

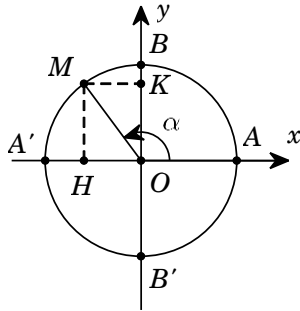
GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN

I – GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CUNG α

1. Định nghĩa

Trên đường tròn lượng giác cho cung \widehat{AM} có số đo $\widehat{AM} = \alpha$ (còn viết ..)



- Tung độ $y = \overline{OK}$ của điểm M gọi là sin của α và kí hiệu là $\sin \alpha$.

$$\boxed{\sin \alpha = \overline{OK}.}$$

- Hoành độ $x = \overline{OH}$ của điểm M gọi là cosin của α và kí hiệu là $\cos \alpha$.

$$\boxed{\cos \alpha = \overline{OH}.}$$

- Nếu $\cos \alpha \neq 0$, tỉ số $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ gọi là tang của α và kí hiệu là $\tan \alpha$ (người ta còn dùng kí hiệu $\text{tg } \alpha$)

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

- Nếu $\sin \alpha \neq 0$, tỉ số $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ gọi là cotang của α và kí hiệu là $\cot \alpha$ (người ta còn dùng kí hiệu $\text{cotg } \alpha$): $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Các giá trị $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ được gọi là các **giá trị lượng giác của cung α** .

Ta cũng gọi trục tung là **trục sin**, còn trục hoành là **trục cosin**

2. Hệ quả

- 1) $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Hơn nữa, ta có

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha + k2\pi) &= \sin \alpha, \quad \forall k \in \mathbb{Z}; \\ \cos(\alpha + k2\pi) &= \cos \alpha, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}}$$

- 2) Vì $-1 \leq \overline{OK} \leq 1$; $-1 \leq \overline{OH} \leq 1$ nên ta có

$$\begin{cases} -1 \leq \sin \alpha \leq 1 \\ -1 \leq \cos \alpha \leq 1. \end{cases}$$

3) Với mọi $m \in \mathbb{R}$ mà $-1 \leq m \leq 1$ đều tồn tại α và β sao cho $\sin \alpha = m$ và $\cos \beta = m$.

4) $\tan \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

5) $\cot \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

6) Dấu của các giá trị lượng giác của góc α phụ thuộc vào vị trí điểm cuối của cung $\widehat{AM} = \alpha$ trên đường tròn lượng giác.

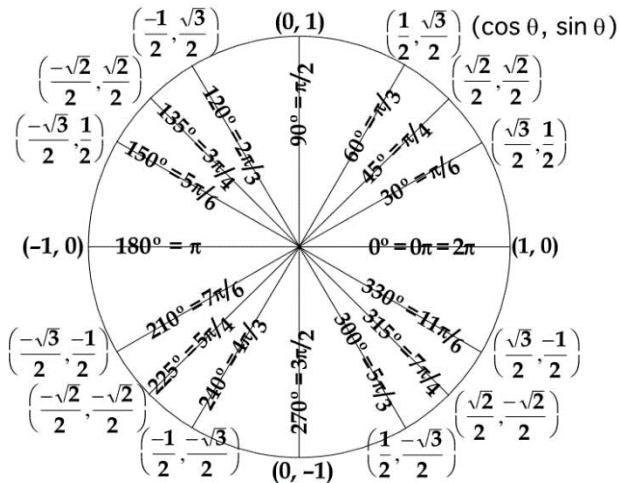
Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác

| Giá trị lượng giác \ Góc phần tư | Góc phần tư | | | |
|----------------------------------|-------------|----|-----|----|
| | I | II | III | IV |
| $\cos \alpha$ | + | - | - | + |
| $\sin \alpha$ | + | + | - | - |
| $\tan \alpha$ | + | - | + | - |
| $\cot \alpha$ | + | - | + | - |

Mẹo ghi nhớ: “*Nhất cả, nhị sin, tam tan, tứ cos*”

3. Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt

| Góc α | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | π | $\frac{3\pi}{2}$ | 2π |
|---------------|-------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|---------|------------------|---------|
| | 0^0 | 30^0 | 45^0 | 60^0 | 90^0 | 120^0 | 135^0 | 180^0 | 270^0 | 360^0 |
| $\sin \alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0 | -1 | 0 |
| $\cos \alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | .. | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | -1 | 0 | 1 |
| $\tan \alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | | $-\sqrt{3}$ | -1 | 0 | | 0 |
| $\cot \alpha$ | | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | -1 | | 0 | |



II – Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA TANG VÀ CÔTANG

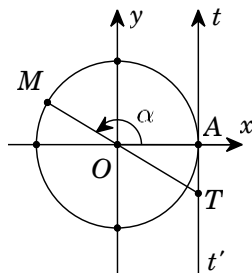
1. Ý nghĩa hình học của $\tan \alpha$

Từ A vẽ tiếp tuyến $t'At$ với đường tròn lượng giác. Ta coi tiếp tuyến này là một trục số bằng cách chọn gốc tại A .

Gọi T là giao điểm của OM với trục $t'At$.

$\tan \alpha$ được biểu diễn bởi độ dài đại số của vectơ \overline{AT} trên trục $t'At$. Viết: $\boxed{\tan \alpha = \overline{AT}}$

Trục $t'At$ được gọi là **trục tang**.



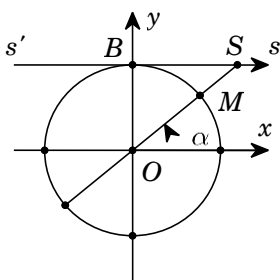
2. Ý nghĩa hình học của $\cot \alpha$

Từ B vẽ tiếp tuyến $s'Bs$ với đường tròn lượng giác. Ta coi tiếp tuyến này là một trục số bằng cách chọn gốc tại B .

Gọi S là giao điểm của OM với trục $s'Bs$

$\cot \alpha$ được biểu diễn bởi độ dài đại số của vectơ \overline{BS} trên trục $s'Bs$. Viết: $\boxed{\cot \alpha = \overline{BS}}$

Trục $s'Bs$ được gọi là **trục côtang**.



Nhận xét: $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha, \forall k \in \mathbb{Z};$
 $\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}.$

III – QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

1. Công thức lượng giác cơ bản

Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hằng đẳng thức sau

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

2. Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt

| Góc đối nhau (α và $-\alpha$) | Góc bù nhau (α và $\pi - \alpha$) | Góc phụ nhau (α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$) |
|--|--|---|
| $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ | $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ |
| $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ | $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ |
| $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ | $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ | $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$ |
| $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$ | $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$ | $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$ |

| Góc hơn kém π (α và $\pi + \alpha$) | Góc hơn kém $\frac{\pi}{2}$ (α và $\frac{\pi}{2} + \alpha$) |
|--|--|
| $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$ |
| $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ |

| | |
|------------------------------------|--|
| $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$ | $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$ |
| $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$ | $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$ |

Chú ý: Để nhớ nhanh các công thức trên ta nhớ câu: " cos - đối, sin - bù, phụ - chéo, hơn kém π tang cotang, hơn kém $\frac{\pi}{2}$ chéo sin". Với nguyên tắc nhắc đến giá trị nào thì nó bằng còn không nhắc thì đổi.

