TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Đường tiệm cận đứng

✪ Định nghĩa:

• Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty;\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty;\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty;\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$

2. Đường tiệm cận ngang.

✪ Định nghĩa:

• Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$

Chú ý:

- Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}, (ad - bc \neq 0, c \neq 0)$ luôn có tiệm cận ngang và tiệm cận đứng lần lượt là $y = \dfrac{a}{c}$ $x = -\dfrac{d}{c}$.

- Nếu $y = f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ là hàm số phân thức hữu tỷ.

- Nếu Q(x) = 0 có nghiệm là x_0, và x_0 không là nghiệm của P(x) = 0 thì đồ thị có tiệm cận đứng là $x = x_0$

- Nếu bậc (P(x)) ≤ bậc (Q(x)) thì đồ thị có tiệm cận ngang.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

• Lý thuyết về đường tiệm cận.

• Nhận dạng bảng biến thiên, nhận dạng hàm số.

• Tìm đường tiệm cận (biết BBT, đồ thị).

• Tìm đường tiệm cận (biết y).

• Đếm số tiệm cận (Biết BBT, đồ thị).

• Đếm số tiệm cận (biết y).

• Biện luận số đường tiệm cận.

• Tiệm cận thỏa mãn điều kiện.

• Tổng hợp tiệm cận với diện tích, góc, khoảng cách.

HavaMATH

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ THAM KHẢO-BGD – 2020-2021) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-1}$

A. $x=1$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-2$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Tìm nghiệm của mẫu số, giả sử tập nghiệm gồm n số $x_1, x_2, ..., x_n \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$.

B1: Với mỗi số $x_i, i=1,2,...,n$ tính giới hạn $\lim\limits_{x\to x_i^+} y, \lim\limits_{x\to x_i^-} y$. Nếu ít nhất một trong hai giới hạn này là vô cực thì $x=x_i$ là tiệm cận đứng.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x+4}{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x+4}{x-1}=-\infty \Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Mức độ 1

Câu 1. Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$ là

A. $x=2$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-2$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$. Phát biểu nào sau đây đúng?

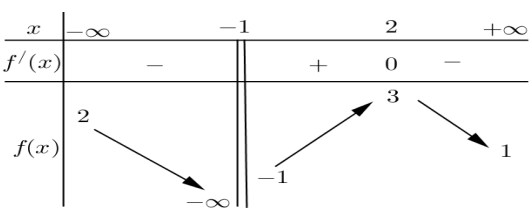
A. Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $y=3$ và $y=-3$.

B. Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng là $x=3$ và $x=-3$.

C. Đồ thị hàm số có duy nhất một đường tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $x=3$ và $x=-3$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $f(x)$ là

A. $y=-1$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

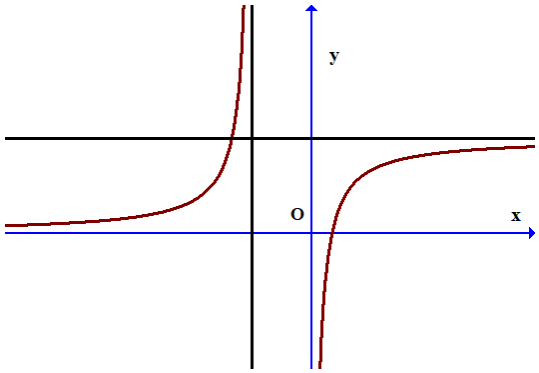
Câu 4. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{3-x}$ là

A. $y=\dfrac{2}{3}$. **B.** $x=-2$. **C.** $y=-2$. **D.** $x=3$.

Câu 5. Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{x+2}$ là

A. $x=0$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=3$. **D.** $y=0$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Hỏi đồ thị hàm số trên có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** Không có tiệm cận.

C. 2. **D.** 3.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ và $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$.

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng.

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=-2$ và $x=1$.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

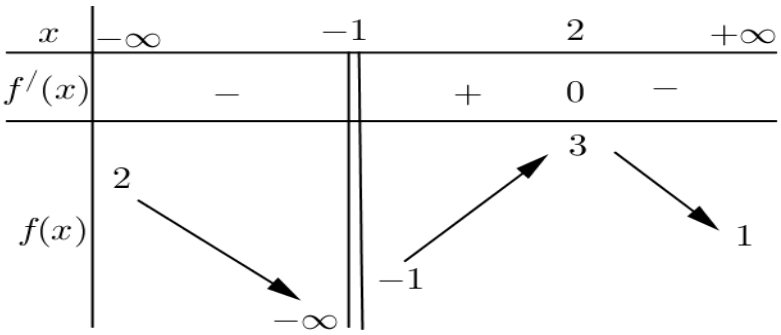
Câu 8. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{3-x}$ là

A. $y=\dfrac{2}{3}$. **B.** $x=-2$. **C.** $y=-2$. **D.** $x=3$.

Câu 9. Đường thẳng $y=\dfrac{1}{3}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào dưới đây?

