^2-2x-2}{x^2-5x+7}\le 1$

A. $T=(-\infty;-1]\cup\left[\dfrac{11}{4};3\right]$ **B.** $T=\mathbb{R}$ **C.** $T=\left[\dfrac{11}{4};3\right]$ **D.** $T=(-\infty;-1]$

<u>Lời giải:</u>

Bài 4.97: a) $T=\left(-\infty;1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{2};+\infty\right)$ b) Vô nghiệm

c) $-4\le \dfrac{x^2-2x-7}{x^2+1}\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -4\left(x^2+1\right)\le x^2-2x-7 \\ x^2-2x-7\le x^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2-2x-3\ge 0 \\ 2x\ge -8 \end{cases}$

Suy ra tập $T=\left[-4;-\dfrac{3}{5}\right]\cup[1;+\infty)$

d) $T=(-\infty;-1]\cup\left[\dfrac{11}{4};3\right]$

Bài 4.98: Tìm m để bất phương trình $m^2x+m(x+1)-2(x-1)>0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-2;1]$

A. $0<m<\dfrac{3}{2}$ **B.** $0<m$ **C.** $m<\dfrac{3}{2}$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

<u>Lời giải:</u>

Bài 4.98: Đặt $f(x)=\left(m^2+m-2\right)x+m+2$

Bài toán thỏa mãn: $\Leftrightarrow \begin{cases} f(-2)>0 \\ f(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2+m-2)(-2)+m+2>0 \\ (m^2+m-2)(1)+m+2>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 - m + 6 > 0 \\ m^2 + 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < \dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \dfrac{3}{2}$$

Bài 4.99: Cho $\begin{cases} x^2 - (1+2m)x + 2m \le 0 \\ x^2 + (2+m)x + 2m \le 0 \end{cases}$ khẳng định nào sai?

A. $m \le -1 : S = [-2;1]$,

B. $-1 < m < 0 : S = [2a; -a]$

C. $m = 0 : S = \{0\}$

D. $m > 0 : S = \{1\}$

Lời giải:

Bài 4.99: $m \le -1 : S = [-2;1]$, $-1 < m < 0 : S = [2a; -a]$, $m = 0 : S = \{0\}$, $m > 0 : S = \varnothing$

Bài 4.100: Tìm m để bất phương trình $2x^2 - (2m+1)x + m^2 - 2m + 2 \le 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$.

A. $2 \le m \le \dfrac{21 + 2\sqrt{34}}{10}$

B. $m \le \dfrac{21 + 2\sqrt{34}}{10}$

C. $2 \le m$

D. $\left[\begin{array}{l} m < 2 \\ m > \dfrac{21 + 2\sqrt{34}}{10} \end{array}\right.$

Lời giải:

Bài 4.100: Đặt $f(x) = 2x^2 - (2m+1)x + m^2 - 2m + 2$, có $\Delta = -4m^2 + 20m - 15$

• $\Delta \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le \dfrac{5 - \sqrt{10}}{2} \\ m \ge \dfrac{5 + \sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$, suy ra $f(x) \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên trường hợp này không thỏa yêu cầu bài toán.

• $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in \left(\dfrac{5 - \sqrt{10}}{2}; \dfrac{5 + \sqrt{10}}{2} \right)$, khi đó $f(x)$ có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{2m + 1 - \sqrt{\Delta}}{4}, x_2 = \frac{2m + 1 + \sqrt{\Delta}}{4} \ (x_1 < x_2)$$

Và $f(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in [x_1; x_2]$.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \le \dfrac{1}{2} \\ x_2 \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 \le 2\sqrt{\Delta} \\ 7-2m \le \sqrt{\Delta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 \le 4\Delta \\ (7-2m)^2 \le \Delta \\ \dfrac{1}{2} \le m \le \dfrac{7}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 20m^2 - 84m + 61 \le 0 \\ m^2 - 6m + 8 \le 0 \\ \dfrac{1}{2} \le m \le \dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le m \le \dfrac{21+2\sqrt{34}}{10}$

Vậy $2 \le m \le \dfrac{21+2\sqrt{34}}{10}$ là những giá trị cần tìm.

Bài 4.101: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0\,(1)$

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x \ge 1$.

A. $m \in [2;+\infty)$ **B.** $m \in [3;+\infty)$ **C.** $m \in [4;+\infty)$ **D.** $m \in [1;+\infty)$

b) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x \le 1$.

A. $m \in (1;2)$ **B.** $m \in (-\infty;1)$ **C.** $m \in (2;+\infty)$ **D.** $m \in [1;2]$

c) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x_1 < 1 < x_2$.

A. $1 < m$ **B.** $m < 2$ **C.** $1 < m < 2$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 2 \end{array}\right.$

d) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x_1 < x_2 < 1$.

A. $1 < m$ **B.** $m < 2$ **C.** $1 < m < 2$ **D.**không tồn tại m

<u>Lời giải:</u>

Bài 4.101: Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$, thay vào pt (1) ta được phương trình:
$t^2 + 2(1-m)t + m^2 - 3m + 2 = 0\ (2)$

a) Để phương trình (1) có nghiệm $x \ge 1 \Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t \ge 0$

TH1: Phương trình (2) có nghiệm $t_1 \le 0 \le t_2 \Leftrightarrow P \le 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le m \le 2$.

TH2: Phương trình (2) có nghiệm : $0 \le t_1 \le t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ P \ge 0 \\ S \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \ge 0 \\ m^2-3m+2 \ge 0 \\ m-1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 2 \\ m \le 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m \ge 2 \end{array}\right.$

Kết luận: với $m \in [1;+\infty)$ thì phương trình (1) có nghiệm $x \ge 1$.

b) Để phương trình (1) có nghiệm $x \le 1 \Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t \le 0$

TH1: Phương trình (2) có nghiệm $t_1 \le 0 \le t_2 \Leftrightarrow P \le 0 \Leftrightarrow m^2-3m+2 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le m \le 2$.

TH2: Phương trình (2) có nghiệm $t_1 \le t_2 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ P \ge 0 \\ S \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \ge 0 \\ m^2-3m+2 \ge 0 \\ m-1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$

Kết luận: với $m \in [1;2]$ thì phương trình (1) có nghiệm $x \le 1$.

c) Phương trình (1) có 2 nghiệm thỏa $x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm:

$t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow m^2-3m+2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$.

Kết luận: với $1 < m < 2$ thì phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 < 1 < x_2$

d) Phương trình (1) có 2 nghiệm thỏa $x_1 < x_2 < 1 \Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm:

$$t_1 < t_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ m^2-3m+2 > 0 \\ m-1 < 0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

Kết luận: không tồn tại m để phương trình (1) có nghiệm $x_1 < x_2 < 1$.

➢ DẠNG TOÁN 3: GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH TÍCH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU THỨC.