B. CÁC DẠNG TOÁN:

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH DẤU CỦA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

I. PHƯƠNG PHÁP: Dấu của các giá trị lượng giác của góc α phụ thuộc vào vị trí điểm cuối (điểm ngọn) của cung $\widehat{AM} = \alpha$ trên đường tròn lượng giác. Vì thế cần xác định vị trí điểm M trên đường tròn lượng giác rồi sử dụng bảng xét dấu các giá trị lượng giác.

Bảng xét dấu của các giá trị lượng giác

| Vị trí điểm M thuộc góc phần tư | I | II | III | IV |
|------------------------------------|--------------------|----|-----|----|
| | Giá trị lượng giác | | | |
| $\cos \alpha$ | + | - | - | + |
| $\sin \alpha$ | + | + | - | - |
| $\tan \alpha$ | + | - | + | - |
| $\cot \alpha$ | + | - | + | - |

II. VÍ DỤ MINH HỌA:

Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xác định dấu của các biểu thức sau:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$

b) $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

c) $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha)$

d) $\sin\frac{14\pi}{9} \cdot \cot(\pi + \alpha)$

Lời giải

a) Ta có $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \pi < \frac{\pi}{2} + \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) < 0$

b) Ta có $-\frac{\pi}{2} > -\alpha > -\pi \Rightarrow 0 > \frac{3\pi}{2} - \alpha > -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0$

c) Ta có $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow 0 < -\frac{\pi}{2} + \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) > 0$

Và $0 < \pi - \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan(\pi + \alpha) > 0$

Vậy $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi + \alpha) > 0$.

d) Ta có $\frac{3\pi}{2} < \frac{14\pi}{9} < 2\pi \Rightarrow \sin \frac{14\pi}{9} < 0$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \pi + \alpha < 2\pi$ suy ra $\cot(\pi + \alpha) < 0$.

Vậy $\sin \frac{14\pi}{9} \cdot \cot(\pi + \alpha) > 0$.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM:

Câu 1. Điểm cuối của α thuộc góc phần tư thứ nhất của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả **đúng** trong các kết quả sau đây.

- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha < 0$. C. $\tan \alpha < 0$. D. $\cot \alpha < 0$.

Câu 2. Điểm cuối của α thuộc góc phần tư thứ ba của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là **sai** ?

- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha < 0$. C. $\tan \alpha > 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Câu 3. Điểm cuối của α thuộc góc phần tư thứ tư của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là **đúng** ?

- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha > 0$. C. $\tan \alpha > 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Câu 4. Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ cùng dấu?

- A. Thứ II. B. Thứ IV. C. Thứ II hoặc IV. D. Thứ I hoặc III.

Câu 5. Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\sin \alpha$, $\tan \alpha$ trái dấu?

- A. Thứ I. B. Thứ II hoặc IV. C. Thứ II hoặc III. D. Thứ I hoặc IV.

Câu 6. Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

- A. Thứ II. B. Thứ I hoặc II. C. Thứ II hoặc III. D. Thứ I hoặc IV.

Câu 7. Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\sqrt{\sin^2 \alpha} = \sin \alpha$.

- A. Thứ III. B. Thứ I hoặc III. C. Thứ I hoặc II. D. Thứ III hoặc IV.

Câu 8. Cho $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $\tan \alpha > 0$; $\cot \alpha > 0$. B. $\tan \alpha < 0$; $\cot \alpha < 0$.
C. $\tan \alpha > 0$; $\cot \alpha < 0$. D. $\tan \alpha < 0$; $\cot \alpha > 0$.

Câu 9. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $\sin(\alpha - \pi) \geq 0$. B. $\sin(\alpha - \pi) \leq 0$. C. $\sin(\alpha - \pi) < 0$. D. $\sin(\alpha - \pi) < 0$.

Câu 10. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) > 0$. B. $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \geq 0$. C. $\tan(\alpha + \pi) < 0$. D. $\tan(\alpha + \pi) > 0$.

Câu 11. Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị lượng giác nào sau đây luôn dương ?

- A. $\sin(\pi + \alpha)$. B. $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. C. $\cos(-\alpha)$. D. $\tan(\pi + \alpha)$.

Câu 12. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0$. B. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0$.
C. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \leq 0$. D. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \geq 0$.

Câu 13. Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xác định dấu của biểu thức $M = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha)$.

- A. $M \geq 0$. B. $M > 0$. C. $M \leq 0$. D. $M < 0$.

Câu 14. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xác định dấu của biểu thức $M = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cot(\pi + \alpha)$.

- A. $M \geq 0$. B. $M > 0$. C. $M \leq 0$. D. $M < 0$.

Câu 15. Cho tam giác ABC có góc A tù. Cho các biểu thức sau:

- (1) $M = \sin A + \sin B + \sin C$ (2) $N = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$
(3) $P = \cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}$ (4) $Q = \cot A \tan B \cot C$

Số các biểu thức mang giá trị dương là:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI :

Câu 1. Điểm cuối của α thuộc góc phần tư thứ nhất $\rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \\ \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0 \end{cases} \rightarrow$ **Chọn A.**

Câu 2. Điểm cuối của α thuộc góc phần tư thứ hai $\rightarrow \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \\ \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0 \end{cases} \rightarrow$ **Chọn A.**

Câu 3. Điểm cuối của α thuộc góc phần tư thứ hai $\rightarrow \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha > 0 \\ \tan \alpha < 0 \\ \cot \alpha < 0 \end{cases} \rightarrow$ **Chọn B.**

Câu 4. Chọn D.

Câu 5. Chọn C.

Câu 6. Ta có $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = \sqrt{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = |\cos \alpha| \Leftrightarrow \cos \alpha$.

Đẳng thức $|\cos \alpha| \Leftrightarrow \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha \geq 0 \rightarrow$ điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ I hoặc IV. **Chọn D.**

Câu 7. Ta có $\sqrt{\sin^2 \alpha} \Leftrightarrow \sin \alpha \Leftrightarrow |\sin \alpha| = \sin \alpha$.

Đẳng thức $|\sin \alpha| = \sin \alpha \rightarrow \sin \alpha \geq 0 \rightarrow$ điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ I hoặc II. **Chọn C.**

Câu 8. Ta có $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2} \rightarrow$ điểm cuối cùng $\alpha - \pi$ thuộc góc phần tư thứ I

$\rightarrow \begin{cases} \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 9. Ta có $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow -\pi < \alpha - \pi < -\frac{\pi}{2} \rightarrow$ điểm cuối cùng $\alpha - \pi$ thuộc góc phần tư thứ

III $\rightarrow \sin(\alpha - \pi) < 0$. **Chọn D.**

Câu 10. Ta có :

$$\begin{cases} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{2} < \pi \rightarrow \cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0 \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \pi < \alpha + \pi < \frac{3\pi}{2} \rightarrow \tan(\alpha + \pi) > 0 \end{cases}$$

Chọn D.