A. $y=\dfrac{3x+1}{x-3}$ **B.** $y=\dfrac{x+1}{3x-3}$ **C.** $y=\dfrac{2x+1}{3x-1}$ **D.** $y=\dfrac{-x+1}{3x-1}$

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Đồ thị hàm số $f(x)$ có bao nhiêu tiệm cận ngang?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	A	B	C	B	A	C	C	B	B

Mức độ 2

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$ và hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=\pm 2$.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$, không có tiệm cận đứng.

D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang, có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=\pm 2$.

Câu 2. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-4}{(x+2)^2(x+3)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 3. Tổng số các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x-3}}$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 4. Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-4}$ tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có chu vi bằng

A. 6. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 16.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{(m+2)x-3}{4-x}$ đi qua điểm $A(-1;2)$.

A. $m=-2$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=2$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây. Hỏi đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 7. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 8. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x^2-4x-12}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 9. Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x+3}{x-2}$ tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng

A. 3. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x-5}{x-m}$ đi qua điểm $A(-3;1)$.

A. $m=-3$. **B.** $m=-4$. **C.** $m=5$. **D.** $m=4$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	C	C	B	C	A	D	A	C	A

Mức độ 3

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2021;2021]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-mx+4}$ có 3 đường tiệm cận?

A. 4033. **B.** 4034. **C.** 2017. **D.** 2016.

Câu 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x+5+\sqrt{2-x}}{\sqrt{x^2-3x+2}}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

B. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

C. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-1$.

D. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y=-1$ và $y=1$.

Câu 3. Tìm điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang bằng khoảng cách từ M đến trục tung.

A. $M\left(2;\dfrac{1}{3}\right)$. **B.** $M(2;1), M(4;3)$.

C. $M(1;0), M(-2;3)$. **D.** $M(0;1), M(-2;3)$.

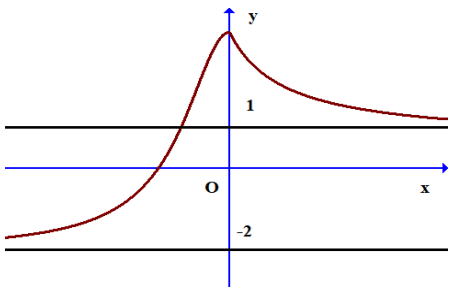
Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+2}{x^3-3x^2+m}$ có nhiều đường tiệm cận nhất.

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-4 \end{array}\right.$. **C.** $0<m<4$. **D.** $-4<m<0$.

Câu 5. Số các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+m}{mx-2}$ có đúng 1 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang, đồng thời hai tiệm cận này tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 18 là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có tiệm cận ngang là

A. $y=1$ và $y=-2$. **B.** $y=-1$ và $y=-2$. **C.** $y=1$ và $y=2$. **D.** $y=2$.

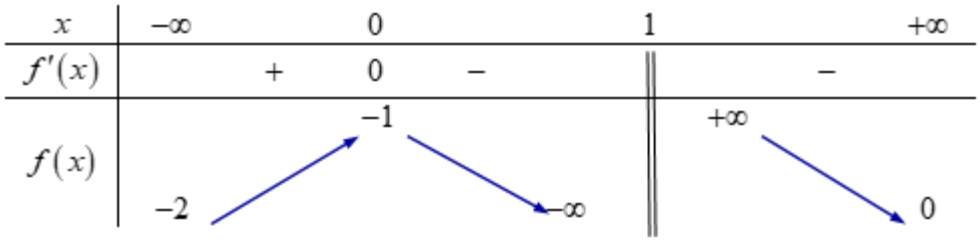
Câu 7. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-mx-3m}}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$. **B.** $\left(0;+\infty\right)$. **C.** $\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right]$. **D.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 8. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ $\left(C\right)$. Gọi M là điểm bất kỳ trên $\left(C\right)$, d là tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị $\left(C\right)$. Giá trị nhỏ nhất của d là

A. 5. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 2

Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:



Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f\left(x\right)+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 10. Cho hàm số $y=\dfrac{1-3x}{3-x}$ có đồ thị $\left(C\right)$. Điểm M nằm trên $\left(C\right)$ sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng gấp hai lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang của $\left(C\right)$. Khoảng cách từ M đến giao điểm hai đường tiệm cận của $\left(C\right)$ bằng