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình :

a) $(1-2x)(x^2-x-1) > 0$

A. $S = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$ **B.** $S = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1}{2}\right)$ **C.** $S = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$ **D.** $S = \left(\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

b) $x^4-5x^2+2x+3 \le 0$

A. $S=\left[\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2};\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$

B. $S=\left[\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

C. $S=\left[\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2};\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

D. $S=\varnothing$

<u>Lời giải:</u>

a) Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2-x-1		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
VT		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$S=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$$

b) Bất phương trình $(x^4-4x^2+4)-(x^2-2x+1)\le 0$

$\Leftrightarrow (x^2-2)^2-(x-1)^2\le 0 \;\Leftrightarrow (x^2+x-3)(x^2-x-1)\le 0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2+x-3		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2-x-1		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$S=\left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Ví dụ 2: Giải các bất phương trình :

a) $\dfrac{x^2-1}{\left(x^2-3\right)\left(-3x^2+2x+8\right)}>0$

A. $S=\left(-\sqrt{3};-\dfrac{4}{3}\right)\cup(-1;1)$ **B.** $S=\left(-\sqrt{3};-\dfrac{4}{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};2\right)$

C. $S=(-1;1)\cup\left(\sqrt{3};2\right)$ **D.** $S=\left(-\sqrt{3};-\dfrac{4}{3}\right)\cup(-1;1)\cup\left(\sqrt{3};2\right)$

b) $x^2+10\le\dfrac{2x^2+1}{x^2-8}$

A. $S=(2\sqrt{2};3]$ **B.** $S=[-3;-2\sqrt{2})$ **C.** $S=[-3;-2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2};3]$ **D.** $S=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\sqrt{8}\right\}$

<u>Lời giải:</u>

a) Bảng xét dấu

x	$-\infty$ $\quad -\sqrt{3}$ $\quad -\dfrac{4}{3}$ $\quad -1$ $\quad 1$ $\quad \sqrt{3}$ $\quad 2$ $\quad +\infty$
x^2-1	$+ \quad \vert \quad + \quad \vert \quad + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad + \quad \vert \quad + \quad \vert \quad +$
x^2-3	$+ \quad 0 \quad - \quad \vert \quad - \quad \vert \quad - \quad \vert \quad - \quad 0 \quad + \quad \vert \quad +$
$-3x^2+2x+8$	$- \quad \vert \quad - \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad \vert \quad + \quad \vert \quad + \quad 0 \quad -$
VT	$- \quad \Vert \quad + \quad \Vert \quad - \quad 0 \quad + \quad 0 \quad - \quad \Vert \quad + \quad \Vert \quad -$

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$S=\left(-\sqrt{3};-\frac{4}{3}\right)\cup(-1;1)\cup\left(\sqrt{3};2\right)$$

b) Ta có $x^2+10\le\dfrac{2x^2+1}{x^2-8}\Leftrightarrow\dfrac{2x^2+1}{x^2-8}-\left(x^2+10\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow\dfrac{2x^2+1-\left(x^2-8\right)\left(x^2+10\right)}{x^2-8}\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{81-x^4}{x^2-8}\ge 0$

$\Leftrightarrow\dfrac{\left(9-x^2\right)\left(9+x^2\right)}{x^2-8}\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{9-x^2}{x^2-8}\ge 0$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$ $\quad -3$ $\quad -2\sqrt{2}$ $\quad 2\sqrt{2}$ $\quad 3$ $\quad +\infty$
$9-x^2$	$- \quad 0 \quad + \quad \vert \quad + \quad \vert \quad + \quad 0 \quad -$
x^2-8	$+ \quad \vert \quad + \quad 0 \quad - \quad \vert \quad + \quad \vert \quad +$
VT	$- \quad 0 \quad + \quad \Vert \quad - \quad \Vert \quad + \quad 0 \quad -$

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$S=[-3;-2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2};3]$

Ví dụ 3: Giải bất phương trình sau

a) $\dfrac{\left|x^2-x\right|-2}{x^2-x-1}\ge 0$

A. $S=(-\infty;-1]\cup\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$;

B. $S=(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$

C. $S=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup[2;+\infty)$;

D. $S=(-\infty;-1]\cup\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup[2;+\infty)$

b) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{x^2+\sqrt{3}x-6}\le 0$

A. $S=\left[-1;0\right]$

B. $S=[1;\sqrt{3})$

C. $S=\left[-1;0\right]\cup[1;\sqrt{3})$

D. $S=\varnothing$

Lời giải:

a) Vì $\left|x^2-x\right|+2>0$ nên

$$\frac{\left|x^2-x\right|-2}{x^2-x-1}\ge 0\Leftrightarrow\frac{\left(\left|x^2-x\right|-2\right)\left(\left|x^2-x\right|+2\right)}{x^2-x-1}\ge 0\Leftrightarrow\frac{\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-x+2\right)}{x^2-x-1}\ge 0$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	−	|	−	|	−	0	+	
x^2-x+2		+	|	+	|	+	|	+	|	+	
x^2-x-1		+	|	+	||	−	||	+	0	+	
$\frac{\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-x+2\right)}{x^2-x-1}$		+	0	−	||	+	||	−	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S=(-\infty;-1]\cup\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup[2;+\infty)$$

b) ĐKXĐ: $\begin{cases}x+1\ge 0\\ x^2+\sqrt{3}x-6\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ x\ne\sqrt{3}\\ x\ne -2\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ x\ne\sqrt{3}\end{cases}$

Vì $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}>0$ nên

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{x^2+\sqrt{3}x-6}\le 0 \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}{x^2+\sqrt{3}x-6}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x}{x^2+\sqrt{3}x-6}\le 0$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$ $\quad -2\sqrt{3} \quad 0 \quad 1 \quad \sqrt{3} \quad +\infty$
x^2-x	$+ \quad 0 \quad + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad + \quad \mid \quad +$
$x^2+\sqrt{3}x-6$	$+ \quad 0 \quad - \quad \mid \quad - \quad \mid \quad - \quad 0 \quad +$
$\frac{x^2-x}{x^2+\sqrt{3}x-6}$	$+ \quad \Vert \quad - \quad 0 \quad + \quad 0 \quad - \quad \Vert \quad +$

Dựa vào bảng xét dấu và đối chiếu điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S=\left[-1;0\right]\cup[1;\sqrt{3})$$

Nhận xét: Ở câu b chúng ta phải đặt điều kiện thì khi đó các phép biến đổi trên mới đảm bảo là phép biến đổi tương đươc.

Ví dụ 4: Tìm m để bất phương trình $\sqrt{x-m^2-m}\left(3-\frac{x+1}{x^3-x^2-3x+3}\right)<0\ (*)$ có nghiệm .

A. $-2<m$ **B.** $m<1$ **C.** $-2<m<1$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>1 \end{array}\right.$

<u>Lời giải:</u>

Ta có $(*)\Leftrightarrow \begin{cases} 3-\frac{x+1}{x^3-x^2-3x+3}>0 \\ x>m^2+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-2)\left(3x^2+3x-4\right)}{(x-1)\left(x^2-3\right)}<0 \\ x>m^2+m \end{cases}$ (**)

Bảng xét dấu

x	$-\infty \quad \frac{-3-\sqrt{57}}{6} \quad -\sqrt{3} \quad \frac{-3+\sqrt{57}}{6} \quad 1 \quad \sqrt{3} \quad 2 \quad +\infty$
$x-1$	$- \quad - \quad - \quad - \quad 0 \quad + \quad + \quad +$
$x-2$	$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad 0 \quad +$
$3x^2+3x-4$	$+ \quad 0 \quad - \quad - \quad 0 \quad + \quad + \quad + \quad +$
x^2-3	$+ \quad + \quad 0 \quad - \quad - \quad - \quad 0 \quad + \quad +$
$\frac{(x-2)\left(3x^2+3x-4\right)}{(x-1)\left(x^2-3\right)}$	

	+ 0 − ‖ + 0 − ‖ + ‖ − 0 +

Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{(x-2)(3x^2+3x-4)}{(x-1)(x^2-3)}<0$ là

$S=\left(\frac{-3-\sqrt{57}}{6};-\sqrt{3}\right)\cup\left(\frac{-3+\sqrt{57}}{6};1\right)\cup\left(\sqrt{3};2\right)$

Do đó bất phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi hệ bất phương trình (**) có nghiệm

$\Leftrightarrow m^2+m<2\Leftrightarrow m^2+m-2<0\Leftrightarrow -2<m<1$

Vậy $-2<m<1$ là giá trị cần tìm.

