ĐỀ SỐ 12

Câu 1. Một tổ có 10 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 2 học sinh từ tổ đó để giữ hai chức vụ tổ trưởng và tổ phó.

A. A_{10}^2. **B.** C_{10}^2. **C.** A_{10}^8. **D.** 10^2.

Câu 2. Cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1=3$, công sai $d=5$, số hạng thứ tư là

A. $u_4=23$. **B.** $u_4=18$. **C.** $u_4=8$. **D.** $u_4=14$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Cho các mệnh đề sau:

I. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-3;-2)$.

II. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

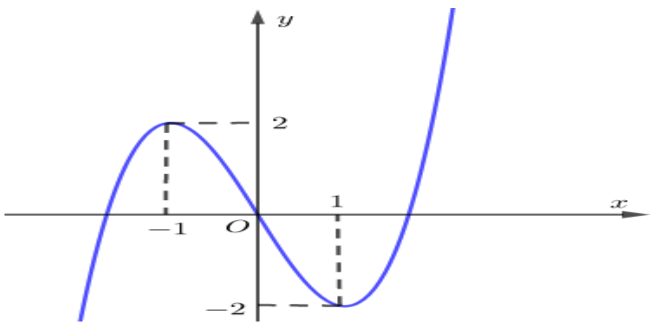
III. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

IV. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;5)$.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 4. Cho hàm số đa thức bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=-2$.

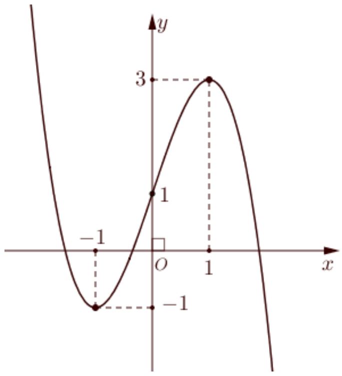
Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=(x-1)(x-2)^2(x+3)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 6. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3-2x}{x+1}$ là

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $y=3$. **D.** $y=-2$.

Câu 7. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=x^3-3x+1$. **B.** $y=-x^3+3x+1$.

C. $y=x^2-2x+1$. **D.** $y=-x^4+2x^2$.

Câu 8. Đường thẳng $y=-3x$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2-2$ tại điểm có tọa độ $(x_0;y_0)$ thì

A. $y_0=3$. **B.** $y_0=-3$. **C.** $y_0=1$. **D.** $y_0=-2$.

Câu 9. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^7}.a^{\frac{11}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-5}}}$ với $a>0$ ta được kết quả $A=a^{\frac{m}{n}}$ trong đó $m,n\in N^*$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m^2-n^2=312$. **B.** $m^2+n^2=543$.

C. $m^2-n^2=-312$. **D.** $m^2+n^2=409$.

Câu 10. Hàm số $y=3^{x^2-x}$ có đạo hàm là

A. $(2x-1).3^{x^2-x}.\ln 3$. **B.** $(2x-1).3^{x^2-x}$.

C. $3^{x^2-x}.\ln 3$. **D.** $(x^2-x).3^{x^2-x-1}$.

Câu 11. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x^2-2x+1\right)^{\frac{1}{3}}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **B.** $D=(0;+\infty)$. **C.** $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=(1;+\infty)$.

Câu 12. Nghiệm của phương trình $3^{x-1}=27$ là

A. $x=4$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

Câu 13. Cho phương trình $\log_3^2(3x)-\log_3^2 x^2-1=0$. Biết phương trình có 2 nghiệm, tính tích P của hai nghiệm đó.

A. $P=9$. **B.** $P=\dfrac{2}{3}$. **C.** $P=\sqrt[3]{9}$. **D.** $P=1$.

Câu 14. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai?**

A. $\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}+c$, $(x\neq 0)$. **B.** $\int x^n\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $(n\in\mathbb{N}^*)$.

C. $\int (a^x.\ln a)\mathrm{d}x=a^x+C$, $(a>0)$. **D.** $\int \sin x\mathrm{d}x=\cos x+C$.

Câu 15. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x+2)^2}$ trên khoảng $(-2;+\infty)$ là

A. $2\ln(x+2)+\dfrac{3}{x+2}+C$. **B.** $2\ln(x+2)+\dfrac{1}{x+2}+C$.

C. $2\ln(x+2)-\dfrac{1}{x+2}+C$. **D.** $2\ln(x+2)-\dfrac{3}{x+2}+C$.

Câu 16. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2 2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $u=x^2-1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=\int\limits_0^3\sqrt{u}\mathrm{d}u$ **B.** $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^2\sqrt{u}\mathrm{d}u$ **C.** $I=2\int\limits_0^3\sqrt{u}\mathrm{d}u$ **D.** $I=\int\limits_1^2\sqrt{u}\mathrm{d}u$

Câu 17. Cho $\int\limits_1^{\mathrm{e}}(2+x\ln x)\mathrm{d}x=a\mathrm{e}^2+b\mathrm{e}+c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=c$. **B.** $a-b=c$. **C.** $a-b=-c$. **D.** $a+b=-c$.

Câu 18. Cho số phức $z=-5+2i$. Phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$ lần lượt là

A. 5 và -2. **B.** 5 và 2. **C.** -5 và 2. **D.** -5 và -2.

Câu 19. Cho hai số phức $z_1=-2-3i$ và $z_2=5-i$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức $2z_1-z_2$ bằng

A. 13. **B.** -14. **C.** -6. **D.** 3.

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn $(1-i)z+4\overline{z}=7-7i$. Khi đó, môđun của z bằng bao nhiêu?

A. $|z|=\sqrt{3}$. **B.** $|z|=\sqrt{5}$. **C.** $|z|=3$. **D.** $|z|=5$.

Câu 21. Khối chóp $S.ABC$ có thể tích $V=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ và diện tích đáy $B=\sqrt{3}$. Chiều cao của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{27}$.

Câu 22. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, $SA=a\sqrt{6}$, SA vuông góc với đáy, mặt phẳng (SBC) tạo với đáy góc φ sao cho $\tan\varphi=\sqrt{6}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD. Tính thể tích khối tứ diện $SOGC$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{36}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{24}$.

Câu 23. Cho khối nón có thể tích $V=4\pi$ và bán kính đáy $r=2$. Tính chiều cao h của khối nón đã cho.

A. $h=3$. **B.** $h=1$. **C.** $h=\sqrt{6}$. **D.** $h=6$.

Câu 24. Diện tích toàn phần của hình trụ có độ dài đường cao $h=4$ và bán kính đáy $r=2$ bằng

A. 24π. **B.** 16π. **C.** 8π. **D.** 32π.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1;5;3)$ và $M(2;1;-2)$. Tọa độ điểm B biết M là trung điểm của AB là

A. $B\left(\dfrac{1}{2};3;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $B(-4;9;8)$. **C.** $B(5;3;-7)$. **D.** $B(5;-3;-7)$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-8x+10y-6z+49=0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $R=1$. **B.** $R=7$. **C.** $R=\sqrt{151}$. **D.** $R=\sqrt{99}$.

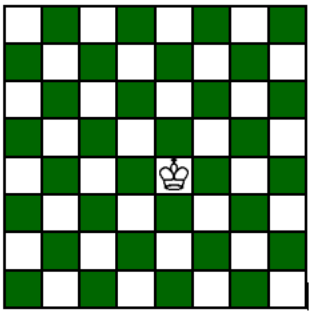
Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;5)$, $B(1;-2;3)$. Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và song song với trục Ox có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(0;a;b)$. Khi đó tỉ số $\dfrac{a}{b}$ bằng

A. -2. **B.** $-\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 2.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{-5}=\dfrac{z+1}{3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}_2=(2;4;-1)$. **B.** $\vec{u}_1=(2;-5;3)$. **C.** $\vec{u}_3=(2;5;3)$. **D.** $\vec{u}_4=(3;4;1)$.

Câu 29. Một quân vua được đặt trên một ô giữa bàn cờ vu**A.** Mỗi bước di chuyển, quân vua được chuyển sang một ô khác chung cạnh hoặc chung đỉnh với ô đang đứng. Bạn An di chuyển quân vua ngẫu nhiên 3 bướ**C.** Tính xác suất sau 3 bước quân vua trở về ô xuất phát.



A. $\frac{1}{16}$.		**B.** $\frac{1}{32}$.		**C.** $\frac{3}{32}$.		**D.** $\frac{3}{64}$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^3(x-1)^2(x+2)$. Khoảng nghịch biến của hàm số là

A. $(-\infty;-2)$; $(0;1)$.		**B.** $(-2;0)$; $(1;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2)$; $(0;+\infty)$.		**D.** $(-2;0)$.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)(x-2)^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ là

A. $f(-1)$.		**B.** $f(0)$.		**C.** $f(3)$.		**D.** $f(2)$.

Câu 32. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(36-x^2)\geq 3$ là

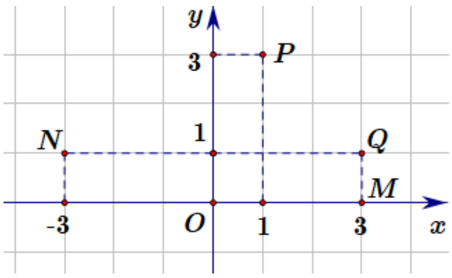
A. $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.		**B.** $(-\infty;3]$.