Câu 11. Ta có

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha; \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha; \cos(-\alpha) = \cos \alpha; \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha.$$

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \\ \tan \alpha < 0 \end{cases} \rightarrow \text{Chọn B.}$$

$$\text{Câu 12. Ta có } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \rightarrow 0 < \frac{3\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0 \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0 \end{cases} \rightarrow \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0.$$

Chọn B.

Câu 13. Ta có :

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow 0 < -\frac{\pi}{2} + \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) > 0 \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow 0 < \pi - \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \tan(\pi - \alpha) > 0 \end{cases}$$

$\rightarrow M > 0$. **Chọn B.**

Câu 14. Ta có :

$$\begin{cases} \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \rightarrow -\frac{3\pi}{2} < -\alpha < -\pi \rightarrow -\pi < \frac{\pi}{2} - \alpha < -\frac{\pi}{2} \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) < 0 \\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi < \pi + \alpha < \frac{5\pi}{2} \rightarrow \cot(\pi + \alpha) > 0 \end{cases}$$

$\rightarrow M < 0$. **Chọn D.**

Câu 15. Ta có: A tù nên $\cos A < 0$; $\sin A > 0$; $\tan A < 0$; $\cot A < 0$

Do đó: $M > 0$; $N < 0$; $P > 0$; $Q < 0$. **Chọn B.**

DẠNG 2: TÍNH GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

I. PHƯƠNG PHÁP :

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

II. VÍ DỤ MINH HỌA :

Ví dụ 1 : Cho $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Khi đó $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$ bằng

- A. $-\frac{2}{3}$. B. $-\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - 2\pi\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 2: Cho $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. Giá trị của $\tan 15^\circ$ bằng :

- A. $\sqrt{3} - 2$ B. $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ C. $2 - \sqrt{3}$ D. $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

Lời giải

Chọn C

$$\tan^2 15^\circ = \frac{1}{\cos^2 15^\circ} - 1 = \frac{4}{2+\sqrt{3}} - 1 = (2-\sqrt{3})^2 \Rightarrow \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}.$$

Ví dụ 3 : Cho $\tan \alpha = -\frac{4}{5}$ với $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Khi đó :

- A. $\sin \alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}$, $\cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}}$. B. $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$, $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$.
 C. $\sin \alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}$, $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$. D. $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$, $\cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}}$.

Lời giải

Chọn C

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{16}{25} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{41}{25} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{25}{41} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{5}{\sqrt{41}}$$

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \cos \alpha > 0 \rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

$$\rightarrow \sin \alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}$$

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$

- A. $\cot \alpha = 2$. B. $\cot \alpha = \frac{1}{4}$. C. $\cot \alpha = \frac{1}{2}$. D. $\cot \alpha = \sqrt{2}$.

Câu 2. Tính giá trị của $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right]$.

- A. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 C. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{1}{2}$. D. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 3. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos \alpha$.

- A. $\cos \alpha = \frac{1}{13}$. B. $\cos \alpha = \frac{5}{13}$. C. $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. D. $\cos \alpha = -\frac{1}{13}$.

Câu 4. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan \alpha$.

- A. $\tan \alpha = -\frac{3}{\sqrt{5}}$. B. $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\tan \alpha = -\frac{4}{\sqrt{5}}$. D. $\tan \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 5. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$.

- A. $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$. B. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. C. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$. D. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Câu 6. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan \alpha$.

- A. $\tan \alpha = -\frac{12}{5}$. B. $\tan \alpha = \frac{5}{12}$. C. $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$. D. $\tan \alpha = \frac{12}{5}$.

Câu 7. Cho $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$.

- A. $\sin \alpha = \frac{1}{5}$. B. $\sin \alpha = -\frac{1}{5}$. C. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. D. $\sin \alpha = \pm \frac{3}{5}$.

Câu 8. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$ và $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Tính $P = \cos \alpha + \sin \alpha$.

A. $P = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$. B. $P = 1 - \sqrt{5}$. C. $P = \frac{3\sqrt{5}}{2}$. D. $P = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Câu 9. Cho góc α thỏa $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cot \alpha = -\frac{4}{5}$. B. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. C. $\tan \alpha = \frac{5}{4}$. D. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Câu 10. Cho góc α thỏa $\cot \alpha = \frac{3}{4}$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$. B. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. C. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. D. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

Câu 11. Cho góc α thỏa mãn $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$.

A. $P = 2\sqrt{2}$. B. $P = -2\sqrt{2}$. C. $P = \frac{\sqrt{2}}{4}$. D. $P = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 12. Cho góc α thỏa mãn $3\cos \alpha + 2\sin \alpha = 2$ và $\sin \alpha < 0$. Tính $\sin \alpha$.

A. $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$. B. $\sin \alpha = -\frac{7}{13}$. C. $\sin \alpha = -\frac{9}{13}$. D. $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$.

Câu 13. Cho $\cot \alpha = -3\sqrt{2}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khi đó giá trị $\tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2}$ bằng :

A. $2\sqrt{19}$. B. $-2\sqrt{19}$. C. $-\sqrt{19}$. D. $\sqrt{19}$.

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI:

Câu 1. Ta có : $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. **Chọn A.**

Câu 2. Ta có $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = \cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) = \cos\frac{5\pi}{4}$
 $= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn B.**

Câu 3. Ta có $\begin{cases} \cos \alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm\frac{5}{13} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{5}{13}$. **Chọn D.**

Câu 4. Ta có
$$\begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{2}{3} \\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = -\frac{2}{3} \longrightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Chọn B.

Câu 5. Ta có
$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} 1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \frac{\pi}{2} + 504.2\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 504.2\pi \end{cases}$$

$\longrightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$. Mà $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \longleftrightarrow -\frac{4}{3} = \frac{\sin \alpha}{-\frac{3}{5}} \longrightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$. **Chọn D.**

Câu 6. Ta có
$$\begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{5}{13} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi. \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = \frac{5}{13} \longrightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{5}{12}.$$

Chọn C.

Câu 7. Ta có: $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{3}{5}$.

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin \alpha > 0$. Suy ra, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

Câu 8. Ta có
$$\begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{5} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 180^\circ < \alpha < 270^\circ \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\longrightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. Do đó, $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **Chọn A.**

Câu 9. Ta có
$$\begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \\ 90^\circ < \alpha < 180^\circ \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}. \text{ **Chọn D.**}$$

Câu 10. Ta có
$$\begin{cases} \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \longrightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}. \\ 0^\circ < \alpha < 90^\circ \end{cases} \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 11. Ta có $P = \tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(3\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Theo giả thiết: $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\sin \alpha = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{3}$.

Ta có
$$\begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \longrightarrow P = -2\sqrt{2}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 12. Ta có $3 \cos \alpha + 2 \sin \alpha = 2 \Leftrightarrow (3 \cos \alpha + 2 \sin \alpha)^2 = 4$

$$\Leftrightarrow 9 \cos^2 \alpha + 12 \cos \alpha \cdot \sin \alpha + 4 \sin^2 \alpha = 4 \Leftrightarrow 5 \cos^2 \alpha + 12 \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha (5 \cos \alpha + 12 \sin \alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ 5 \cos \alpha + 12 \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

- $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \sin \alpha = 1$: loại (vì $\sin \alpha < 0$).