2. Bài tập luyện tập.

Bài 4.102: Giải các bất phương trình sau

a) $(4-3x)(-2x^2+3x-1)\le 0$

A. $T=(-\infty;\frac{1}{2}]$ **B.** $T=\left[1;\frac{4}{3}\right]$ **C.** $T=(-\infty;\frac{1}{2}]\cup\left[1;\frac{4}{3}\right]$ **D.** $T=\left(\frac{1}{2};1\right)$

b) $x^2+x-\frac{3}{x^2+x-2}\le 0$

A. $T=\left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2};-2\right)$ **B.** $T=\left(1;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$

C. $T=\left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2};-2\right)\cup\left(1;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$ **D.** $T=(-2;1)$

c) $x^4-x^2-2x-1>0$

A. $T=\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ **B.** $T=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$

C. $T=\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$ **D.** $T=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

d) $\frac{(x^2-4)(-3x^2+2x+8)}{x^2-\sqrt{2}x}<0$

A. $T=(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{4}{3};0\right)\cup\left(\sqrt{2};2\right)$ **B.** $T=(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{4}{3};0\right)\cup(2;+\infty)$

C. $T=(-\infty;-2)\cup\left(\sqrt{2};2\right)\cup(2;+\infty)$ **D.** $T=(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{4}{3};0\right)\cup\left(\sqrt{2};2\right)\cup(2;+\infty)$

e) $\frac{1-\left|x^2-2x\right|}{x^2+x-2}\ge 0$

A. $T=\left(-2;1-\sqrt{2}\right]$ **B.** $T=\left[1;1+\sqrt{2}\right]$

C. $T=\left(-2;1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1;1+\sqrt{2}\right]$ **D.** $T=\left(1-\sqrt{2};1\right)$

f) $\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^3+1}}{x^2+x}\le 0$

A. $T=(-1;0)$ **B.** $T=[1;+\infty)$ **C.** $T=(-1;0)\cup[1;+\infty)$ **D.** $T=(0;1)$

<u>Lời giải:</u>

Bài 4.102: a) BXD :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$4-3x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$-2x^2+3x-1$		$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$	
VT		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$T=(-\infty;\frac{1}{2}]\cup\left[1;\frac{4}{3}\right]$

b) Bpt $\Leftrightarrow \frac{(x^2+x)^2-2(x^2+x)-3}{x^2+x-2}\le 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x^2+x+1)(x^2+x-3)}{x^2+x-2}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-3}{x^2+x-2}\le 0 \Rightarrow T=\left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2};-2\right)\cup\left(1;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$

c) $T=\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$

d) $T=(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{4}{3};0\right)\cup\left(\sqrt{2};2\right)\cup(2;+\infty)$

e) $T=\left(-2;1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1;1+\sqrt{2}\right]$

f) $T=(-1;0)\cup[1;+\infty)$

➢ **DẠNG TOÁN 4: ỨNG DỤNG TAM THỨC BẬC HAI, BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI**

TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT.

1. Phương pháp giải.

- Ta đưa bất đẳng thức về một trong các dạng $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\ge 0$, $ax^2+bx+c<0$ hoặc $ax^2+bx+c\le 0$ rồi đi chứng minh(theo thứ tự) $\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$, $\begin{cases} a>0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}$, $\begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a<0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}$.
- Nếu BĐT cần chứng minh có dạng: $A^2\le 4BC$ (hoặc $A^2\le BC$) ta có thể

chứng minh tam thức $f(x)=Bx^2+Ax+C$ (hoặc $f(x)=Bx^2+2Ax+C$)

luôn cùng dấu với B. Khi đó ta sẽ có $\Delta\le 0$.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho hai số thực x, y. Chứng minh rằng $3x^2+5y^2-2x-2xy+1>0$

Lời giải:

Viết bất đẳng thức lại dưới dạng $3x^2-2(y+1)x+5y^2+1>0$

Đặt $f(x)=3x^2-2(y+1)x+5y^2+1$ xem y là tham số khi đó $f\left(x\right)$ là tam thức bậc hai ẩn x có hệ số $a_x=3>0$ và

$\Delta_x'=(y+1)^2-3(5y^2+1)=-14y^2+2y-2$

Xét tam thức $g\left(y\right)=-14y^2+2y-2$ có hệ số $a_y=-14<0$ và $\Delta'_y=-27<0$

Suy ra $\Delta'_x<0$

Do đó $f\left(x\right)<0$ với mọi x, y.

Nhận xét: * Khi gặp bài toán chứng minh BĐT có dạng: $f(a_1,a_2,...,a_n)\ge 0$

$\forall a_1,a_2,...,a_n$ mà $f(a_1,a_2,...,a_n)=g(a_i)$ là một tam thức bậc hai với ẩn a_i có hệ số $a>0$, ta có thể sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai để chứng minh. Khi đó $g(a_i)\ge 0\Leftrightarrow \Delta_{a_i}\le 0$.

Ví dụ 2: Cho x,y,z là số thực. Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2+x^2y^2z^2-4xyz+y^2z^2-2yz+1\ge 0$.

Lời giải

Bất đẳng thức viết lại $\left(1+y^2z^2\right)x^2-4xyz+y^2+z^2+y^2z^2-2yz+1\ge 0$

Đặt $f\left(x\right)=\left(1+y^2z^2\right)x^2-4xyz+y^2+z^2+y^2z^2-2yz+1$, khi đó $f\left(x\right)$ là một tam thức bậc hai ẩn x có hệ số $a=1+y^2z^2>0$ và $\Delta'_x=4y^2z^2-\left(1+y^2z^2\right)\left(y^2+z^2+y^2z^2-2yz+1\right)$

$\Rightarrow \Delta'_x=-(1+y^2-2yz+z^2-2y^2z^2+y^4z^2-2y^3z^3+y^2z^4+y^4z^4)$

Áp dụng BĐT $a^2+b^2\ge 2ab$ ta có

$y^4z^2+y^2z^4\ge 2y^3z^3$, $y^4z^4+1\ge 2y^2z^2$ và $y^2+z^2\ge 2yz$

Cộng vế với vế lại suy ra $\Delta'_x\le 0$

Do đó $f\left(x\right)\ge 0,\ \forall x,y,z$. ĐPCM.

Ví dụ 3: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và x,y,z thỏa mãn: $a^2x+b^2y+c^2z=0$ .Chứng minh rằng: $xy+yz+zx\le 0$.

<u>Lời giải:</u>

* Nếu trong ba số x,y,z có một số bằng 0, chẳng hạn $x=0\Rightarrow b^2y=-c^2z$.

$$\Rightarrow xy+yz+zx=yz=-\frac{c^2}{b^2}z^2\le 0.$$

* $x,y,z\ne 0$.Do $a^2x+b^2y+c^2z=0\Rightarrow x=-\dfrac{b^2y+c^2z}{a^2}$

$$\Rightarrow xy+yz+zx\le 0\ \Leftrightarrow -(y+z)\frac{b^2y+c^2z}{a^2}+yz\le 0$$

$$\Leftrightarrow f(y)=b^2y^2+(b^2+c^2-a^2)yz+c^2z^2\ge 0.$$

Tam thức $f(y)$ có $\Delta_y=\left[(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2\right]z^2$.

Vì $\begin{cases}|b-c|<a\\ b+c>a\end{cases}\Rightarrow -2bc<b^2+c^2-a^2<2bc$

$$\Rightarrow (b^2+c^2-a^2)^2<4c^2b^2\Rightarrow \Delta_y\le 0,\ \forall z\Rightarrow f(y)\ge 0\quad \forall y,z.$$

Ví dụ 4: (BĐT Bunhiacốpski) Cho 2n số $a_1,a_2,..,a_n,b_1,b_2,...,b_n$. Chứng minh rằng :

$$(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2\le (a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2).$$

<u>Lời giải:</u>

* Nếu $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=0\Rightarrow$ BĐT hiển nhiên đúng.