C. $[-3;3]$.		**D.** $(0;3]$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=\frac{1}{8}$ và $f'(x)=x\cos^2 x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{8f(x)-\cos 2x}{x}\mathrm{d}x$ bằng

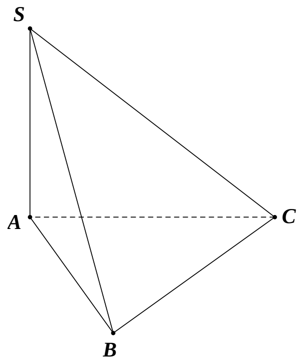
A. $\frac{3\pi^2+8}{4}$.		**B.** $\frac{3\pi^2}{4}$.		**C.** $-\frac{3\pi^2}{4}$.		**D.** $\frac{3\pi^2-8}{4}$.

Câu 34. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $z=3+i$ là điểm nào trong hình vẽ dưới đây?



A. Điểm M. **B.** Điểm N. **C.** Điểm P. **D.** Điểm Q.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{15}a$.



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, gọi M là trung điểm của AB. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$, biết $SD = 2a\sqrt{5}$, SC tạo với mặt đáy $(ABCD)$ một góc $60°$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SA.

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{\sqrt{79}}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{79}}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{79}}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{5}}{\sqrt{79}}$.

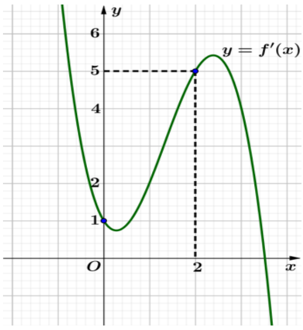
Câu 37. Gọi (S) là mặt cầu đi qua 4 điểm $A(2;0;0)$, $B(1;3;0)$, $C(-1;0;3)$, $D(1;2;3)$. Tính bán kính R của (S).

A. $R = 2\sqrt{2}$. **B.** $R = 3$. **C.** $R = 6$. **D.** $R = \sqrt{6}$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ hình chiếu H của $A(1;1;1)$ lên đường thẳng $d:\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases}$.

A. $H\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3}\right)$. **B.** $H(1;1;1)$. **C.** $H(0;0;-1)$. **D.** $H(1;1;0)$.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình bên.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x$ đạt cực đại tại $x = 0$.

B. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

C. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x$ không đạt cực trị tại $x = 0$.

D. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x$ không có cực trị.

Câu 40. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-7} > 3^{2x-21}$ là

A. 7. **B.** 6. **C.** vô số. **D.** 8.

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $\left(2f(x)+1-x^2\right)f'(x)=2x\left(1+f(x)\right)$, $\forall x \in [0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

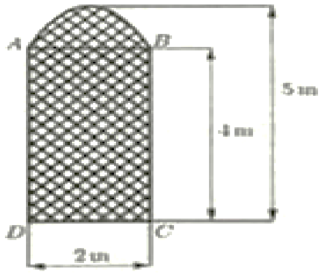
Câu 42. Cho số phức z thoả mãn $\frac{1+i}{z}$ là số thực và $|z-2| = m$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi m_0 là một giá trị của m để có đúng một số phức thoả mãn bài toán. Khi đó m_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $m_0 \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $m_0 \in \left(\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $m_0 \in \left(\frac{3}{2};2\right)$. **D.** $m_0 \in \left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 43. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng ABC' bằng a, góc giữa hai mặt phẳng ABC' và $BCC'B'$ bằng α với $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Câu 44. Ông An muốn làm một cánh cửa bằng sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ. Biết rằng đường cong phía trên là một parabol, tứ giác *ABCD* là hình chữ nhật. Giá của cánh cửa sau khi hoàn thành là 900 000 đồng/m^2. Số tiền mà ông An phải trả để làm cánh cửa đó bằng



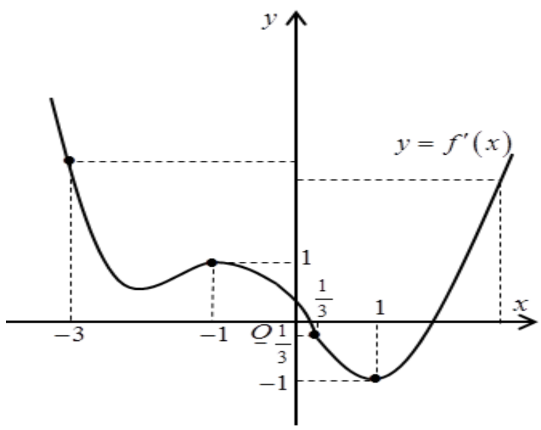
A. 9 600 000 đồng. **B.** 15 600 000đồng.

C. 8 160 000đồng. **D.** 8 400 000đồng.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$ có $A(-1;1;6)$, $B(-3;-2;-4)$, $C(1;2;-1)$, $D(2;-2;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất. Tính $a+b+c$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=2f\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)+\dfrac{(5\sin x-1)^2}{4}+3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;2\pi)$.

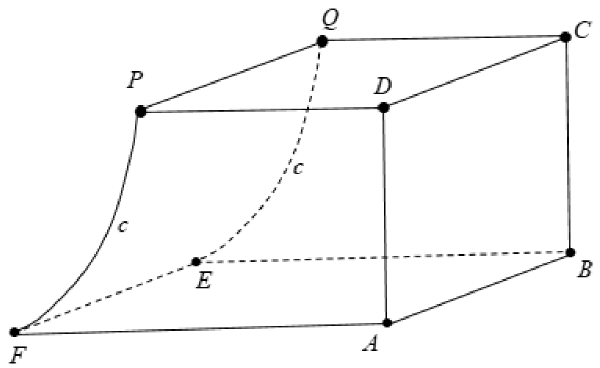


A. 9. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 47. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-m|}=\log_{x^2-2x+3}\left(2|x-m|+2\right)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 48. Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên.



Các tứ giác $ABCD$, $CDPQ$ là các hình vuông cạnh $2,5\text{ cm}$. Tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật có $BE = 3,5\text{cm}$. Mặt bên $PQEF$ được mài nhẵn theo đường parabol (P) có đỉnh parabol nằm trên cạnh EF. Thể tích của chi tiết máy bằng

A. $\frac{395}{24}\text{cm}^3$. **B.** $\frac{50}{3}\text{ cm}^3$. **C.** $\frac{125}{8}\text{cm}^3$. **D.** $\frac{425}{24}\text{cm}^3$.

Câu 49. Cho số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4 - 5i| = |z_2 - 1| = 1$ và $|\overline{z} + 4i| = |z - 8 + 4i|$. Tính $|z_1 - z_2|$ khi $P = |z - z_1| + |z - z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 8. **B.** 6. **C.** $\sqrt{41}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 50. Cho a, b, c, d, e, f là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} (d-1)^2 + (e-2)^2 + (f-3)^2 = 1 \\ (a+3)^2 + (b-2)^2 + c^2 = 9 \end{cases}$. Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \sqrt{(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2}$ lần lượt là M, m. Khi đó $M - m$ bằng

A. 10. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** 8. **D.** $2\sqrt{2}$.

-----------------HẾT-----------------

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	B	D	B	D	D	B	B	A	A	A	A	C	D	B	A	B	D	B	B	B	A	A	A	D
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
A	A	B	D	D	B	C	D	D	C	C	D	A	A	A	C	D	B	D	A	B	B	D	D	C

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Một tổ có 10 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 2 học sinh từ tổ đó để giữ hai chức vụ tổ trưởng và tổ phó.

A. A_{10}^{2}. **B.** C_{10}^{2}. **C.** A_{10}^{8}. **D.** 10^{2}.

Lời giải

Chọn A

Chọn ra 2 học sinh từ một tổ có 10 học sinh và phân công giữ chức vụ tổ trưởng, tổ phó là một chỉnh hợp chập 2 của 10 phần tử. Số cách chọn là A_{10}^{2} cách.

Câu 2. Cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$, công sai $d = 5$, số hạng thứ tư là

A. $u_4 = 23$ **B.** $u_4 = 18$. **C.** $u_4 = 8$. **D.** $u_4 = 14$.

Lời giải

Chọn B

$u_4 = u_1 + 3d = 3 + 5.3 = 18$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Cho các mệnh đề sau:

I. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-3;-2)$.

II. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

III. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

IV. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;5)$.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên?

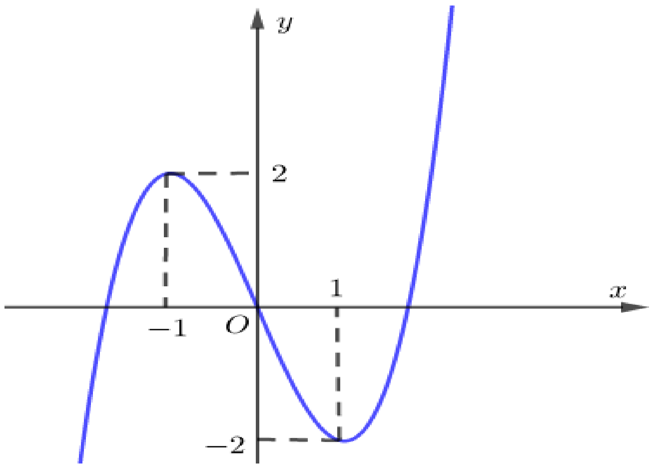
A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy nhận xét I, II,III đúng, nhận xét IV sai.

Câu 4. Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x = 2$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = -2$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x+3)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

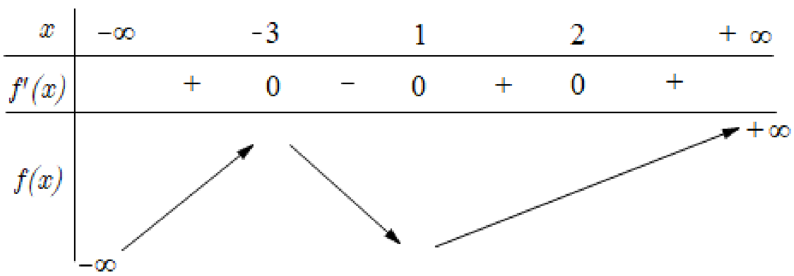
A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = -3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Câu 6. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3-2x}{x+1}$ là

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $y=3$. **D.** $y=-2$.

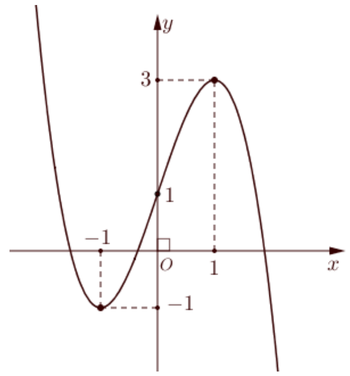
Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0)$ có đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}$.

Suy ra đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3-2x}{x+1}$ là $y=-2$.

Câu 7. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=x^3-3x+1$. **B.** $y=-x^3+3x+1$.

C. $y=x^2-2x+1$. **D.** $y=-x^4+2x^2$.

Lời giải

Chọn B

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số bậc 3 với hệ số $a<0$ nên chỉ có hàm số $y=-x^3+3x+1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8. Đường thẳng $y=-3x$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2-2$ tại điểm có tọa độ $(x_0;y_0)$ thì

A. $y_0=3$. **B.** $y_0=-3$. **C.** $y_0=1$. **D.** $y_0=-2$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm giữa đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2-2$ và đường thẳng $y=-3x$ là: $x^3-2x^2-2=-3x \Leftrightarrow x^3-2x^2+3x-2=0 \Leftrightarrow x_0=1$. Suy ra $y_0=-3$.

Câu 9. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^7}.a^{\frac{11}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-5}}}$ với $a>0$ ta được kết quả $A=a^{\frac{m}{n}}$ trong đó m, $n\in N^*$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m^2-n^2=312$. **B.** $m^2+n^2=543$.

C. $m^2-n^2=-312$. **D.** $m^2+n^2=409$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^7}.a^{\frac{11}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-5}}}=\dfrac{a^{\frac{7}{3}}.a^{\frac{11}{3}}}{a^4.a^{\frac{-5}{7}}}=\dfrac{a^6}{a^{\frac{23}{7}}}=a^{\frac{19}{7}}$.

Mà $A=a^{\frac{m}{n}}, m,n\in N^*$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản

$\Rightarrow m=19, n=7\Rightarrow m^2-n^2=312$.

Câu 10. Hàm số $y=3^{x^2-x}$ có đạo hàm là

A. $(2x-1).3^{x^2-x}.\ln 3$. **B.** $(2x-1).3^{x^2-x}$.

C. $3^{x^2-x}.\ln 3$. **D.** $\left(x^2-x\right).3^{x^2-x-1}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức đạo hàm của hàm số mũ ta có:

$\left(3^u\right)'=u'.3^u.\ln 3\Rightarrow\left(3^{x^2-x}\right)'=(2x-1).3^{x^2-x}.\ln 3$.

Câu 11. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x^2-2x+1\right)^{\frac{1}{3}}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **B.** $D=(0;+\infty)$. **C.** $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định của hàm số là $x^2-2x+1>0 \Leftrightarrow x\neq 1$.

Tập xác định D của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 12. Nghiệm của phương trình $3^{x-1}=27$ là

A. $x=4$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3^{x-1}=27 \Leftrightarrow 3^{x-1}=3^3 \Leftrightarrow x-1=3 \Leftrightarrow x=4$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=4$.

Câu 13. Cho phương trình $\log_3^2(3x)-\log_3^2 x^2-1=0$. Biết phương trình có 2 nghiệm, tính tích P của hai nghiệm đó.

A. $P=9$. **B.** $P=\frac{2}{3}$. **C.** $P=\sqrt[3]{9}$. **D.** $P=1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_3^2(3x)-\log_3^2 x^2-1=0$.

$\Leftrightarrow (1+\log_3 x)^2-(2\log_3 x)^2-1=0$.

Đặt $\log_3 x=t$ ta có phương trình $(1+t)^2-(2t)^2-1=0 \Leftrightarrow -3t^2-2t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{2}{3} \\ t=0 \end{array}\right.$.

Với $t=0 \Leftrightarrow \log_3 x=0 \Leftrightarrow x=1$.

Với $t=-\frac{2}{3} \Leftrightarrow \log_3 x=-\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=3^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

Vậy $P=1.\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{9}$.

Câu 14. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai?**

A. $\int \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+c,(x\neq 0)$. **B.** $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,(n\in\mathbb{N}^*)$.

C. $\int (a^x.\ln a)dx=a^x+C,(a>0)$. **D.** $\int \sin x dx=\cos x+C$.

Lời giải

Chọn D

Mệnh đề **D** sai, vì $(\cos x)'=-\sin x$.

Câu 15. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2x+1}{(x+2)^2}$ trên khoảng $(-2;+\infty)$ là

A. $2\ln(x+2)+\frac{3}{x+2}+C$. **B.** $2\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}+C$.

C. $2\ln(x+2)-\frac{1}{x+2}+C$. **D.** $2\ln(x+2)-\frac{3}{x+2}+C$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $x+2=t \Rightarrow x=t-1 \Rightarrow dx=dt$ với $t>0$

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int \frac{2t-1}{t^2}\mathrm{dt}=\int\left(\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{dt}=2\ln t+\frac{1}{t}+C$

Hay $\int f(x)\mathrm{d}x=2\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}+C.$

Câu 16. Tính tích phân $I=\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $u=x^2-1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=\int_0^3 \sqrt{u}\mathrm{d}u$ **B.** $I=\frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}\mathrm{d}u$ **C.** $I=2\int_0^3 \sqrt{u}\mathrm{d}u$ **D.** $I=\int_1^2 \sqrt{u}\mathrm{d}u$

Lời giải

Chọn A

$I=\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$

đặt $u=x^2-1 \Rightarrow \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=1 \Rightarrow u=0$; $x=2 \Rightarrow u=3$

Nên $I=\int_0^3 \sqrt{u}\mathrm{d}u$.

Câu 17. Cho $\int_1^{\mathrm{e}}(2+x\ln x)\mathrm{d}x=a\mathrm{e}^2+b\mathrm{e}+c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=c$. **B.** $a-b=c$. **C.** $a-b=-c$. **D.** $a+b=-c$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_1^{\mathrm{e}}(2+x\ln x)\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}2\mathrm{d}x+\int_1^{\mathrm{e}}x\ln x\mathrm{d}x=2x\Big|_1^{\mathrm{e}}+I=2\mathrm{e}-2+I$ với $I=\int_1^{\mathrm{e}}x\ln x\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v=\frac{x^2}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow I=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}\left(e^2-1\right)=\frac{e^2+1}{4}$

$\Rightarrow \int_1^{\mathrm{e}}(2+x\ln x)\mathrm{d}x=2\mathrm{e}-2+\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^2+2\mathrm{e}-\frac{7}{4}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = 2 \\ c = -\dfrac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow a - b = c.$$

Câu 18. Cho số phức $z = -5 + 2i$. Phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$ lần lượt là

A. 5 và -2. **B.** 5 và 2. **C.** -5 và 2. **D.** -5 và -2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overline{z} = -5 - 2i$. Vậy phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$ lần lượt là -5 và -2.