- $5 \cos \alpha + 12 \sin \alpha = 0$, ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 5 \cos \alpha + 12 \sin \alpha = 0 \\ 3 \cos \alpha + 2 \sin \alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -\frac{5}{13} \\ \cos \alpha = \frac{12}{13} \end{cases}$$

Chọn A.

Câu 13.

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha = 1 + 18 = 19 \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{19} \rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{19}}$$

Vì

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \sin \alpha > 0 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{19}}$$

$$\text{Suy ra } \tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\sin \alpha} = 2\sqrt{19}.$$

Chọn A

DẠNG 3: TÍNH GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC KHI BIẾT ĐIỀU KIỆN NÀO ĐÓ

I. PHƯƠNG PHÁP :

- Từ hệ thức lượng giác cơ bản là mối liên hệ giữa hai giá trị lượng giác, khi biết một giá trị lượng giác ta sẽ suy ra được giá trị còn lại. Cần lưu ý tới dấu của giá trị lượng giác để chọn cho phù hợp.
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ trong đại số.

II. VÍ DỤ MINH HỌA :

Ví dụ 1: a) Cho $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

b) Cho $\tan \alpha = 3$. Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

c) Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $C = \frac{\cot \alpha - 2 \tan \alpha}{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } A = \frac{\tan \alpha + 3 \frac{1}{\tan \alpha}}{\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha + 3}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 1} = 1 + 2 \cos^2 \alpha$$

$$\text{Suy ra } A = 1 + 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{17}{9}$$

$$\text{b) } B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3 \cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha \tan^2 \alpha + 1 - \tan^2 \alpha + 1}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha \tan^2 \alpha + 1}$$

$$\text{Suy ra } B = \frac{3 \cdot 9 + 1 - 9 + 1}{27 + 3 + 2 \cdot 3 \cdot 9 + 1} = \frac{2}{9}$$

$$\text{c) } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{4}{5} \\ \cos \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\text{Vì } 90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}. \text{ Do đó: } \tan \alpha = -\frac{3}{4} \text{ và } \cot \alpha = -\frac{4}{3}.$$

$$C = \frac{\cot \alpha - 2 \tan \alpha}{\tan \alpha + 3 \cot \alpha} = \frac{-\frac{4}{3} - 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}{-\frac{3}{4} + 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{-2}{57}$$

Ví dụ 2: Cho $3 \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $A = 2 \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 3 \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 \sin^4 \alpha - 1 - \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6 \sin^4 \alpha - 2 - 2 \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha = 1 \Leftrightarrow 4 \sin^4 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 \alpha - 1 \quad 2 \sin^2 \alpha + 3 = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2 \alpha - 1 = 0 \text{ (Do } 2 \sin^2 \alpha + 3 > 0 \text{)}$$

$$\text{Suy ra } \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta lại có } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra } A = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Ví dụ 3: Biết $\sin x + \cos x = m$. Tính $\sin x \cos x$ và $|\sin^4 x - \cos^4 x|$

Lời giải

$$*) \text{ Ta có } \sin x + \cos x = m \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x \quad (*)$$

$$\text{Mặt khác } \sin x + \cos x = m \text{ nên } m^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \text{ hay } \sin x \cos x = \frac{m^2 - 1}{2}$$

$$*) \text{ Đặt } A = |\sin^4 x - \cos^4 x|. \text{ Ta có}$$

$$A = \left| \sin^2 x + \cos^2 x \quad \sin^2 x - \cos^2 x \right| = |(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)|$$

$$\Rightarrow A^2 = (\sin x + \cos x)^2 (\sin x - \cos x)^2 = (1 + 2 \sin x \cos x) (1 - 2 \sin x \cos x)$$

$$\Rightarrow A^2 = \left(1 + \frac{m^2 - 1}{2}\right) \left(1 - \frac{m^2 - 1}{2}\right) = \frac{3 + 2m^2 - m^4}{4}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{\sqrt{3 + 2m^2 - m^4}}{2}$$

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $P = \sqrt{\tan^2 \alpha - 2 \tan \alpha + 1}$.

A. $P = -\frac{1}{3}$. **B.** $P = \frac{1}{3}$. **C.** $P = \frac{7}{3}$. **D.** $P = -\frac{7}{3}$.

Câu 2. Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ và $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính $P = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\alpha$.

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $P = \frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $P = \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 3. Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ và $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\alpha.$$

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = -1$. **D.** $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4. Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \frac{\sin^2\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos^2\alpha}$.

A. $P = \frac{30}{11}$. **B.** $P = \frac{31}{11}$. **C.** $P = \frac{32}{11}$. **D.** $P = \frac{34}{11}$.

Câu 5. Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha = 2$. Tính $P = \frac{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}{5\cos\alpha + 7\sin\alpha}$.

A. $P = -\frac{4}{9}$. **B.** $P = \frac{4}{9}$. **C.** $P = -\frac{4}{19}$. **D.** $P = \frac{4}{19}$.

Câu 6. Cho góc α thỏa mãn $\cot\alpha = \frac{1}{3}$. Tính $P = \frac{3\sin\alpha + 4\cos\alpha}{2\sin\alpha - 5\cos\alpha}$.

A. $P = -\frac{15}{13}$. **B.** $P = \frac{15}{13}$. **C.** $P = -13$. **D.** $P = 13$.

Câu 7. Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha = 5$. Tính $P = \sin^4\alpha - \cos^4\alpha$.

A. $P = \frac{9}{13}$. **B.** $P = \frac{10}{13}$. **C.** $P = \frac{11}{13}$. **D.** $P = \frac{12}{13}$.

Câu 8. Cho góc α thỏa mãn $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{5}{4}$. Tính $P = \sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

A. $P = \frac{9}{16}$. **B.** $P = \frac{9}{32}$. **C.** $P = \frac{9}{8}$. **D.** $P = \frac{1}{8}$.

Câu 9. Cho góc α thỏa mãn $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{12}{25}$ và $\sin\alpha + \cos\alpha > 0$. Tính $P = \sin^3\alpha + \cos^3\alpha$.

A. $P = \frac{91}{125}$. **B.** $P = \frac{49}{25}$. **C.** $P = \frac{7}{5}$. **D.** $P = \frac{1}{9}$.

Câu 10. Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ và $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Tính $P = \sin\alpha - \cos\alpha$.

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $P = \frac{1}{2}$. **C.** $P = -\frac{1}{2}$. **D.** $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 11. Cho góc α thỏa mãn $\sin\alpha + \cos\alpha = m$. Tính $P = |\sin\alpha - \cos\alpha|$.

A. $P = 2 - m$. B. $P = 2 - m^2$. C. $P = m^2 - 2$. D. $P = \sqrt{2 - m^2}$.

Câu 12. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$. Tính $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

A. $P = 1$. B. $P = 2$. C. $P = 3$. D. $P = 4$.

Câu 13. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha = 5$. Tính $P = \tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha$.

A. $P = 100$. B. $P = 110$. C. $P = 112$. D. $P = 115$.

Câu 14. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

A. $P = 12$. B. $P = 14$. C. $P = 16$. D. $P = 18$.

Câu 15. Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\tan \alpha - \cot \alpha = 1$. Tính $P = \tan \alpha + \cot \alpha$.