* Nếu $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2>0$. Xét tam thức :

$$f(x)=\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)x+b_1^2+b_2^2+...+b_n^2$$

$$=(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+...+(a_nx-b_n)^2\ge 0\quad \forall x$$

$$\Rightarrow \Delta=(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2-(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)\le 0$$

$\Leftrightarrow (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$

Đẳng thức có $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.104: Tìm tất cả các giá trị của y sao cho BĐT sau đúng với $\forall x, z \in \mathbb{R}$.

$$x^2 + 9y^2 + 5z^2 + 6xy - 4xz - 12yz - 2z + 1 \ge 0.$$

A. $-\frac{2}{3} \le y$ **B.** $y \le 0$ **C.** $-\frac{2}{3} \le y \le 0$ **D.** $\left[\begin{array}{l} y < -\frac{2}{3} \\ y > 0 \end{array}\right.$

<u>Lời giải:</u>

Bài 4.104: BĐT đã cho đúng với $\forall x, z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ tam thức $f(x) \ge 0 \;\; \forall x, z$

(Trong đó $f(x) = x^2 + 2(3y - 2z)x + 9y^2 + 5z^2 - 12yz - 2z + 1$)

$\Leftrightarrow \Delta'_x = (3y - 2z)^2 - (9y^2 + 5z^2 - 12yz - 2z + 1) = -z^2 + 2(3y + 1)z - 1 \le 0 \;\forall z$

$\Leftrightarrow \Delta'_z = (3y + 1)^2 - 1 \le 0 \Leftrightarrow 3y(3y + 2) \le 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \le y \le 0$.

Vậy $-\frac{2}{3} \le y \le 0$ là những giá trị cần tìm.

Bài 4.105: Cho $\mathrm{x, y, z} \ge 0$ thỏa mãn: $xy + yz + zx + xyz = 4$.

Chứng minh rằng : $x + y + z \ge xy + yz + zx$.

<u>Lời giải:</u>

Bài 4.105: Ta giả sử $z = \min\{x, y, z\} \Rightarrow z \le 1$. Từ giả thiết $\Rightarrow x = \frac{4 - yz}{y + z + yz}$

Nên (1) $\Leftrightarrow \frac{4 - yz}{y + z + yz} + y + z \ge (y + z)\frac{4 - yz}{y + z + yz} + yz \Leftrightarrow f(y) = (1 + z - z^2)y^2 + (z^2 + z - 4)y + (z - 2)^2 \ge 0$.

Tam thức $f(y)$ có hệ số $a = 1 + z - z^2 > 0$ (do $z \le 1$) và có biệt thức : $\Delta = z(z - 1)^2(5z - 8) \le 0 \Rightarrow f(y) \ge 0$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ hoặc $(x; y; z) = (2; 2; 0)$ và các hoán vị.

Bài 4.106: Cho các số thực dương *x,y,z*. Chứng minh rằng: $xzy + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \ge 5(x + y + z)$.

<u>Lời giải:</u>

Bài 4.106: Trong ba số x,y,z luôn tồn tại hai số cùng không nhỏ hơn 1 hoặc cùng không lớn hơn 1. Ta giả sử hai số đó là x và y. Khi đó ta có:

$(x-1)(y-1)\geq 0 \Leftrightarrow xy\geq x+y-1 \Rightarrow xyz\geq xz+yz-z$.

$\Rightarrow xyz+2(x^2+y^2+z^2)+8\geq xz+yz-z+2(x^2+y^2+z^2)+8$.

Nên ta chứng minh:

$xz+yz-z+2(x^2+y^2+z^2)+8\geq 5(x+y+z) \Leftrightarrow f(z)=2z^2+(x+y-6)z+2(x^2+y^2)-5(x+y)+8\geq 0$.

Tam thức $f(z)$ có $a=2>0$ và $\Delta_z=-15x^2+2(y+14)x-15y^2+28y-28$

Δ_z là tam thức bậc hai ẩn x, có $a=-15<0$ và $\Delta_x=-224(y-1)^2\leq 0 \Rightarrow \Delta_z\leq 0 \Rightarrow f(z)\geq 0$ (đpcm).
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Bài 4.107: Cho các số thực x, y thỏa mãn bất phương trình $5x^2+5y^2-5x-15y+8\leq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x+3y$.

A.2 **B.3** **C.4** **D.5**

Lời giải:

Bài 4.107: Cho các số thực x, y thỏa mãn bất phương trình $5x^2+5y^2-5x-15y+8\leq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x+3y$.

HD: Do $S=x+3y \Rightarrow x=S-3y$, thay vào giả thiết $5x^2+5y^2-5x-15y+8\leq 0$ và viết theo hệ số của biến y ta thu được

$50y^2-30Sy+5S^2-5S+8\leq 0(*)$

Vì bất đẳng thức trên đúng với mọi y nên ta có $\Delta\geq 0$, tức là

$900S^2-4.50.(5S^2-5S+8)\geq 0$

Biến đổi tương đương ta thu được $-100S^2+1000S-1600\leq 0$

hay $100S^2-1000S+1600\leq 0 \Leftrightarrow 2\leq S\leq 8$

Khi $\mathrm{S}=2$ thay vào (*) được $50y^2-60y+18\leq 0 \Leftrightarrow y=\frac{3}{5}$ nên $x=S-3y=2-\frac{9}{5}=\frac{1}{5}$

Khi $S=8$ thay vào (*) được $50y^2-240y+288\leq 0 \Leftrightarrow y=\frac{12}{5} \Rightarrow x=S-3y=8-\frac{36}{5}=\frac{4}{5}$

$\max S=8, \min S=2$

Bài 4.108: Cho a,b là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2=4a-3b$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=2a+3b$.

A. $\frac{-9+45\sqrt{13}}{18}$ **B.** $\frac{-9+5\sqrt{13}}{18}$ **C.** $\frac{-9+4\sqrt{13}}{18}$ **D.** $\frac{-9+45\sqrt{13}}{8}$

Lời giải:

Bài 4.108: Ta có: $P=2a+3b\Rightarrow b=\dfrac{P-2a}{3}$

Thay vào biểu thức phía trên ta được:

$$a^2+(\frac{P-2a}{3})^2=4a-3(\frac{P-2a}{3})\Leftrightarrow 13a^2-2(27+2P)a+9P+P^2=0$$

Ta cần tìm P để phương trình trên tồn tại a. Tức là ta phải có:

$$\Delta^{i}=-9P^2-9P+729\geq 0\Leftrightarrow \frac{-9-45\sqrt{13}}{18}\leq P\leq \frac{-9+45\sqrt{13}}{18}$$

Bài 4.109: Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=5$ và $x-y+z=3$. Tìm giá trị lớn nhất $P=\dfrac{x+y-2}{z+2}$

A.0 **B.1** **C.2** **D.**3

Lời giải:

Bài 4.109: Từ điều kiện ta có $x^2+y^2=\dfrac{\left(x+y\right)^2+\left(x-y\right)^2}{2}=5-z^2\Rightarrow \left(x+y\right)^2=10-2z^2-\left(3-z\right)^2$

Do đó $\left(x+y\right)^2=1+6z-3z^2$

Dễ thấy $z\neq -2$. Ta có $P\left(z+2\right)+2=x+y$

Do đó $\left[P\left(z+2\right)+2\right]^2=1+6z-3z^2$

$$\Leftrightarrow \left(z+2\right)^2P^2+4\left(z+2\right)P+4=1+6z-3z^2\Leftrightarrow \left(P^2+3\right)z^2+\left(4P^2+4P-6\right)z+4P^2+8P+3=0$$