Câu 19. Cho hai số phức $z_1 = -2 - 3i$ và $z_2 = 5 - i$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức $2z_1 - z_2$ bằng

A. 13. **B.** -14. **C.** -6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2z_1 - z_2 = 2(-2 - 3i) - 5 + i = -4 - 6i - 5 + i = -9 - 5i$.

Vậy $-9 - 5 = -14$.

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn $(1 - i)z + 4\overline{z} = 7 - 7i$. Khi đó, môđun của z bằng bao nhiêu?

A. $|z| = \sqrt{3}$. **B.** $|z| = \sqrt{5}$. **C.** $|z| = 3$. **D.** $|z| = 5$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R})$.

$(1 - i)z + 4\overline{z} = 7 - 7i \Leftrightarrow (1 - i)(a + bi) + 4(a - bi) = 7 - 7i$.

$\Leftrightarrow a + bi - ai + b + 4a - 4bi = 7 - 7i.$

$\Leftrightarrow (5a + b) - (a + 3b)i = 7 - 7i \Leftrightarrow \begin{cases} 5a + b = 7 \\ -a - 3b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow z = 1 + 2i$.

Vậy $|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Câu 21. Khối chóp $S.ABC$ có thể tích $V = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ và diện tích đáy $B = \sqrt{3}$. Chiều cao của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{27}$.

Lời giải

Chọn B

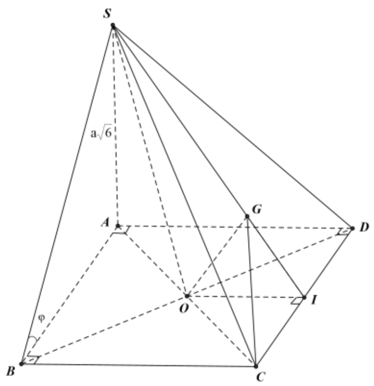
Chiều cao của khối chóp $h=\frac{3V}{B}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ nên chọn đáp án B đúng.

Câu 22. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, $SA=a\sqrt{6}$, SA vuông góc với đáy, mặt phẳng (SBC) tạo với đáy góc φ sao cho $\tan\varphi=\sqrt{6}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD. Tính thể tích khối tứ diện $SOGC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{36}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} BC\perp AB \\ BC\perp SA \end{cases}\Rightarrow BC\perp SB.$

Như vậy $\begin{cases} (SBC)\cap(ABCD)=BC \\ BC\perp AB \\ BC\perp SB \end{cases}\Rightarrow \left((SBC);(ABCD)\right)=\left(AB;SB\right)=SBA=\varphi.$

Trong tam giác SAB vuông tại A, $\tan\varphi=\frac{SA}{AB}\Leftrightarrow\sqrt{6}=\frac{a\sqrt{6}}{AB}\Leftrightarrow AB=a.$

Gọi I là trung điểm CD, trọng tâm G của tam giác SCD, G thuộc SI.

Có $V_{S.OCI}=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta OIC}=\frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}.IO.IC=\frac{1}{6}.a.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}=\frac{a^3}{24}.$

Khi đó: $\frac{V_{SOGC}}{V_{SOIC}}=\frac{SG}{SI}=\frac{2}{3}\Rightarrow V_{SOGC}=\frac{2}{3}V_{SOIC}=\frac{2}{3}\frac{a^3\sqrt{6}}{24}=\frac{a^3\sqrt{6}}{36}.$

Câu 23. Cho khối nón có thể tích $V=4\pi$ và bán kính đáy $r=2$. Tính chiều cao h của khối nón đã cho.

A. $h=3$. **B.** $h=1$. **C.** $h=\sqrt{6}$. **D.** $h=6$.

Lời giải

Chọn A

Ta có công thức thể tích khối nón $V=\frac{1}{3}.\pi.r^2.h \Rightarrow h=\frac{3V}{\pi.r^2}=\frac{3.4\pi}{\pi.4}=3$.

Câu 24. Diện tích toàn phần của hình trụ có độ dài đường cao $h=4$ và bán kính đáy $r=2$ bằng:

A. 24π. **B.** 16π. **C.** 8π. **D.** 32π.

Lời giải

Chọn A

Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S_{tp}=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r(r+h)=2\pi.2(2+4)=24\pi$.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1;5;3)$ và $M(2;1;-2)$. Tọa độ điểm B biết M là trung điểm của AB là

A. $B\left(\frac{1}{2};3;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $B(-4;9;8)$. **C.** $B(5;3;-7)$. **D.** $B(5;-3;-7)$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $B(x_B;y_B;z_B)$.

Vì M là trung điểm của AB nên ta có $\begin{cases} x_M=\frac{x_A+x_B}{2} \\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2} \\ z_M=\frac{z_A+z_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=\frac{-1+x_B}{2} \\ 1=\frac{5+y_B}{2} \\ -2=\frac{3+z_M}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=5 \\ y_B=-3 \\ z_B=-7 \end{cases}$.

Vậy $B(5;-3;-7)$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-8x+10y-6z+49=0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $R=1$. **B.** $R=7$. **C.** $R=\sqrt{151}$. **D.** $R=\sqrt{99}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt cầu: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ $\left(a^2+b^2+c^2-d>0\right)$ có tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Ta có $a=4$, $b=-5$, $c=3$, $d=49$. Do đó $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=1$.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;5), B(1;-2;3)$. Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và song song với trục Ox có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(0;a;b)$. Khi đó tỉ số $\frac{a}{b}$ bằng

A. -2. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{BA}=(1;1;2)$; $\vec{i}=(1;0;0)$ là vectơ đơn vị của trục Ox.

Vì (α) đi qua hai điểm A, B và song song với trục Ox nên $\left[\overrightarrow{BA},\vec{i}\right]=(0;2;-1)$ là một vectơ pháp tuyến của (α). Do đó $\frac{a}{b}=-2$.

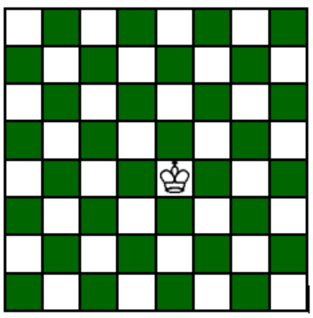
Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z+1}{3}$. Vecto nào dưới đây là một vecto chỉ phương của d?

A. $\overrightarrow{u_2}=(2;4;-1)$. **B.** $\overrightarrow{u_1}=(2;-5;3)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(2;5;3)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(3;4;1)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 29. Một quân vua được đặt trên một ô giữa bàn cờ vua. Mỗi bước di chuyển, quân vua được chuyển sang một ô khác chung cạnh hoặc chung đỉnh với ô đang đứng. Bạn An di chuyển quân vua ngẫu nhiên 3 bước. Tính xác suất sau 3 bước quân vua trở về ô xuất phát.



A. $\frac{1}{16}$. **B.** $\frac{1}{32}$. **C.** $\frac{3}{32}$. **D.** $\frac{3}{64}$.

Lời giải

Chọn D

Tại mọi ô đang đứng, ông vua có 8 khả năng lựa chọn để bước sang ô bên cạnh.

Do đó không gian mẫu $n(\Omega)=8^3$.

Gọi A là biến cố “sau 3 bước quân vua trở về ô xuất phát”. Sau ba bước quân vua muốn quay lại ô ban đầu khi ông vua đi theo đường khép kín tam giác. Chia hai trường hợp:

+ Từ ô ban đầu đi đến ô đen, đến đây có 4 cách để đi bước hai rồi về lại vị trí ban đầu.

+ Từ ô ban đầu đi đến ô trắng, đến đây có 2 cách để đi bước hai rồi về lại vị trí ban đầu.

Do số phần tử của biến cố A là $n(A)=4.4+2.4=24$.

Vậy xác suất $P(A)=\dfrac{24}{8^3}=\dfrac{3}{64}$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^3(x-1)^2(x+2)$. Khoảng nghịch biến của hàm số là

A. $(-\infty;-2)$; $(0;1)$. **B.** $(-2;0)$; $(1;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2)$; $(0;+\infty)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn D

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)(x-2)^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ là

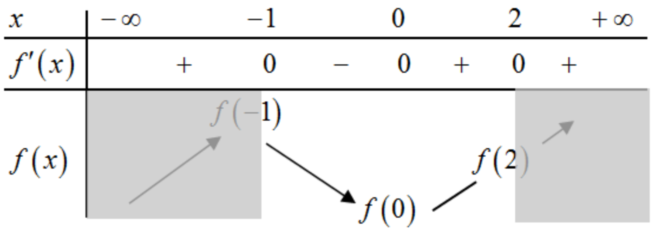
A. $f(-1)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f(3)$. **D.** $f(2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có. $f'(x)=x(x+1)(x-2)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=2\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ như sau:



Dựa vào bảng biến thiên suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ là $f(0)$.