A. $P = 1$. B. $P = -1$. C. $P = -\sqrt{5}$. D. $P = \sqrt{5}$.

Câu 16. Cho góc α thỏa $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $P = \frac{2 \tan \alpha + 3 \cot \alpha + 1}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

A. $P = \frac{19 + 2\sqrt{2}}{9}$. B. $P = \frac{19 - 2\sqrt{2}}{9}$. C. $P = \frac{26 - 2\sqrt{2}}{9}$. D. $P = \frac{26 + 2\sqrt{2}}{9}$.

Câu 17. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính $P = \sqrt{5 + 3 \tan \alpha} + \sqrt{6 - 4 \cot \alpha}$.

A. $P = 4$. B. $P = -4$. C. $P = 6$. D. $P = -6$.

Câu 18. Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ thì $3 \sin x + 2 \cos x$ bằng

A. $\frac{5 - \sqrt{7}}{4}$ hay $\frac{5 + \sqrt{7}}{4}$. B. $\frac{5 - \sqrt{5}}{7}$ hay $\frac{5 + \sqrt{5}}{4}$.
C. $\frac{2 - \sqrt{3}}{5}$ hay $\frac{2 + \sqrt{3}}{5}$. D. $\frac{3 - \sqrt{2}}{5}$ hay $\frac{3 + \sqrt{2}}{5}$.

Câu 19. Biết $\tan x = \frac{2b}{a-c}$. Giá trị của biểu thức $A = a \cos^2 x + 2b \sin x \cdot \cos x + c \sin^2 x$ bằng

A. $-a$. B. a . C. $-b$. D. b .

Câu 20. Nếu biết $\frac{\sin^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} = \frac{1}{a+b}$ thì biểu thức $A = \frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3}$ bằng

A. $\frac{1}{(a+b)^2}$. B. $\frac{1}{a^2 + b^2}$. C. $\frac{1}{(a+b)^3}$. D. $\frac{1}{a^3 + b^3}$.

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI :

Câu 1. Ta có $P = \sqrt{\tan \alpha - 1}^2 = |\tan \alpha - 1|$.

Vì $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \longrightarrow \tan \alpha > 1 \longrightarrow P = \tan \alpha - 1$.

Theo giả thiết:
$$\begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \\ \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \tan \alpha = \frac{4}{3} \rightarrow P = \frac{1}{3}$$

Chọn B.

Câu 2. Ta có
$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi \iff \frac{3\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{9\pi}{4} \\ \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \rightarrow \alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \rightarrow \alpha = \pi.$$

Thay $\alpha = \pi$ vào P , ta được $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. **Chọn C.**

Câu 3. Ta có
$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi \iff \frac{5\pi}{6} < \alpha + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{3} \\ \cot\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow \alpha + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} \rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2}.$$

Thay $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ vào P , ta được $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. **Chọn D.**

Câu 4. Ta có
$$\begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{9}{25} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{4}{5}.$$

Thay $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ và $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ vào P , ta được $P = \frac{31}{11}$. **Chọn B.**

Câu 5. Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos \alpha$ ta được $P = \frac{3 \tan \alpha - 2}{5 + 7 \tan \alpha} = \frac{3 \cdot 2 - 2}{5 + 7 \cdot 2} = \frac{4}{19}$

Chọn D.

Câu 6. Chia cả tử và mẫu của P cho $\sin \alpha$ ta được $P = \frac{3 + 4 \cot \alpha}{2 - 5 \cot \alpha} = \frac{3 + 4 \cdot \frac{1}{3}}{2 - 5 \cdot \frac{1}{3}} = 13.$

Chọn D.

Câu 7. Ta có $P = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot *$

Chia hai vế của $*$ cho $\cos^2 \alpha$ ta được $\frac{P}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1$

$$\Leftrightarrow P(1 + \tan^2 \alpha) = \tan^2 \alpha - 1 \Leftrightarrow P = \frac{\tan^2 \alpha - 1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{5^2 - 1}{1 + 5^2} = \frac{12}{13} \quad \text{Chọn D.}$$

Câu 8. Từ giả thiết, ta có $\sin \alpha + \cos \alpha^2 = \frac{25}{16} \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{25}{16}$

$$\rightarrow P = \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{9}{32} \text{ Chọn B.}$$

Câu 9. Áp dụng $a^3 + b^3 = a + b^3 - 3ab a + b$, ta có

$$P = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = \sin \alpha + \cos \alpha^3 - 3 \sin \alpha \cos \alpha \sin \alpha + \cos \alpha.$$

$$\text{Ta có } \sin \alpha + \cos \alpha^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{25}.$$

$$\text{Vì } \sin \alpha + \cos \alpha > 0 \text{ nên ta chọn } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}.$$

$$\text{Thay } \begin{cases} \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5} \\ \sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25} \end{cases} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = \left(\frac{7}{5}\right)^3 - 3 \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{7}{5} = \frac{91}{125} \text{ Chọn A.}$$

Câu 10. Ta có $\sin \alpha - \cos \alpha^2 + \sin \alpha + \cos \alpha^2 = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2.$

$$\text{Suy ra } \sin \alpha - \cos \alpha^2 = 2 - \sin \alpha + \cos \alpha^2 = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Do } 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \text{ suy ra } \sin \alpha < \cos \alpha \text{ nên } \sin \alpha - \cos \alpha < 0. \text{ Vậy } P = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 11. Ta có $\sin \alpha - \cos \alpha^2 + \sin \alpha + \cos \alpha^2 = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2.$

$$\text{Suy ra } \sin \alpha - \cos \alpha^2 = 2 - \sin \alpha + \cos \alpha^2 = 2 - m^2$$

$$\rightarrow () P = |\sin \alpha - \cos \alpha| = \sqrt{2 - m^2} \text{ Chọn D.}$$

Câu 12. Ta có $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = \tan \alpha + \cot \alpha^2 - 2 \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 2^2 - 2 \cdot 1 = 2$

Chọn B.

Câu 13. Ta có $P = \tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha = \tan \alpha + \cot \alpha^3 - 3 \tan \alpha \cot \alpha \tan \alpha + \cot \alpha$

$$= 5^3 - 3 \cdot 5 = 110. \text{ Chọn B.}$$

Câu 14. Ta có $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{4}.$

$$\text{Khi đó } P = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha^2 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha \cos \alpha)^2} = 14 \text{ Chọn B.}$$

Câu 15. Ta có

$$\tan \alpha - \cot \alpha = 1 \Leftrightarrow \tan \alpha - \frac{1}{\tan \alpha} = 1 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha - \tan \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ suy ra $\tan \alpha < 0$ nên $\tan \alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \longrightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{2}{1-\sqrt{5}}$.

Thay $\tan \alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ và $\cot \alpha = \frac{2}{1-\sqrt{5}}$ vào P , ta được $P = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1-\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$

Chọn C.