Phương trình có nghiệm ẩn z khi và chỉ khi $\Delta_z^{'}\geq 0\Leftrightarrow \left(2P^2+2P-3\right)^2-\left(P^2+3\right)\left(4P^2+8P+3\right)\geq 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{36}{23}\leq P\leq 0$$

Ta có $P=0$ khi $x=2,\ y=0,\ z=1$

$P=-\dfrac{36}{23}$ khi $x=\dfrac{20}{31},\ y=-\dfrac{66}{31},\ z=\dfrac{7}{31}$

Bài 4.110: Cho a,b,c là số thực. Chứng minh rằng $2(a+b+c-ab-bc-ca+1)^2+(ab+bc+ca-2)^2\geq 3$

Lời giải:

Bài 4.110: Nếu $\left[\begin{array}{l} ab+bc+ca\le 2-\sqrt{3} \\ ab+bc+ca\ge 2+\sqrt{3} \end{array}\right.$. thì bất đẳng thức dễ dàng được chứng minh.

Xét trường hợp ngược lại $2-\sqrt{3}\le ab+bc+ca\le 2+\sqrt{3}$. Ta đặt $x=a+b+c, y=ab+bc+ca$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$2(x-y+1)^2+(y-2)^2\ge 3\Leftrightarrow 2x^2-4x(y-1)+3y^2-8y+3\ge 0$.

Đặt $f(x)=2x^2-4x(y-1)+3y^2-8y+3$. Ta dễ dàng tính được
$\Delta'_{f(x)}=4(y-1)^2-2(3y^2-8y+3)=-2y^2+8y-2=-2\left[y-(2-\sqrt{3})\right]\left[y-(2+\sqrt{3})\right]\le 0.$

Theo định lí về dấu của tam thức bậc hai thì bài toán được chứng minh.

Bài 4.111: Cho a và b là các số thực thỏa mãn $9a^2+8ab+7b^2\le 6$. Chứng minh rằng $7a+5b+12ab\le 9$.

<u>Lời giải:</u>

Bài 4.111: Xét tam thức bậc hai $f\left(a\right)=9a^2-\left(4b+7\right)a+7b^2-5b+3$ với b là tham số

Ta có $\Delta_f=\left(4b+7\right)^2-36\left(7b^2-5b+3\right)=-59\left(2b-1\right)^2\le 0$

Suy ra $f\left(a\right)\ge 0\Leftrightarrow 9a^2-\left(4b+7\right)a+7b^2-5b+3\ge 0$

$\Leftrightarrow 7a+5b+12ab-9\le 9a^2+8ab+7b^2-6$

Theo giả thiết ta có $9a^2+8ab+7b^2\le 6$ nên $7a+5b+12ab\le 9$.

Bài 4.112: Cho các số thực không âm *x,y,z* thỏa mãn: $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của: $P=9xy+10yz+11zx$.

A. $\max P=\frac{45}{18}$ **B.** $\max P=\frac{49}{148}$ **C.** $\max P=\frac{95}{148}$ **D.** $\max P=\frac{495}{148}$

<u>Lời giải:</u>

Bài 4.112: Để ý rằng, với giả thiết $x+y+z=1$ thì

$P=9xy+10yz+11zx=9xy+z\left(10y+11x\right)=9xy+\left(1-x-y\right)\left(10y+11x\right)$

Khai triển và rút gọn, ta thu được: $P=-11x^2-10y^2+11x+10y-12xy$

Tương đương với $11x^2+(12y-11)x+10y^2-10y+P=0 \quad (*)$

Coi đây là tam thức bậc hai ẩn *x*, do điều kiện tồn tại của *x* nên suy ra (*) phải có nghiệm, tức

$\Delta=(12y-11)^2-44(10y^2-10y+P)\ge 0$

Hay $-296y^2+176y+121-44P\ge 0$. Tương đương $P\le -\frac{74}{11}\left(y^2-\frac{22}{37}y-\frac{121}{296}\right)$

Ta có $y^2-\frac{22}{37}y-\frac{121}{296}\ge -\frac{5445}{10952}$ Suy ra $P\le\left(-\frac{74}{11}\right).\left(-\frac{5445}{10952}\right)=\frac{495}{148}$

Vậy $\max P=\frac{495}{148}$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN.

TỔNG HỢP LẦN 1.

Câu 1. Tập nghiệm củabất phương trình $x^2+4x+4>0$ là:

A. $(2;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Câu 2. Tập nghiệm củabất phương trình $x^2-6x+9>0$ là:

A. $(3;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Câu 3. Tập nghiệm củabất phương trình $x^2+6x+9>0$ là:

A. $(3;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Câu 4. Tập nghiệm củabất phương trình $x^2+2x+1>0$ là:

A. $(1;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 5. Tập nghiệm củabất phương trình $x^2-2x+1>0$ là:

A. $(1;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 6. Tam thức $y=x^2-2x-3$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

A. $x<-3$ hoặc $x>-1$. **B.** $x<-1$ hoặc $x>3$. **C.** $x<-2$ hoặc $x>6$. **D.** $-1<x<3$.

Câu 7. Tam thức $y=x^2-12x-13$ nhận giá trị âm khi và chỉ khi

A. $x<-13$ hoặc $x>1$. **B.** $x<-1$ hoặc $x>13$. **C.** $-13<x<1$. **D.** $-1<x<13$.

Câu 8. Tam thức $y=-x^2-3x-4$ nhận giá trị âm khi và chỉ khi

A. $x<-4$ hoặc $x>-1$. **B.** $x<1$ hoặc $x>4$. **C.** $-4<x<-4$. **D.** $x\in\mathbb{R}$.

Câu 9. Tam thức nào sau đây nhận giá trị âm với mọi $x<2$?

A. $y=x^2-5x+6$. **B.** $y=16-x^2$.

C. $y=x^2-2x+3$. **D.** $y=-x^2+5x-6$.

Câu 10. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2-1>0$ là:

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;+\infty)$.

C. $(-1;1)$. **D.** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Câu 11. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2+x-1>0$ là:

A. $\mathbb{R}$.

B. $\left(-\infty;\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$.

C. $\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

D. $\left(-\infty;-1-\sqrt{5}\right)\cup\left(-1+\sqrt{5};+\infty\right)$.

Câu 12. Tập nghiệm củabất phương trình $x^2-4x+4>0$ là:

A. $(2;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2-4\sqrt{2}x+8<0$ là:

A. $\left(-\infty;2\sqrt{2}\right)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\left\{2\sqrt{2}\right\}$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 14. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2-x-6<0$ là:

A. $(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(-3;2)$.

C. $(-2;3)$. **D.** $(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$.

Câu 15. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2<9$ là:

A. $(-3;3)$. **B.** $(-\infty;-3)$.

C. $(-\infty;3)$. **D.** $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

Câu 16. Tập nghiệm củabất phương trình $x^2-6\sqrt{2}x+18\geq 0$ là:

A. $\left(3\sqrt{2};+\infty\right)$. **B.** $\left[3\sqrt{2};+\infty\right)$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 17. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{6}\leq 0$ là:

A. $\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$. **B.** $\left[\sqrt{2};\sqrt{3}\right]$. **C.** $\left(-\sqrt{3};\sqrt{2}\right)$. **D.** $\left[-\sqrt{3};-\sqrt{2}\right]$.

Câu 18. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng ?