Câu 32. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(36-x^2)\ge 3$ là

A. $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;3]$.

C. $[-3;3]$. **D.** $(0;3]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_3(36-x^2)\ge 3 \Leftrightarrow 36-x^2\ge 27 \Leftrightarrow 9-x^2\ge 0 \Leftrightarrow -3\le x\le 3$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=\frac{1}{8}$ và $f'(x)=x\cos^2 x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{8f(x)-\cos 2x}{x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{3\pi^2+8}{4}$. **B.** $\frac{3\pi^2}{4}$. **C.** $-\frac{3\pi^2}{4}$. **D.** $\frac{3\pi^2-8}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int x\cos^2 x\mathrm{d}x = \int x.\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \int\frac{x}{2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int x\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}\int x\mathrm{d}(\sin 2x)$

$=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{4}\int\sin 2x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$.

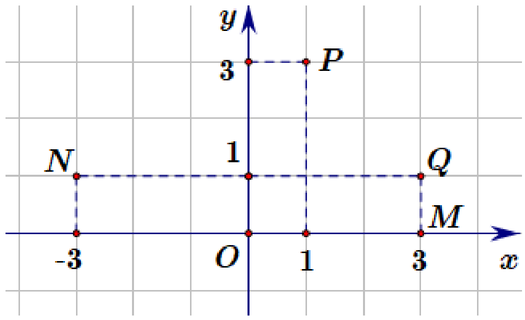
Suy ra $f(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$.

Mà $f(0)=\frac{1}{8}\Rightarrow\frac{1}{8}+C=\frac{1}{8}\Leftrightarrow C=0$.

Do đó $f(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x$.

Ta có $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{8f(x)-\cos 2x}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(2x+2\sin 2x)\mathrm{d}x=\left(x^2-\cos 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \pi^2-1-\frac{\pi^2}{4}-1=\frac{3\pi^2-8}{4}$.

Câu 34. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $z=3+i$ là điểm nào trong hình vẽ dưới đây?



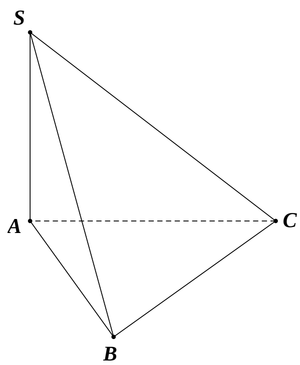
A. Điểm M. **B.** Điểm N. **C.** Điểm P. **D.** Điểm Q.

Lời giải

Chọn D

Số phức $z=3+i$ có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 1. Do đó, điểm biểu diễn cho số phức $z=3+i$ là điểm $Q(3;1)$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $BC=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{15}a$.



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn C

Do SA vuông góc với mặt phẳng đáy nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng đáy. Từ đó suy ra: $SC;\ ABC \quad = \ SC;AC \ = SCA$.

Trong tam giác ABC vuông tại B có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{a^2+4a^2}=\sqrt{5}a$.

Trong tam giác SAC vuông tại A có: $\tan SCA=\frac{SA}{AC}=\frac{\sqrt{15}a}{\sqrt{5}a}=\sqrt{3} \Rightarrow SCA=60^\circ$.

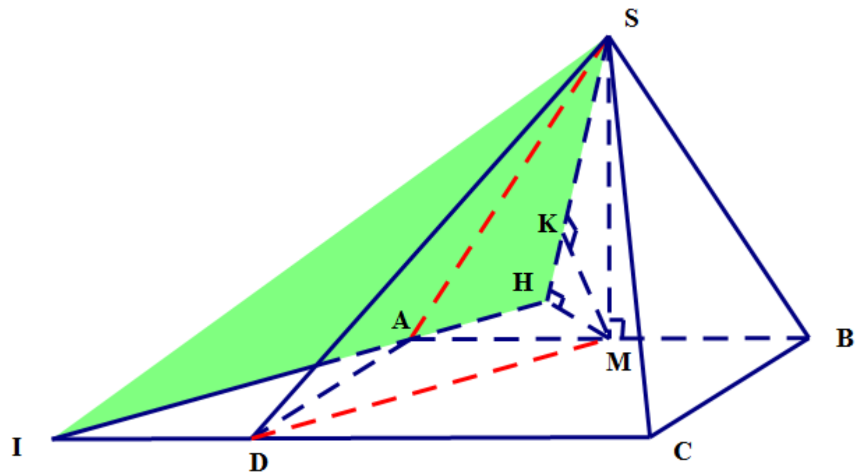
Vậy $SC;\ ABC \quad =60^\circ$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, gọi M là trung điểm của AB. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$, biết $SD = 2a\sqrt{5}$, SC tạo với mặt đáy $(ABCD)$ một góc $60°$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SA.

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{\sqrt{79}}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{79}}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{79}}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{5}}{\sqrt{79}}$.

Lờigiải

Chọn C



Dựng hình bình hành $AMDI$. Khi đó: $MD//AI \Rightarrow MD//(SAI)$.

$\Rightarrow d(MD, AI) = d(MD,(SAI)) = d(M,(SAI))$.

Dựng $MH \perp AI$ và $MK \perp SH$ (1).

Ta có: $\begin{cases} AI \perp MH \\ AI \perp SM \ (do\, SM \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SMH) \Rightarrow AI \perp MK$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $MK \perp (SAI) \Rightarrow d(M,(SAI)) = MK$.

+ Ta có: $SM \perp (ABCD) \Rightarrow MC$ là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ nên $(SC,(ABCD)) = SCM = 60°$.

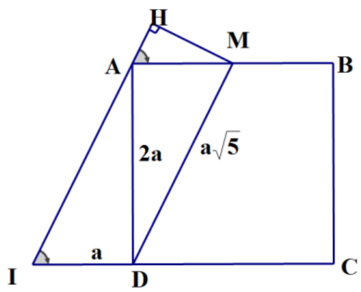
+ Xét tam giác vuông SMC và SMD có: $SM = \sqrt{SD^2 - MD^2} = MC.\tan 60°$ (3).

Mặt khác: $MC = MD$ ($ABCD$ là hình vuông).

Suy ra: $(3) \Leftrightarrow SD^2 - MC^2 = 3MC^2 \Leftrightarrow MC = a\sqrt{5} = MD \Rightarrow SM = a\sqrt{15}$.

Đặt $MA = x$ $(x > 0) \Rightarrow AD = 2x$.

Xét tam giác MAD vuông tại A có $MA^2 = MD^2 - AD^2 \Leftrightarrow x^2 = \left(a\sqrt{5}\right)^2 - \left(2x\right)^2 \Rightarrow x = a$.



Lại có: $\Delta MAH \backsim \Delta AID \Rightarrow MH = \dfrac{AD.MA}{AI} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Khi đó: $\dfrac{1}{MK^2} = \dfrac{1}{MH^2} + \dfrac{1}{SM^2} \Rightarrow MK = \dfrac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{79}}$.

Câu 37. Gọi (S) là mặt cầu đi qua 4 điểm $A(2;0;0), B(1;3;0), C(-1;0;3), D(1;2;3)$. Tính bán kính R của (S).

A. $R = 2\sqrt{2}$. **B.** $R = 3$. **C.** $R = 6$. **D.** $R = \sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D. Khi đó:

$$\begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ AI^2 = DI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + (b-3)^2 + c^2 \\ (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a+1)^2 + b^2 + (c-3)^2 \\ (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b = -3 \\ a - c = -1 \\ a - 2b - 3c = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow I(0;1;1).$$

Bán kính: $R = IA = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ hình chiếu H của $A(1;1;1)$ lên đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$.

A. $H\left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{4}{3}; 1\right)$. **B.** $H(1;1;1)$. **C.** $H(0;0;-1)$. **D.** $H(1;1;0)$.

Lời giải

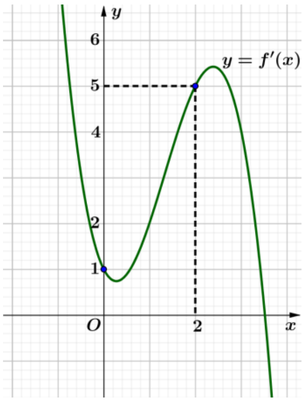
Chọn A

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;1;1)$ Do $H\in d\Rightarrow H(1+t;1+t;t)$.

Ta có: $\overrightarrow{AH}=(t;t;t-1)$ Do H là hình chiếu của điểm A lên đường thẳng d nên suy ra

$\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0\Leftrightarrow t+t+t-1=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}\Rightarrow H\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{4}{3};1\right)$.