Câu 16. Ta có
$$\begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \cot \alpha = -2\sqrt{2} \end{cases} \\ 90^\circ < \alpha < 180^\circ \end{cases}$$

Thay
$$\begin{cases} \tan \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \cot \alpha = -2\sqrt{2} \end{cases}$$
 vào P , ta được $P = \frac{26 - 2\sqrt{2}}{9}$. **Chọn C.**

Câu 17. Ta có
$$\begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \rightarrow \sin \alpha = -\frac{4}{5} \cdot \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{4}{3} \\ \cot \alpha = -\frac{3}{4} \end{cases} \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \end{cases}$$

Thay
$$\begin{cases} \tan \alpha = -\frac{4}{3} \\ \cot \alpha = -\frac{3}{4} \end{cases}$$
 vào P , ta được $P = 4$. **Chọn A.**

Câu 18. $\sin x + \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \cos x = -\frac{3}{4} \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = -\frac{3}{8}$

Khi đó $\sin x, \cos x$ là nghiệm của phương trình $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1+\sqrt{7}}{4} \\ \sin x = \frac{1-\sqrt{7}}{4} \end{cases}$

Ta có $\sin x + \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(\sin x + \cos x) = 1$

+) Với $\sin x = \frac{1+\sqrt{7}}{4} \Rightarrow 3\sin x + 2\cos x = \frac{5+\sqrt{7}}{4}$

+) Với $\sin x = \frac{1-\sqrt{7}}{4} \Rightarrow 3\sin x + 2\cos x = \frac{5-\sqrt{7}}{4}$.

Chọn A

Câu 19. $A = a \cos^2 x + 2b \sin x \cdot \cos x + c \sin^2 x \Leftrightarrow \frac{A}{\cos^2 x} = a + 2b \tan x + c \tan^2 x$

$\Leftrightarrow A(1 + \tan^2 x) = a + 2b \tan x + c \tan^2 x \Leftrightarrow$

$A \left(1 + \left(\frac{2b}{a-c} \right)^2 \right) = a + 2b \frac{2b}{a-c} + c \left(\frac{2b}{a-c} \right)^2$

$$\Leftrightarrow A \frac{(a-c)^2 + (2b)^2}{(a-c)^2} = \frac{a(a-c)^2 + 4b^2(a-c) + c4b^2}{(a-c)^2}$$

$$\Leftrightarrow A \frac{(a-c)^2 + (2b)^2}{(a-c)^2} = \frac{a(a-c)^2 + 4b^2a}{(a-c)^2} = \frac{a \cdot ((a-c)^2 + 4b^2)}{(a-c)^2} \Leftrightarrow A = a.$$

Chọn B

Câu 20. Đặt $\cos^2 \alpha = t \Rightarrow \frac{(1-t)^2}{a} + \frac{t^2}{b} = \frac{1}{a+b}$

$$\Leftrightarrow b(1-t)^2 + at^2 = \frac{ab}{a+b} \Leftrightarrow at^2 + bt^2 - 2bt + b = \frac{ab}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)t^2 - 2bt + b = \frac{ab}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 t^2 - 2b(a+b)t + b^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{b}{a+b}$$

Suy ra $\cos^2 \alpha = \frac{b}{a+b}; \sin^2 \alpha = \frac{a}{a+b}$

Vậy: $\frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3} = \frac{a}{(a+b)^4} + \frac{b}{(a+b)^4} = \frac{1}{(a+b)^3}$

Chọn C

DẠNG 4: RÚT GỌN BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC, CHỨNG MINH BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

I. PHƯƠNG PHÁP :

Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản, các hằng đẳng thức đáng nhớ, mối liên hệ của các cung đặc biệt và sử dụng tính chất của giá trị lượng giác để biến đổi

+ Khi chứng minh một đẳng thức ta có thể biến đổi vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lượng khác.

+ Chứng minh biểu thức không phụ thuộc góc x hay đơn giản biểu thức ta cố gắng làm xuất hiện nhân tử chung ở tử và mẫu để rút gọn hoặc làm xuất hiện các hạng tử trái dấu để rút gọn cho nhau.

II. VÍ DỤ MINH HỌA :

Ví dụ 1 : Biểu thức $A = \frac{\cos 750^\circ + \sin 420^\circ}{\sin(-330^\circ) - \cos(-390^\circ)}$ có giá trị rút gọn bằng

A. $-3 - \sqrt{3}$.

B. $2 - 3\sqrt{3}$.

C. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$.

D. $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A.

$$A = \frac{\cos 30^0 + \sin 60^0}{\sin 30^0 - \cos 30^0} = \frac{2\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -3 - \sqrt{3}.$$

Ví dụ 2 : Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi)$, ta được:

A. $A = \cos a + \sin a.$ **B.** $A = 2 \sin a.$ **C.** $A = \sin a - \cos a.$ **D.** $A = 0.$

Lời giải

Chọn D.

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha - \sin \alpha = 0.$$

Ví dụ 3 : Đơn giản biểu thức $A = (1 - \sin^2 x) \cdot \cot^2 x + (1 - \cot^2 x)$, ta được :

A. $A = \sin^2 x.$ **B.** $A = \cos^2 x.$ **C.** $A = -\sin^2 x.$ **D.** $A = -\cos^2 x.$

Lời giải

Chọn A

$$A = (1 - \sin^2 x) \cdot \cot^2 x + (1 - \cot^2 x) = \cot^2 x - \cos^2 x + 1 - \cot^2 x = \sin^2 x.$$

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM:

Câu 1. Biểu thức $A = \frac{\sin 515^0 \cdot \cos(-475^0) + \cot 222^0 \cdot \cot 408^0}{\cot 415^0 \cdot \cot(-505^0) + \tan 197^0 \cdot \tan 73^0}$ có kết quả rút gọn bằng

A. $\frac{1}{2} \sin^2 25^0.$ **B.** $\frac{1}{2} \cos^2 55^0.$ **C.** $\frac{1}{2} \cos^2 25^0.$ **D.** $\frac{1}{2} \sin^2 65^0.$

Câu 2. Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, ta có :

A. $A = 2 \sin a.$ **B.** $A = 2 \cos a.$ **C.** $A = \sin a - \cos a.$ **D.** $A = 0.$

Câu 3. Tính giá trị biểu thức :

$$P = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}.$$

A. $P = -1.$ **B.** $P = 0.$ **C.** $P = 1.$ **D.** $P = 2.$

Câu 4. Tính giá trị biểu thức $P = \sin^2 10^0 + \sin^2 20^0 + \sin^2 30^0 + \dots + \sin^2 80^0.$

A. $P = 0.$ **B.** $P = 2.$ **C.** $P = 4.$ **D.** $P = 8.$

Câu 5. Tính giá trị biểu thức $P = \tan 10^0 \cdot \tan 20^0 \cdot \tan 30^0 \dots \tan 80^0.$

A. $P = 0.$ **B.** $P = 1.$ **C.** $P = 4.$ **D.** $P = 8.$

Câu 6. Tính giá trị biểu thức $P = \tan 1^0 \tan 2^0 \tan 3^0 \dots \tan 89^0.$

A. $P = 0.$ **B.** $P = 1.$ **C.** $P = 2.$ **D.** $P = 3.$

Câu 7. Đơn giản biểu thức $A = \frac{2\cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$ ta có

- A. $A = \cos x + \sin x$. B. $A = \cos x - \sin x$. C. $A = \sin x - \cos x$. D.
 $A = -\sin x - \cos x$.