A. Nếu $a^2>0$ thì $a>0$. **B.** Nếu $a^2>a$ thì $a>0$.

C. Nếu $a^2>a$ thì $a<0$. **D.** Nếu $a<0$ thì $a^2>a$.

Câu 19. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{x^2+2x-8}{|x+1|}<0$ là:

A. $(-4;-1)\cup(-1;2)$. **B.** $(-4;-1)$.

C. $(-1;2)$. **D.** $(-2;-1)\cup(-1;1)$.

Câu 20. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{2x^2-3x+1}{|4x-3|}<0$ là

A. $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)\cap\left(\dfrac{3}{4};1\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)\cup\left(\dfrac{3}{4};1\right)$.

C. $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

D. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.

Câu 21. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{8-x^2}$ là

A. $\left(-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$.

B. $\left[-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right]$.

C. $\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2};+\infty\right)$.

D. $\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right]\cup\left[2\sqrt{2};+\infty\right)$.

Câu 22. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{5-4x-x^2}$ là

A. $[-5;1]$.

B. $\left[-\frac{1}{5};1\right]$.

C. $(-\infty;-5]\cup[1;+\infty)$.

D. $\left(-\infty;-\frac{1}{5}\right]\cup[1;+\infty)$.

Câu 23. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{5x^2-4x-1}$ là

A. $\left(-\infty;\frac{1}{5}\right]\cup[1;+\infty)$.

B. $\left[-\frac{1}{5};1\right]$.

C. $\left(-\infty;-\frac{1}{5}\right]\cup[1;+\infty)$.

D. $\left(-\infty;-\frac{1}{5}\right]\cup[1;+\infty)$.

Câu 24. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\frac{2}{x^2+5x-6}}$ là:

A. $(-\infty;-6]\cup[1;+\infty)$.

B. $(-6;1)$.

C. $(-\infty;-6)\cup(1;+\infty)$.

D. $(-\infty;-1)\cup(6;+\infty)$.

Câu 25. Tập nghiệm của bất phương trình $\left|x^2+x+12\right|>x^2+x+12$ là

A. $\varnothing$.

B. $\mathbb{R}$.

C. $(-4;-3)$.

D. $(-\infty;-4)\cup(-3;+\infty)$.

Câu 26. Tập nghiệm của bất phương trình $\left|x^2-x-12\right|>x+12-x^2$ là

A. $(-\infty;-3)\cup(4;+\infty)$.

B. $(-\infty;-4)\cup(3;+\infty)$.

C. $(-6;-2)\cup(-3;4)$.

D. $(-4;3)$.

Câu 27. Biểu thức $\left(m^2+2\right)x^2-2(m-2)x+2$ luôn nhận giá trị dương khi và chỉ khi:

A. $m\le -4$ hoặc $m\ge 0$.

B. $m<-4$ hoặc $m>0$.

C. $-4<m<0$.

D. $m<0$ hoặc $m>4$.

Câu 28. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x^2+x-2}+\frac{1}{\sqrt{x-3}}$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $[3;+\infty)$.

C. $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. **D.** $(1;2)\cup(3;+\infty)$.

Câu 29. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ là

A. $(-3;+\infty)$. **B.** $(-3;1]\cup[2;+\infty)$.

C. $(-3;1]\cup(2;+\infty)$. **D.** $(-3;1)\cup(2;+\infty)$.

Câu 30. Tập nghiệm củabất phương trình $\sqrt{x}-2x<0$ là

A. $\left(\dfrac{1}{4};+\infty\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{4}\right)$.

C. $\left[0;\dfrac{1}{4}\right)$. **D.** $\{0\}\cup\left(\dfrac{1}{4};+\infty\right)$.

Câu 31. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{1}{x}<2$ là

A. $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

C. $(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 32. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2}{m} > -1$ là

A. $(-2;0)$.

B. $(-\infty;-2)$.

C. $(-2;+\infty)$.

D. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right) \cup (1;+\infty)$.

Câu 33. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2+x-1}{1-x} > -x$ là

A. $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

B. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

C. $(1;+\infty)$.

D. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right) \cup (1;+\infty)$.

Câu 34. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x} - 3x \le 0$ là

A. $\left[\frac{1}{9};+\infty\right)$.

B. $\left[0;\frac{1}{9}\right]$.

C. $\{0\} \cup \left[\frac{1}{9};+\infty\right)$.

D. $\{0\} \cup \left[\frac{1}{9};+\infty\right)$.

Câu 35. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{\sqrt{x}} \ge \frac{1}{4}$ là

A. $(0;16]$. **B.** $[0;16]$. **C.** $(0;4]$. **D.** $[16;+\infty)$.

Câu 36. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \ge 3$ là

A. $[1;+\infty)$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(0;1]$.

Câu 37. Phương trình $(m+2)x^2 - 3x + 2m - 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

A. $m < -2$.

B. $-2 < m < \frac{3}{2}$.

C. $m > \frac{3}{2}$.

D. $m < -2$ hoặc $m > \frac{3}{2}$.

Câu 38. Tập nghiệm của phương trình $\left|x^2 - 5x + 6\right| = x^2 - 5x + 6$ là

A. $\{2;3\}$.

B. $(2;3)$.

C. $(-\infty;2) \cup (3;+\infty)$.

D. $(-\infty;2] \cup [3;+\infty)$.

Câu 39. Tập nghiệm của phương trình $\left|x^2 - 7x + 12\right| = 7x - x^2 - 12$ là

A. $\{3;4\}$.   **B.** $(3;4)$.   **C.** $[3;4]$.   **D.** $(-\infty;3]\cup[4;+\infty)$.

Câu 40. Tập nghiệm của phương trình $\frac{|x^2-7x+10|}{\sqrt{x-3}}=\frac{x^2-7x+10}{\sqrt{x-3}}$ là

A. $[5;+\infty)$.   **B.** $(3;5]$.   **C.** $[2;5]$.   **D.** $(5;+\infty)$.

Câu 41. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{|x^2-8x+12|}{\sqrt{5-x}}>\frac{x^2-8x+12}{\sqrt{5-x}}$ là

A. $(2;6)$.   **B.** $(2;5)$.   **C.** $(-6;-2)$.   **D.** $(5;6)$.

Câu 42. Nếu $2<m<8$ thì số nghiệm của phương trình $x^2-mx+2m-3=0$ là

A. 0.   **B.** 1.   **C.** 2.   **D.** Chưa xác định được.

Câu 43. Phương trình $(m+1)x^2-x-3m+4=0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

A. $m<-1$ hoặc $m>\frac{4}{3}$.   **B.** $m<-1$ hoặc $m>\frac{3}{4}$.

C. $m>\frac{4}{3}$.   **D.** $-1<m<\frac{4}{3}$.

Câu 44. Phương trình $x^2-mx-2m=0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m\le -2$ hoặc $m\ge 0$.   **B.** $m\le 0$ hoặc $m\ge 8$.

C. $-8\le m\le 0$.   **D.** $m\le -8$ hoặc $m\ge 0$.

Câu 45. Phương trình $x^2-mx+m^2+m=0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $0\le m\le\frac{4}{3}$.   **B.** $-\frac{4}{3}\le m\le 0$.   **C.** $-\frac{1}{3}\le m\le 0$.   **D.** $0\le m\le\frac{1}{3}$.

Câu 46. Số nào sau đây là nghiệm của phương trình $\frac{|2-x|}{\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{2x+2}{\sqrt{x^2-x+1}}$

A. 0.   **B.** –4.   **C.** 4.   **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 47. Phương trình $mx^2-2mx+1=0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m<0$ hoặc $m\ge 1$.   **B.** $m<0$ hoặc $m\ge 4$.