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình bên.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y=f(x)-x^2-x$ đạt cực đại tại $x=0$.

B. Hàm số $y=f(x)-x^2-x$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

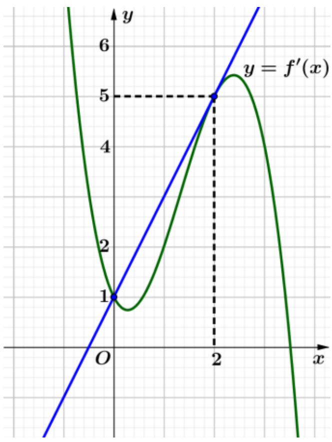
C. Hàm số $y=f(x)-x^2-x$ không đạt cực trị tại $x=0$.

D. Hàm số $y=f(x)-x^2-x$ không có cực trị.

Lời giải

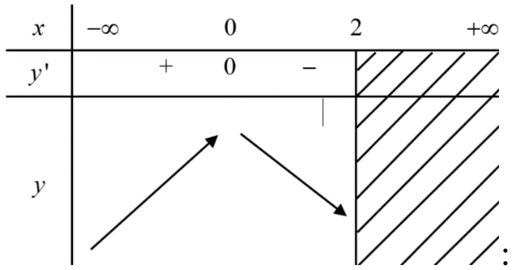
Chọn A

Ta có: $y'=f'(x)-(2x+1)$ Þ $y'=0\Leftrightarrow f'(x)=2x+1$.



Từ đồ thị ta thấy $x=0$ là nghiệm đơn của phương trình $y'=0$.

Ta có bảng biến thiên trên $(-\infty;2)$:



Từ bảng biến thiên Þ hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 40. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-7} > 3^{2x-21}$ là

A. 7. **B.** 6. **C.** vô số. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-7} > 3^{2x-21} \Leftrightarrow 3^{-\left(2x^2-3x-7\right)} > 3^{2x-21}$

$\Leftrightarrow -\left(2x^2-3x-7\right) > 2x-21 \Leftrightarrow -2x^2+3x+7 > 2x-21$

$\Leftrightarrow -2x^2+x+28>0 \Leftrightarrow -\frac{7}{2}<x<4$.

Do $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$.

Vậy bất phương trình đã cho có 7 nghiệm nguyên.

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $\left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x\left[1+f(x)\right]$, $\forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Xét trên đoạn $[0;1]$, theo đề bài: $\left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x\left[1+f(x)\right]$

$\Leftrightarrow 2f(x).f'(x)=2x+\left(x^2-1\right).f'(x)+2x.f(x)$

$\Leftrightarrow \left[f^2(x)\right]'=\left[x^2+\left(x^2-1\right).f(x)\right]'$

$\Leftrightarrow f^2(x)=x^2+\left(x^2-1\right).f(x)+C\ \ (1)$.

Thay $x=1$ vào (1) ta được: $f^2(1)=1+C\Leftrightarrow C=0$.

Do đó, (1) trở thành: $f^2(x)=x^2+(x^2-1).f(x)$

$\Leftrightarrow f^2(x)-1=x^2-1+(x^2-1).f(x)$

$\Leftrightarrow [f(x)-1].[f(x)+1]=(x^2-1).[f(x)+1]$

$\Leftrightarrow f(x)-1=x^2-1$

$\Leftrightarrow f(x)=x^2$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$.

Câu 42. Cho số phức z thoả mãn $\frac{1+i}{z}$ là số thực và $|z-2|=m$ với $m\in\mathbb{R}$. Gọi m_0 là một giá trị của m để có đúng một số phức thoả mãn bài toán. Khi đó

A. $m_0\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $m_0\in\left(\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $m_0\in\left(\frac{3}{2};2\right)$. **D.** $m_0\in\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$.

Đặt: $w=\frac{1+i}{z}=\frac{1+i}{a+bi}=\frac{1}{a^2+b^2}[a+b+(a-b)i]=\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{a-b}{a^2+b^2}i$.

w là số thực nên: $a=b\ (1)$.

Mặt khác: $|a-2+bi|=m\Leftrightarrow(a-2)^2+b^2=m^2\ (2)$.

Thay (1) vào (2) được: $(a-2)^2+a^2=m^2\Leftrightarrow 2a^2-4a+4-m^2=0\ (3)$.

Để có đúng một số phức thoả mãn bài toán thì PT (3) phải có nghiệm a duy nhất.

$\Leftrightarrow\Delta'=0\Leftrightarrow 4-2(4-m^2)=0\Leftrightarrow m^2=2\Leftrightarrow m=\sqrt{2}\in\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Trình bày lại

Giả sử $z=a+bi$, vì $z\neq 0$ nên $a^2+b^2>0\ (*)$.

Đặt: $w=\frac{1+i}{z}=\frac{1+i}{a+bi}=\frac{1}{a^2+b^2}[a+b+(a-b)i]=\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{a-b}{a^2+b^2}i$.

w là số thực nên: $a=b\ (1)$. Kết hợp $(*)$ suy ra $a=b\neq 0$.

Mặt khác: $|a-2+bi|=m\Leftrightarrow(a-2)^2+b^2=m^2\ (2)$.

Thay (1) vào (2) được: $(a-2)^2+a^2=m^2\Leftrightarrow g(a)=2a^2-4a+4-m^2=0\ (3)$.

Để có đúng một số phức thoả mãn bài toán thì PT (3) phải có nghiệm $a \neq 0$ duy nhất.

Có các khả năng sau :

KN1 : PT (3) có nghiệm kép $a \neq 0$

ĐK: $\begin{cases} \Delta' = 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2 = 0 \\ 4 - m^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m = \sqrt{2}$.

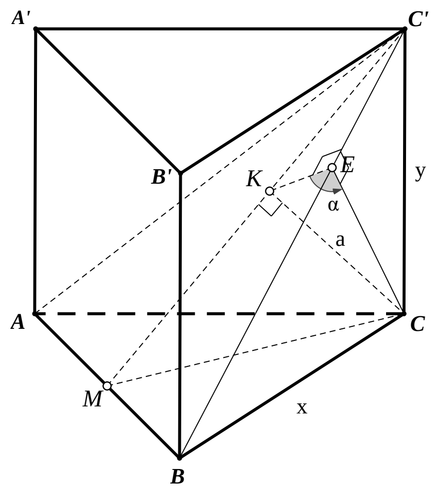
KN2: PT (3) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $a = 0$

ĐK: $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2 > 0 \\ 4 - m^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 2$. Từ đó suy ra $\exists m_0 = \sqrt{2} \in \left(1; \dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 43. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng ABC' bằng a, góc giữa hai mặt phẳng ABC' và $BCC'B'$ bằng α với $\cos\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $V = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải



Chọn B

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC

Do $\begin{cases} AB \perp CC' \\ AB \perp CM \end{cases} \Rightarrow AB \perp \; MCC' \Rightarrow \; ABC' \perp \; MCC'$.

Kẻ CK vuông góc với CM tại K thì ta được $CK \perp \; ABC'$,

do đó $CK = d \; C; \; ABC' \; = a$.

Đặt $BC = x, CC' = y,\ x > 0, y > 0$, ta được: $CM = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{1}{CM^2} + \frac{1}{CC'^2} = \frac{1}{CK^2} \Leftrightarrow \frac{4}{3x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2} \quad 1 .$$

Kẻ $CE \perp BC'$ tại E, ta được $KEC = \alpha$, $EC = \dfrac{KC}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{12}}} = a\sqrt{\dfrac{12}{11}}$.

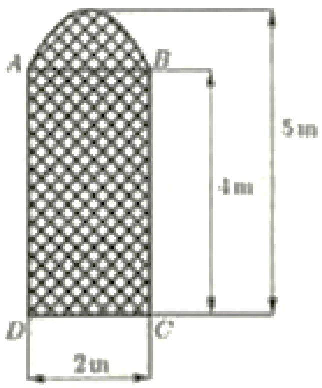
Lại có $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{CE^2} = \dfrac{11}{12a^2} \quad 2$.