Câu 8. Biểu thức $A = \cos^2 x \cdot \cot^2 x + 3\cos^2 x - \cot^2 x + 2\sin^2 x$ không phụ thuộc x và bằng

- A. 2. B. -2. C. 3. D. -3.

Câu 9. Biểu thức rút gọn của $A = \frac{\tan^2 a - \sin^2 a}{\cot^2 a - \cos^2 a}$ bằng :

- A. $\tan^6 a$. B. $\cos^6 a$. C. $\tan^4 a$. D. $\sin^6 a$.

Câu 10. Biểu thức $A = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x}$ không phụ thuộc vào x và bằng

- A. 1. B. -1. C. $\frac{1}{4}$. D. $-\frac{1}{4}$.

Câu 11. Biểu thức $B = \frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \cdot \sin^2 y} - \cot^2 x \cdot \cot^2 y$ không phụ thuộc vào x, y và bằng

- A. 2. B. -2. C. 1. D. -1.

Câu 12. Biểu thức $C = 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x)$ có giá trị không đổi và bằng

- A. 2. B. -2. C. 1. D. -1.

Câu 13. Hệ thức nào **sai** trong bốn hệ thức sau:

- A. $\frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \tan x \cdot \tan y$. B. $\left(\sqrt{\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a}} - \sqrt{\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a}} \right)^2 = 4 \tan^2 a$.
- C. $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{1 + \cot^2 \alpha}{1 - \cot^2 \alpha}$. D. $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha + 1}$.

Câu 14. Cho $P = \sin \pi + \alpha \cdot \cos \pi - \alpha$ và $Q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

- A. $P + Q = 0$. B. $P + Q = -1$. C. $P + Q = 1$. D. $P + Q = 2$.

Câu 15. Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , mệnh đề nào sau đây đúng:

- A. $\sin A + C = -\sin B$. B. $\cos A + C = -\cos B$.
- C. $\tan A + C = \tan B$. D. $\cot A + C = \cot B$.

Câu 16. Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , khi đó

- A. $\sin C = -\sin A + B$. B. $\cos C = \cos A + B$.

C. $\tan C = \tan A + B$.

D. $\cot C = -\cot A + B$.

Câu 17. Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là sai ?

A. $\sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2}$.

B. $\cos \frac{A+C}{2} = \sin \frac{B}{2}$.

C. $\sin A + B = \sin C$.

D. $\cos A + B = \cos C$.

Câu 18. A, B, C là ba góc của một tam giác. Hãy tìm hệ thức sai:

A. $\sin A = -\sin 2A + B + C$.

B. $\sin A = -\cos \frac{3A+B+C}{2}$.

C. $\cos C = \sin \frac{A+B+3C}{2}$.

D. $\sin C = \sin A + B + 2C$.

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Ta có :

$$A = \frac{\sin 155^\circ \cdot \cos 115^\circ + \cot 42^\circ \cdot \cot 48^\circ}{\cot 55^\circ \cdot \cot(-145^\circ) + \tan 17^\circ \cdot \cot 17^\circ} \Leftrightarrow A = \frac{\sin 25^\circ \cdot (-\sin 25^\circ) + \cot 42^\circ \cdot \tan 42^\circ}{\cot 55^\circ \cdot \tan 55^\circ + 1}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{-\sin^2 25^\circ + 1}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\cos^2 25^\circ}{2}.$$

Chọn C.

Câu 2. Ta có:

$$A = \sin \alpha + \cos \alpha + \sin \alpha - \cos \alpha \Leftrightarrow A = 2 \sin \alpha. \text{ Chọn A.}$$

Câu 3. Ta có :

$$\begin{cases} \frac{\pi}{8} + \frac{7\pi}{8} = \pi \longrightarrow \cos \frac{\pi}{8} = -\cos \frac{7\pi}{8} \longrightarrow \cos^2 \frac{\pi}{8} = \cos^2 \frac{7\pi}{8} \\ \frac{3\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \pi \longrightarrow \cos \frac{3\pi}{8} = -\cos \frac{5\pi}{8} \longrightarrow \cos^2 \frac{3\pi}{8} = \cos^2 \frac{5\pi}{8} \end{cases}$$

$$\longrightarrow P = 2 \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} \right).$$

$$\text{Vì } \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \cos \frac{\pi}{8} = \sin \frac{3\pi}{8} \longrightarrow \cos^2 \frac{\pi}{8} = \sin^2 \frac{3\pi}{8}.$$

$$\text{Do đó } \longrightarrow P = 2 \left(\sin^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} \right) = 2.1 = 2. \text{ Chọn D.}$$

Câu 4. Do $10^\circ + 80^\circ = 20^\circ + 70^\circ = 30^\circ + 60^\circ = 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$ nên các cung lượng góc tương ứng đôi một phụ nhau. Áp dụng công thức $\sin 90^\circ - x = \cos x$, ta được

$$P = \sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ + \sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ$$

$$= 1+1+1+1=4. \text{ Chọn C.}$$

Câu 5. Áp dụng công thức $\tan x \cdot \tan 90^\circ - x = \tan x \cdot \cot x = 1$.

Do đó $P=1$. **Chọn B.**

Câu 6. Áp dụng công thức $\tan x \cdot \tan 90^\circ - x = \tan x \cdot \cot x = 1$.

Do đó $P=1$. **Chọn B.**

Câu 7. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x} = \frac{2\cos^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} \\ &= \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} = \cos x - \sin x \end{aligned}$$

Như vậy, $A = \cos x - \sin x$. **Chọn B**

Câu 8. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \cos^2 x \cdot \cot^2 x + 3\cos^2 x - \cot^2 x + 2\sin^2 x = \cos^2 x + 2 + \cot^2 x (\cos^2 x - 1) \\ &= \cos^2 x + 2 - \cot^2 x \cdot \sin^2 x = \cos^2 x + 2 - \cos^2 x = 2. \quad \mathbf{Chọn A} \end{aligned}$$

Câu 9. Ta có:

$$A = \frac{\tan^2 a - \sin^2 a}{\cot^2 a - \cos^2 a} \Leftrightarrow A = \frac{\sin^2 a \left(\frac{1}{\cos^2 a} - 1 \right)}{\cos^2 \left(\frac{1}{\sin^2 a} - 1 \right)} = \frac{\tan^2 a \cdot \tan^2 a}{\cot^2 a} = \tan^6 a.$$

Chọn A

Câu 10. Ta có :

$$\begin{aligned} A &= \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \tan^2 x} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^2 \\ &= \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{(1 + \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} = \frac{(1 - \tan^2 x)^2 - (1 + \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} = \frac{-4 \tan^2 x}{4 \tan^2 x} = -1. \end{aligned}$$

Chọn B

Câu 11. Ta có :

$$\begin{aligned} B &= \frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \cdot \sin^2 y} - \cot^2 x \cdot \cot^2 y = \frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} - \frac{\cos^2 x \cdot \cos^2 y}{\sin^2 x \cdot \sin^2 y} \\ &= \frac{\cos^2 x (1 - \cos^2 y) - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} = \frac{\cos^2 x \sin^2 y - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} = \frac{\sin^2 y (\cos^2 x - 1)}{(1 - \cos^2 x) \sin^2 y} = -1. \end{aligned}$$