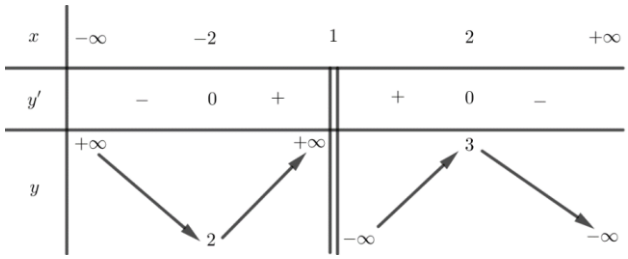
A. $3\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** 5. **D.** $2\sqrt{5}$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	C	C	C	C	A	D	C	D

Mức độ 4

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:



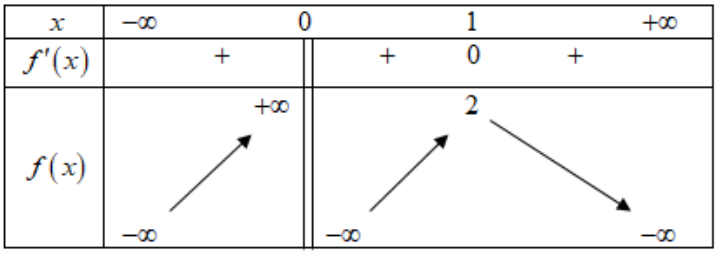
Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2021}{f^2(x)+2f(x)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị thực của m để đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{m^2x-\sqrt{x^2+x+6}}{x-1}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=3$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** Vô số.

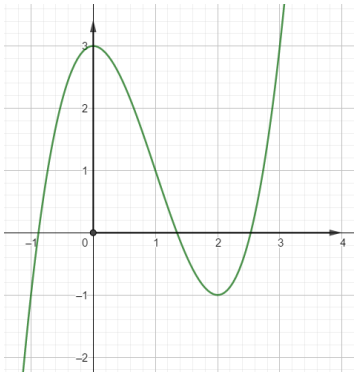
Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên



Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{f^2(x)}{f(x)-m}$ có đúng 3 tiệm cận đứng.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

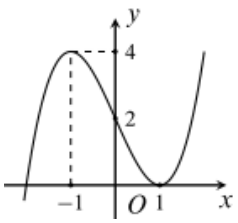
Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2}{f\left(f(x)\right)-m}$ có số đường tiệm cận đứng nhiều nhất.

A. $-1\le m\le 3$. **B.** $-1<m<3$. **C.** $0<m<3$. **D.** $-1\le m<3$.

Câu 5. Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



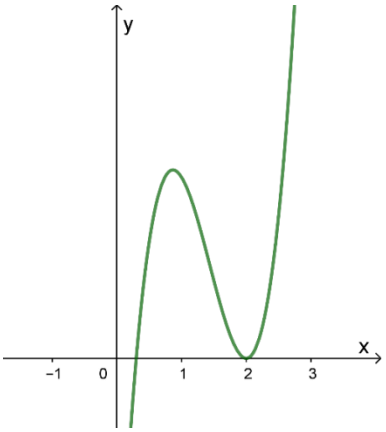
Hàm số $g(x)=\dfrac{\left(x^2-1\right)\sqrt{x+1}}{f^2(x)-4f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 6. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax^2+x-3}{4x^2+bx+1}$ có một đường tiệm cận ngang là $y=c$ và chỉ có một đường tiệm cận đứng. Tính $\dfrac{a}{bc}$ biết rằng a là số thực dương và $ab=4$?

A. $\dfrac{a}{bc}=\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{a}{bc}=1$. **C.** $\dfrac{a}{bc}=4$. **D.** $\dfrac{a}{bc}=2$.

Câu 7. Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{2x+1}}{\left(x^4-5x^2+4\right).f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

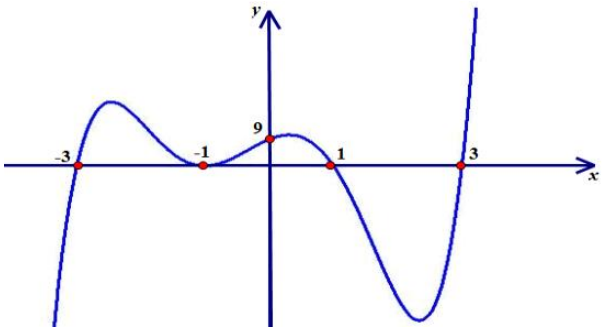
Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a\in[-2021;2021]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{ax^2+2}}$ có tiệm cận ngang?

A. 2022. **B.** 2021. **C.** 4042. **D.** 2020.

Câu 9. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$ có đồ thị là (C), M là điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai đường tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB=2\sqrt{5}$. Gọi S là tổng các hoành độ của tất cả các điểm M thỏa mãn bài toán. Tìm giá trị của S.

A. 8. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=(x+3)(x+1)^2(x-1)(x-3)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{2x-3}}{f^2(x)-9f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 3. **B.** 2. **C.** 9. **D.** 8.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	C	A	B	D	B	B	A	A	B