Giải 1 , 2 ta được $x = 2a, y = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

$$V = y.\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{4a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{2}a^3}{2}$$

Câu 44. Ông An muốn làm một cánh cửa bằng sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ. Biết rằng đường cong phía trên là một parabol, tứ giác *ABCD* là hình chữ nhật. Giá của cánh cửa sau khi hoàn thành là 900 000 đồng/m^2. Số tiền mà ông An phải trả để làm cánh cửa đó bằng

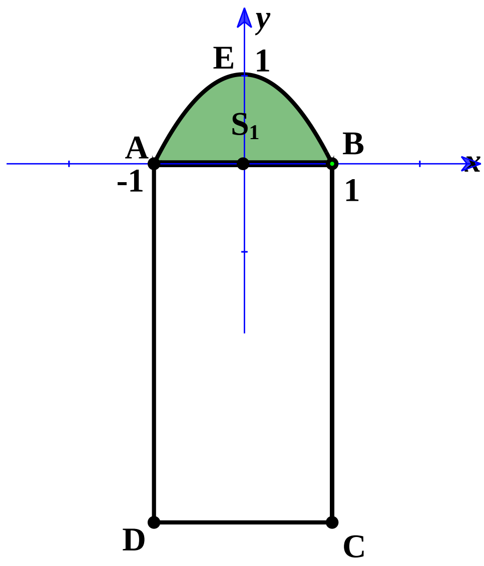


A. 9 600 000 đồng. **B.** 15 600 000đồng.

C. 8 160 000đồng. **D.** 8 400 000đồng.

Lời giải

Chọn D



Gắn hệ trục toạ độ như hình vẽ.

Giả sử parabol là $(P): y = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$ do $A(-1;0), B(1;0), E(0;1) \in (P)$

$\Rightarrow (P): y = -x^2 + 1$.

Diện tích S_1 là $S_1 = \int_{-1}^{1}(-x^2+1).\mathrm{dx} = \left(-\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$.

Ta có diện tích tứ giác $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB.BC = 8\left(m^2\right)$.

Số tiền mà ông An phải trả để làm cánh cửa đó bằng $\left(S_{ABCD4} + S_1\right).900000 = \left(8+\frac{4}{3}\right).900000 = 8400000$ đồng.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$ có $A(-1;1;6)$, $B(-3;-2;-4)$, $C(1;2;-1)$, $D(2;-2;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất. Tính $a+b+c$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $C_{\Delta ABM} = AM + BM + AB$ mà AB không đổi suy ra $C_{\Delta ABM}$ nhỏ nhất khi $AM + BM$ nhỏ nhất.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;-3;-10)$, $\overrightarrow{CD} = (1;-4;1)$.

Xét $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow AB \perp CD$. Gọi (α) qua AB và vuông góc với CD.

(α) đi qua $A(-1;1;6)$ và nhận $\overrightarrow{CD} = (1;-4;1)$ làm véc tơ pháp tuyến.

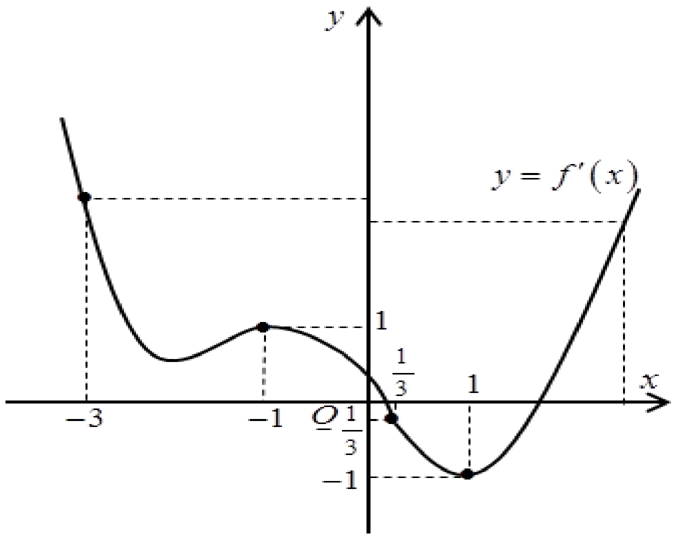
Suy ra (α) có phương trình là: $x-4y+z-1=0$.

Vì điểm M thuộc CD sao cho $AM+BM$ nhỏ nhất nên $M=CD\cap(\alpha)$.

$(\alpha): x-4y+z-1=0$, CD có phương trình: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-4t \\ z=-1+t \end{cases}$

$M=CD\cap(\alpha)\Rightarrow M\left(\dfrac{3}{2};0;\dfrac{-1}{2}\right)\Rightarrow a+b+c=\dfrac{3}{2}+0+\dfrac{-1}{2}=1$.

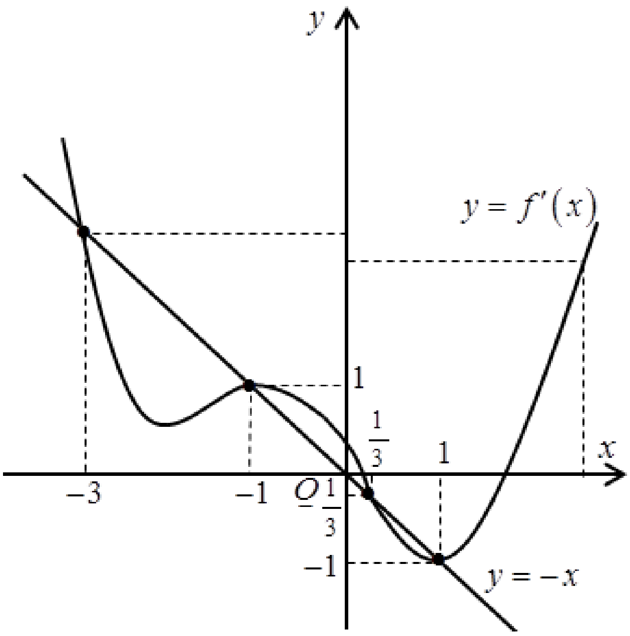
Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=2f\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)+\dfrac{(5\sin x-1)^2}{4}+3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;2\pi)$.



A. 9. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $g'(x)=5\cos x f'\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)+\dfrac{5}{2}\cos x(5\sin x-1)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 5\cos x f'\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)+\dfrac{5}{2}\cos x(5\sin x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ f'\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)=-\dfrac{5\sin x-1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \dfrac{5\sin x-1}{2}=-3\\ \dfrac{5\sin x-1}{2}=-1\\ \dfrac{5\sin x-1}{2}=\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{5\sin x-1}{2}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 5\sin x-1=-6\\ 5\sin x-1=-2\\ 5\sin x-1=\dfrac{2}{3}\\ 5\sin x-1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=-1\\ \sin x=-\dfrac{1}{5}\\ \sin x=\dfrac{1}{3}\\ \sin x=\dfrac{3}{5}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=-1\\ \sin x=-\dfrac{1}{5}\\ \sin x=\dfrac{1}{3}\\ \sin x=\dfrac{3}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}\vee x=\dfrac{3\pi}{2}\\ x=\dfrac{3\pi}{2}\\ x=\pi-arc\sin\left(-\dfrac{1}{5}\right)\vee x=2\pi+arc\sin\left(-\dfrac{1}{5}\right)\\ x=arc\sin\left(\dfrac{1}{3}\right)\vee x=\pi-arc\sin\left(\dfrac{1}{3}\right)\\ x=arc\sin\left(\dfrac{3}{5}\right)\vee x=\pi-arc\sin\left(\dfrac{3}{5}\right)\end{array}\right.,.$$

Suy phương trình $g'(x)=0$ có 9 nghiệm, trong đó có nghiệm $x=\dfrac{3\pi}{2}$ là nghiệm kép.

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 7 cực trị.

Câu 47. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-m|}=\log_{x^2-2x+3}\left(2|x-m|+2\right)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Phương trình tương đương $3^{x^2-2x+3-(2|x-m|+2)}=\dfrac{\ln\left(2|x-m|+2\right)}{\ln\left(x^2-2x+3\right)}$.

$\Leftrightarrow 3^{x^2-2x+3}.\ln\left(x^2-2x+3\right)=3^{2|x-m|+2}.\ln\left(2|x-m|+2\right)$.

Xét hàm đặc trưng $f(t)=3^t.\ln t, t\geq 2$ là hàm số đồng biến nên từ phương trình suy ra

$\Leftrightarrow x^2-2x+3=2|x-m|+2 \Leftrightarrow g(x)=x^2-2x-2|x-m|+1=0$.

Có $g(x)=\begin{cases}x^2-4x+2m+1\, khi\ x\geq m\\ x^2-2m+1\qquad khi\ x\leq m\end{cases} \Rightarrow g'(x)=\begin{cases}2x-4\, khi\ x\geq m\\ 2x\qquad khi\ x\leq m\end{cases}$.

và $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\, khi\ x\geq m\\ x=0\, khi\ x\leq m\end{array}\right.$.

Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m\leq 0$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		m		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	|	$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình chỉ có tối đa 2 nghiệm nên không có m thoả mãn.

Trường hợp 2: $m \ge 2$ tương tự.