C. $m\le 0$ hoặc $m\ge 1$.   **D.** $0<m\le 1$.

Câu 48. Phương trình $x^2-2(m+2)x+m^2-m-6=0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

A. $m<-2$.   **B.** $-3<m<2$.   **C.** $m>-2$.   **D.** $-2<m<3$.

Câu 49. Phương trình $x^2-4mx+m+3=0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m<1$.   **B.** $-\frac{3}{4}<m<1$.   **C.** $m\le\frac{-3}{4}$ hoặc $m\ge 1$.   **D.** $-\frac{3}{4}\le m\le 1$.

Câu 50. Phương trình $x^2-(m+1)x+1=0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m>1$. **B.** $-3<m<1$.

C. $m\le -3$ hoặc $m\ge 1$. **D.** $-3\le m\le 1$.

Câu 51. Phương trình $x^2-mx-m=0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $-1<m<0$. **B.** $-4\le m\le 0$.

C. $-4<m<0$. **D.** $m<-4$ hoặc $m>0$.

Câu 52. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x+m\le 0 & (1) \\ x^2-x+4<x^2-1 & (2) \end{cases}$

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m<-5$. **B.** $m>-5$. **C.** $m>5$. **D.** $m<5$.

Câu 53. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x^2-x+1}+\dfrac{1}{x+4}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{4\}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{-4\}$. **D.** $(-4;+\infty)$.

Câu 54. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{4x-3}+\sqrt{x^2+5x-6}$ là

A. $[1;+\infty)$. **B.** $\left[\dfrac{3}{4};+\infty\right)$. **C.** $\left[\dfrac{3}{4};1\right]$. **D.** $\left[-\dfrac{6}{5};\dfrac{3}{4}\right]$.

Câu 55. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{2x-3}$ là

A. $[1;+\infty)$. **B.** $[-2;1]\cup\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Câu 56. Phương trình $x^2-2(m-2)x+m^2-m-6=0$ có hai nghiệm đối nhau khi và chỉ khi

A. $m=2$. **B.** $-3<m<2$.

C. $m<-2$ hoặc $m>3$. **D.** $-2<m<3$.

Câu 57. Hai phương trình $x^2+x+m+1=0$ và $x^2+(m+1)x+1=0$ cùng vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $0<m<1$. **B.** $\dfrac{-3}{4}<m<1$.

C. $m<\dfrac{-3}{4}$ hoặc $m>1$. **D.** $\dfrac{-5}{4}<m<1$.

Câu 58. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{1}{x-3}\ge\dfrac{1}{x+3}$ là

A. $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$.

C. $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

Câu 59. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x^2+x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$ là

A. $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$. **B.** $\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Câu 60. Các giá trị của m để phương trình $3x^2+(3m-1)x+m^2-4=0$ có hai nghiệm trái dấu là

A. $m<4$. **B.** $-2<m<2$.

C. $m<2$. **D.** $m<-2$ hoặc $m>2$.

Câu 61. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\frac{x^2-1}{1-x}}$ là

A. $(-\infty;-1]$. **B.** $[-1;\infty)\setminus\{1\}$. **C.** $(-\infty;-1]\cup(1;\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Câu 62. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2x^2-3x+4}{x^2+2}>1$ là:

A. $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup(-1;+\infty)$.

C. $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$.

Câu 63. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $\frac{(m-1)x}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{(m+2)x-2m+1}{\sqrt{4-x^2}}$ có nghiệm là

A. $\left(\frac{-7}{2};\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{-5}{2};\frac{7}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 64. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $\sqrt{x-1}+\frac{x-m}{\sqrt{x-1}}=\frac{2m}{\sqrt{x-1}}$ có nghiệm là

A. $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Câu 65. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\frac{x^2+3}{1-|x|}}$ là

A. $(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{1;-1\}$. **D.** $[-1;1]$.

Câu 66. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $m^2(x-1)=-2x-5m+6$ có nghiệm dương là

A. $(-\infty;-1)\cup(-6;\infty)$. **B.** $(-1;6)$. **C.** $(-\infty;2)\cup(3;\infty)$. **D.** $(2;3)$.

Câu 67. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{5-2m}{\sqrt{1-x^2}}$ có nghiệm là

A. $(2;3)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $[2;3]$. **D.** $(-1;1)$.

Câu 68. Cho biểu thức $M=x^2+3x+2$, trong đó x là nghiệm của bất phương trình $x^2-3x+2<0$. Khi đó

A. $M<0$. **B.** $6<M<12$.

C. $M>12$. **D.** M nhận giá trị bất kì.

Câu 69. Số dương x thoả mãn bất phương trình $\sqrt{x}<3x$ khi và chỉ khi

A. $x>9.$ **B.** $x>\frac{1}{3}\cdot$ **C.** $x<\frac{1}{9}\cdot$ **D.** $x>\frac{1}{9}\cdot$

Câu 70. Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình bậc hai $x^2+2(m+1)x+3m=0$ có nghiệm là

A. $\{0\}\cdot$ **B.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}\cdot$ **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $\varnothing\cdot$

Câu 71. Phương trình $mx^2-mx+2=0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m\le 0$ hoặc $m\ge 8\cdot$ **B.** $m<0$ hoặc $m\ge 8\cdot$

C. $0<m\le 8\cdot$ **D.** $0\le m\le 8\cdot$

Câu 72. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x+1}<2x-1$ là.

A. $\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$ **B.** $\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$ **C.** $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$ **D.** $\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$

Câu 73. Nếu $1<m<3$ thì số nghiệm của phương trình $x^2-2mx+4m-3=0$ là bao nhiêu.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Chưa xác định được

Câu 74. Nếu $1<m<2$ thì số nghiệm của phương trình $x^2-2mx+5m-6=0$ là bao nhiêu.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Chưa xác định được

Câu 75. Bất phương trình: $mx^2-mx+3>0$ với mọi x khi và chỉ khi.

A. $m\le 0$ hoặc $m>12$ **B.** $m<0$ hoặc $m>12$

C. $0\le m<12$ **D.** $0<m<12$

Câu 76. Tam thức $f(x)=2mx^2-2mx-1$ nhận giá trị âm với mọi x khi và chỉ khi.

A. $m\le 2$ hoặc $m>0$ **B.** $m<-2$ hoặc $m\ge 0$

C. $-2<m<0$ **D.** $-2<m\le 0$

Câu 77. Bất phương trình $x^2-x+\frac{1}{4}\le 0$ có tập nghiệm là.

A. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ **B.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ **C.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ **D.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

TỔNG HỢP LẦN 2.

Câu 1. Cho tam thức bậc hai $f(x)=x^2-bx+3$. Với giá trị nào của b thì tam thức $f(x)$ có hai nghiệm?

A. $b\in\left[-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right]$. **B.** $b\in\left(-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$.

C. $b\in\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left[2\sqrt{3};+\infty\right)$. **D.** $b\in\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3};+\infty\right)$.

Câu 2. Giá trị nào của m thì phương trình $x^2-mx+1-3m=0$ có 2 nghiệm trái dấu?

A. $m>\frac{1}{3}$. **B.** $m<\frac{1}{3}$. **C.** $m>2$. **D.** $m<2$.

Câu 3. Gía trị nào của m thì phương trình $(m-1)x^2-2(m-2)x+m-3=0$ có 2 nghiệm trái dấu?

A. $m<1$. **B.** $m>2$. **C.** $m>3$. **D.** $1<m<3$.

Câu 4. Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2+(m+3)x-(m+1)=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt?

A. $m\in\left(-\infty;\frac{-3}{5}\right)\cup(1;+\infty)\setminus\{3\}$. **B.** $m\in\left(\frac{-3}{5};1\right)$.

C. $m\in\left(\frac{-3}{5};+\infty\right)$. $ax^2-x+a\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ **D.** $m\in\mathbb{R}\setminus\ 3\ $.

Câu 5. Tìm m để $m+1\ x^2+mx+m<0,\forall x\in\mathbb{R}$?

A. $m<-1$. **B.** $m>-1$. **C.** $m<\frac{-4}{3}$. **D.** $m>\frac{4}{3}$.

Câu 6. Tìm m để $f(x)=x^2-2\ 2m-3\ x+4m-3>0,\forall x\in\mathbb{R}$?

A. $m>\frac{3}{2}$. **B.** $m>\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}<m<\frac{3}{2}$. **D.** $1<m<3$.

Câu 7. Với giá trị nào của a thì bất phương trình ?

A. $a=0$. **B.** $a<0$. **C.** $0<a\leq\frac{1}{2}$. **D.** $a\geq\frac{1}{2}$.

Câu 8. Với giá trị nào của m thì bất phương trình $x^2-x+m\leq 0$ vô nghiệm?

A. $m<1$. **B.** $m>1$. **C.** $m<\frac{1}{4}$. **D.** $m>\frac{1}{4}$.

Câu 9. Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{2x^2-5x+2}$

A. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$. **B.** $[2;+\infty)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty)$. **D.** $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Câu 10. Với giá trị nào của m thì phương trình $(m-1)x^2-2(m-2)x+m-3=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 và $x_1+x_2+x_1x_2<1$?

A. $1<m<2$. **B.** $1<m<3$. **C.** $m>2$. **D.** $m>3$.

Câu 11. Gọi x_1,x_2 là nghiệm phân biệt của phương trình $x^2-5x+6=0$. Khẳng định nào sau đúng?

A. $x_1+x_2=-5$. **B.** $x_1{}^2+x_2{}^2=37$. **C.** $x_1x_2=6$. **D.** $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{13}{6}=0$.

Câu 12. Các giá trị m làm cho biểu thức $x^2+4x+m-5$ luôn luôn dương là:

A. $m<9$. **B.** $m\geq 9$. **C.** $m>9$. **D.** $m\in\varnothing$.

Câu 13. Các giá trị m để tam thức $f(x)=x^2-(m+2)x+8m+1$ đổi dấu 2 lần là

A. $m\leq 0$ hoặc $m\geq 28$. **B.** $m<0$ hoặc $m>28$. **C.** $0<m<28$.
D. $m>0$.

Câu 14. Tập xác định của hàm số $f(x)=\sqrt{2x^2-7x-15}$ là

A. $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\ 5;+\infty\ $. **B.** $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[5;+\infty\ \right.$.

C. $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left[5;+\infty\ \right.$. **D.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]\cup\left[5;+\infty\ \right.$.

Câu 15. Dấu của tam thức bậc 2: $f(x)=-x^2+5x-6$ được xác định như sau

A. $f(x)<0$ với $2<x<3$ và $f(x)>0$ với $x<2$ hoặc $x>3$.

B. $f(x)<0$ với $-3<x<-2$ và $f(x)>0$ với $x<-3$ hoặc $x>-2$.

C. $f(x)>0$ với $2<x<3$ và $f(x)<0$ với $x<2$ hoặc $x>3$.

D. $f(x)>0$ với $-3<x<-2$ và $f(x)<0$ với $x<-3$ hoặc $x>-2$.

Câu 16. Giá trị của m làm cho phương trình $(m-2)x^2-2mx+m+3=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt là:

A. $m<6$ và $m\neq 2$. **B.** $m<0$ hoặc $2<m<6$.

C. $2<m<6$. **D.** $m>6$.

Câu 17. Cho $f(x)=mx^2-2x-1$. Xác định m để $f(x)<0$ với $x\in\mathbb{R}$.

A. $m<-1$. **B.** $m<0$. **C.** $-1<m<0$. **D.** $m<1$ và $m\neq 0$.

Câu 18. Xác định m để phương trình $(m-3)x^3+(4m-5)x^2+(5m+4)x+2m+4=0$ có ba nghiệm phân biệt bé hơn 1.

A. $-\frac{25}{8}<m<0$ hoặc $m>3$ và $m\neq 12$. **B.** $-\frac{25}{8}<m<0$ hoặc $m>3$ và $m\neq 4$.

C. $m\in\varnothing$. **D.** $0<m<\frac{5}{4}$.

Câu 19. Cho phương trình $(m-5)x^2+(m-1)x+m=0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa $x_1<2<x_2$.

A. $m<\frac{22}{7}$. **B.** $\frac{22}{7}<m<5$. **C.** $m\geq 5$. **D.** $\frac{22}{7}\leq m\leq 5$.

Câu 20. Cho phương trình $x^2-2x-m=0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm $x_1<x_2<2$.

A. $m>0$. **B.** $m<-1$. **C.** $-1<m<0$. **D.** $m>-\frac{1}{4}$.

Câu 21. Cho $f(x)=-2x^2+(m-2)x-m+4$. Tìm m để $f(x)$ không dương với mọi x.

A. $m\in\varnothing$. **B.** $m\in\mathbb{R}\setminus\ 6\ $. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $m=6$.

Câu 22. Xác định m để phương trình $(x-1)\left[x^2+2(m+3)x+4m+12\right]=0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn -1.

A. $m<-\frac{7}{2}$.
B. $-2<m<1$ và $m\neq-\frac{16}{9}$.
C. $-\frac{7}{2}<m<-1$ và $m\neq-\frac{16}{9}$.
D. $-\frac{7}{2}<m<-3$ và $m\neq-\frac{19}{6}$.

Câu 23. Phương trình $(m+1)x^2-2(m-1)x+m^2+4m-5=0$ có đúng hai nghiệm x_1,x_2 thoả $2<x_1<x_2$. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau

A. $-2<m<-1$.
B. $m>1$.
C. $-5<m<-3$.
D. $-2<m<1$.

Câu 24. Cho bất phương trình $(2m+1)x^2+3(m+1)x+m+1>0$ (1). Với giá trị nào của m thì bất phương trình trên vô nghiệm.

A. $m\neq-\frac{1}{2}$.
B. $-5<m<-1$.
C. $-5\leq m\leq-1$.
D. $m\in\varnothing$.

Câu 25. Cho phương trình $mx^2-2(m+1)x+m+5=0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm x_1,x_2 thoả $x_1<0<x_2<2$.

A. $-5<m<-1$.
B. $-1<m<5$.
C. $m<-5$ hoặc $m>1$.
D. $m>-1$ và $m\neq0$.

Câu 26. Cho $f(x)=-2x^2+(m+2)x+m-4$. Tìm m để $f(x)$ âm với mọi x.

A. $-14<m<2$.
B. $-14\leq m\leq2$.
C. $-2<m<14$.
D. $m<-14$ hoặc $m>2$.

Câu 27. Tìm m để phương trình $x^2-2(m+2)x+m+2=0$ có một nghiệm thuộc khoảng $1;2$ và nghiệm kia nhỏ hơn 1.

A. $m=0$.
B. $m<-1$ hoặc $m>-\frac{2}{3}$.
C. $m>-\frac{2}{3}$.
D. $-1<m<-\frac{2}{3}$.

Câu 28. Cho $f(x)=3x^2+2(2m-1)x+m+4$. Tìm m để $f(x)$ âm với mọi x.

A. $m<-1$ hoặc $m>\frac{11}{4}$.
B. $-1<m<\frac{11}{4}$.
C. $-\frac{11}{4}<m<1$.
D. $-1\leq m\leq\frac{11}{4}$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	A	D	A	C	D	C	D	C	B	C	C	B	B	C	C	A	A	B	C

21	22	23	24	25	26	27	28												
D	D	A	C	A	A	D	B												