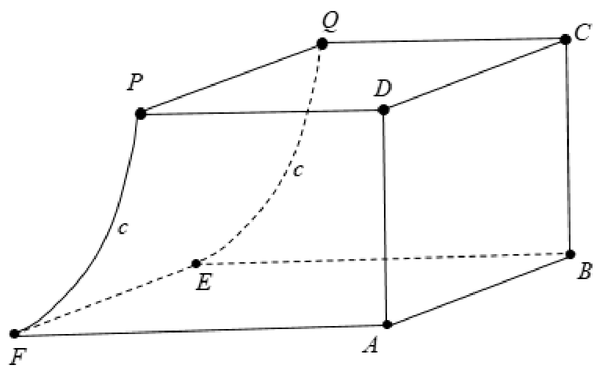
Trường hợp 3: $0 < m < 2$, bảng biến thiên $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		m		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	|	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2m+1$	$\nearrow$	$(m-1)^2$	$\searrow$	$2m-3$	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình có 3 nghiệm khi $\left[\begin{array}{l}(m-1)^2=0\\ -2m+1=0>2m-3\\ -2m+1<0=2m-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\dfrac{1}{2}\\ m=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Cả 3 giá trị trên đều thoả mãn, nên tổng của chúng bằng 3.

Câu 48. Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên.

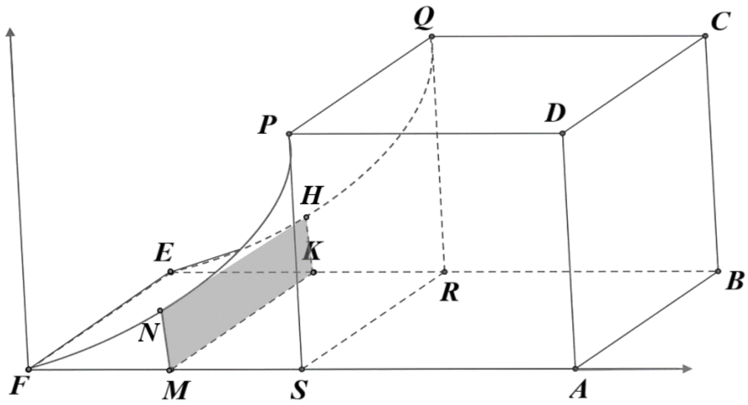


Các tứ giác $ABCD$, $CDPQ$ là các hình vuông cạnh $2,5\,\text{cm}$. Tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật có $BE = 3,5\,\text{cm}$. Mặt bên $PQEF$ được mài nhẵn theo đường parabol (P) có đỉnh parabol nằm trên cạnh EF. Thể tích của chi tiết máy bằng

A. $\dfrac{395}{24}\text{cm}^3$. **B.** $\dfrac{50}{3}\text{cm}^3$. **C.** $\dfrac{125}{8}\text{cm}^3$. **D.** $\dfrac{425}{24}\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi hình chiếu của P,Q trên AF và BE là R và S. Vật thể được chia thành hình lập phương $ABCD.PQRS$ có cạnh $2,5cm$, thể tích $V_1 = \frac{125}{8}cm^3$ và phần còn lại có thể tích V_2. Khi đó thể tích vật thể $V = V_1 + V_2 = \frac{125}{8} + V_2$.

Đặt hệ trục $Oxyz$ sao cho O trùng với F, Ox trùng với FA, Oy trùng với tia Fy song song với AD. Khi đó Parabol (P) có phương trình dạng $y = ax^2$, đi qua điểm $P\left(1;\frac{5}{2}\right)$ do đó $a = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}x^2$.

Cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với Ox và đi qua điểm $M(x;0;0), 0 \le x \le 1$ ta được thiết diện là hình chữ nhật $MNHK$ có cạnh là $MN = \frac{5}{2}x^2$ và $MK = \frac{5}{2}$ do đó diện tích $S(x) = \frac{25}{4}x^2$

Áp dụng công thức thể tích vật thể ta có $V_2 = \int_0^1 \frac{25}{4}x^2dx = \frac{25}{12}$

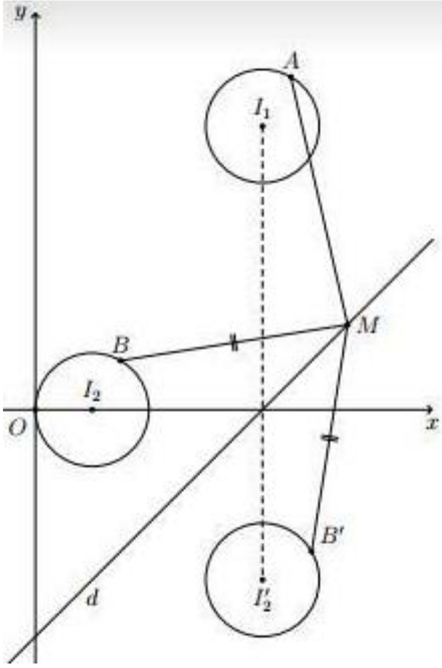
Từ đó $V = \frac{125}{8} + \frac{25}{12} = \frac{425}{24}\text{cm}^3$

Câu 49. Cho số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4 - 5i| = |z_2 - 1| = 1$ và $|\bar{z} + 4i| = |z - 8 + 4i|$. Tính $|z_1 - z_2|$ khi $P = |z - z_1| + |z - z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. 8. **B.** 6. **C.** $\sqrt{41}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi A là điểm biểu diễn của số phức z_1. Suy ra A thuộc đường tròn (C_1) tâm $I_1(4;5), R=1$.

Gọi B là điểm biểu diễn của số phức z_2. Suy ra B thuộc đường tròn (C_2) tâm $I_2(1;0), R=1$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi$

Theo giả thiết $|\bar{z}+4i|=|z-8+4i| \Leftrightarrow x-y=4$. Suy ra M thuộc đường thẳng $(d)\ x-y-4=0$

Gọi (C_2') có tâm $I_2'(4;-3), R=1$ là đường tròn đối xứng với đường tròn (C_2) tâm $I_2(1;0), R_2=1$ qua đường thẳng d. Gọi B' là điểm đối xứng với đối xứng với B qua đường thẳng d. Ta có $P=|z-z_1|+|z-z_2|=MA+MB=MA+MB'\geq AB'=I_1I_2'-R_1-R_2=6$.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi A,B',I_1,I_2',M thẳng hàng. Khi đó $\overrightarrow{I_1A}=\frac{1}{8}\overrightarrow{I_1I_2'}$ suy ra $A(4;4)$ và $\overrightarrow{I_2B'}=\frac{1}{8}\overrightarrow{I_2'I_1}$ suy ra $B'(4;-2)\Rightarrow B(2;0)$. $AB=2\sqrt{5}$.

Vậy $|z_1-z_2|=2\sqrt{5}$.

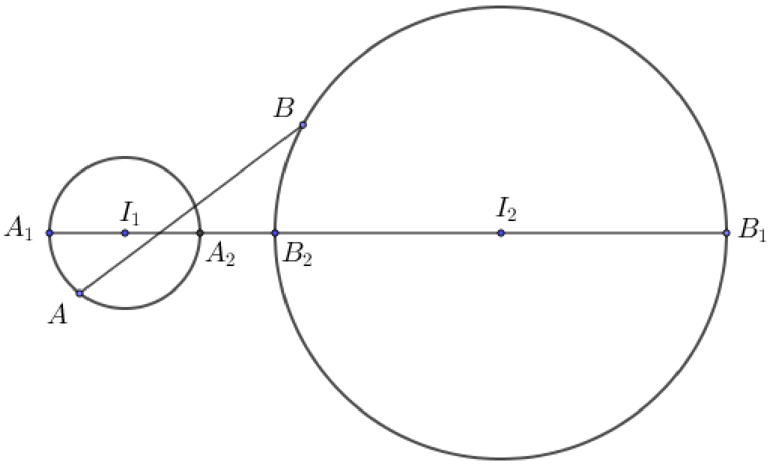
Câu 50. Cho a,b,c,d,e,f là các số thực thỏa mãn $\begin{cases}(d-1)^2+(e-2)^2+(f-3)^2=1\\(a+3)^2+(b-2)^2+c^2=9\end{cases}$. Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=\sqrt{(a-d)^2+(b-e)^2+(c-f)^2}$ lần lượt là $M,m.$ Khi đó, $M-m$ bằng

A. 10. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** 8. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $A(d,e,f)$ thì A thuộc mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$ có tâm $I_1(1;2;3)$, bán kính $R_1=1$, $B(a,b,c)$ thì B thuộc mặt cầu $(S_2):(x+3)^2+(y-2)^2+z^2=9$ có tâm $I_2(-3;2;0)$, bán kính $R_2=3$. Ta có $I_1I_2=5>R_1+R_2\Rightarrow(S_1)$ và (S_2) không cắt nhau và ở ngoài nhau.



Dễ thấy $F=AB$, AB max khi $A\equiv A_1, B\equiv B_1$ $\Rightarrow$ Giá trị lớn nhất bằng $I_1I_2+R_1+R_2=9$.

AB min khi $A\equiv A_2, B\equiv B_2\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất bằng $I_1I_2-R_1-R_2=1$.

Vậy $M-m=8$.

---------------------Hết-------------------