Chọn D

Câu 12. Ta có:

$$C = 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \sin^2 x \cos^2 x \right]^2 - \left[(\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2 \sin^4 x \cos^4 x \right] \\
 &= 2 \left[1 - \sin^2 x \cos^2 x \right]^2 - \left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \right]^2 + 2 \sin^4 x \cos^4 x \\
 &= 2 \left[1 - \sin^2 x \cos^2 x \right]^2 - \left[1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \right]^2 + 2 \sin^4 x \cos^4 x \\
 &= 2(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x \cos^4 x) - (1 - 4 \sin^2 x \cos^2 x + 4 \sin^4 x \cos^4 x) + 2 \sin^4 x \cos^4 x \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Chọn C

Câu 13. A đúng vì:

$$VT = \frac{\tan x + \tan y}{\frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y}} = \tan x \cdot \tan y = VP$$

B đúng vì

$$VT = \frac{1 + \sin a}{1 - \sin a} + \frac{1 - \sin a}{1 + \sin a} - 2 = \frac{(1 + \sin a)^2 + (1 - \sin a)^2}{1 - \sin^2 a} - 2 = \frac{2 + 2 \sin^2 a}{\cos^2 a} - 2 = 4 \tan^2 a = VP$$

C đúng vì $VT = \frac{-\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{1 + \cot^2 \alpha}{1 - \cot^2 \alpha} = VP$.

Chọn D

Câu 14. Ta có :

$$P = \sin \pi + \alpha \cdot \cos \pi - \alpha = -\sin \alpha \cdot -\cos \alpha = \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

$$\text{Và } Q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \cdot -\sin \alpha = -\sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Khi đó $P + Q = \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0$. **Chọn A.**

Câu 15. Vì A, B, C là ba góc của một tam giác suy ra $A + C = \pi - B$.

$$\text{Khi đó } \sin A + C = \sin \pi - B = \sin B; \cos A + C = \cos \pi - B = -\cos B.$$

$$\tan A + C = \tan \pi - B = -\tan B; \cot A + C = \cot \pi - B = -\cot B. \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 16. Vì A, B, C là các góc của tam giác ABC nên $C = 180^\circ - A + B$.

$$\text{Do đó } C \text{ và } A + B \text{ là 2 góc bù nhau } \Rightarrow \sin C = \sin A + B; \cos C = -\cos A + B.$$

$$\text{Và } \tan C = -\tan A + B; \cot C = \cot A + B.$$

Câu 17. Ta có $A + B + C = \pi \Leftrightarrow A + B = \pi - C$

$$\text{Do đó } \cos A + B = \cos \pi - C = -\cos C. \text{ **Chọn D.**}$$

Câu 18. A, B, C là ba góc của một tam giác $\Rightarrow A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow A + B = 180^\circ - C$.

$$\text{Ta có } \sin A + B + 2C = \sin 180^\circ - C + 2C = \sin 180^\circ + C = -\sin C. \text{ **Chọn D.**}$$

BÀI KIỂM TRA TỔNG HỢP 15 PHÚT

Câu 1. Điểm cuối của α thuộc góc phần tư thứ hai của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

- A. $\sin \alpha > 0; \cos \alpha > 0.$ B. $\sin \alpha < 0; \cos \alpha < 0.$
 C. $\sin \alpha > 0; \cos \alpha < 0.$ D. $\sin \alpha < 0; \cos \alpha > 0.$

Câu 2. Cho $2\pi < a < \frac{5\pi}{2}$. Kết quả đúng là

- A. $\tan a > 0, \cot a > 0.$ B. $\tan a < 0, \cot a < 0.$
 C. $\tan a > 0, \cot a < 0.$ D. $\tan a < 0, \cot a > 0.$

Câu 3. Cho $7\pi < \alpha < \frac{15\pi}{2}$. Xác định dấu của biểu thức $M = \sin \alpha \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

- A. $M \geq 0.$ B. $M > 0.$ C. $M \leq 0.$ D. $M < 0.$

Câu 4. Tính giá trị của $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right]$.

- A. $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$ B. $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = \frac{1}{2}.$
 C. $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{1}{2}.$ D. $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Câu 5. Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$

- A. $\cot \alpha = 2.$ B. $\cot \alpha = \frac{1}{4}.$ C. $\cot \alpha = \frac{1}{2}.$ D. $\cot \alpha = \sqrt{2}.$

Câu 6. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$.

- A. $P = -3.$ B. $P = \frac{3}{7}.$ C. $P = \frac{12}{25}.$ D. $P = -\frac{12}{25}.$

Câu 7. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$. Tính $P = \frac{2\sin^2 \alpha + 3\sin \alpha \cdot \cos \alpha + 4\cos^2 \alpha}{5\sin^2 \alpha + 6\cos^2 \alpha}$.

- A. $P = \frac{9}{13}.$ B. $P = \frac{9}{65}.$ C. $P = -\frac{9}{65}.$ D. $P = \frac{24}{29}.$

Câu 8. Biểu thức sau có kết quả thu gọn bằng :

$$A = \cos(\alpha + 26\pi) - 2\sin(\alpha - 7\pi) - \cos 1,5\pi - \cos\left(\alpha + \frac{2003\pi}{2}\right) + \cos(\alpha - 1,5\pi) \cdot \cot(\alpha - 8\pi)$$

- A. $-\sin \alpha.$ B. $\sin \alpha.$ C. $-\cos \alpha.$ D. $\cos \alpha.$

Câu 9. Tính giá trị của biểu thức $A = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$.

A. $A = -1$.

B. $A = 1$.

C. $A = 4$.

D. $A = -4$.

Câu 10. Hệ thức nào sau đây là sai?

A. $\frac{\sin^2 \alpha + 1}{2} \frac{1 + \cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} + 1 = \tan \alpha + \cot \alpha^2$.

B. $\frac{1 - 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{1 + \tan^4 x - 2 \tan^2 x}{4 \tan^2 x}$.

C. $\frac{\sin x + \tan x}{\tan x} = 1 + \sin x + \cot x$.

D. $\tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1}{\cos x}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Câu 1. Điểm cuối của α thuộc góc phần tư thứ hai của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả **đúng** trong các kết quả sau đây.

A. $\sin \alpha > 0; \cos \alpha > 0$.

B. $\sin \alpha < 0; \cos \alpha < 0$.

C. $\sin \alpha > 0; \cos \alpha < 0$.

D. $\sin \alpha < 0; \cos \alpha > 0$.

Lời giải

Điểm cuối của α thuộc góc phần tư thứ hai $\rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \rightarrow$ **Chọn C.**

Câu 2. Cho $2\pi < a < \frac{5\pi}{2}$. Kết quả đúng là

A. $\tan a > 0, \cot a > 0$.

B. $\tan a < 0, \cot a < 0$.

C. $\tan a > 0, \cot a < 0$.

D. $\tan a < 0, \cot a > 0$.

Lời giải

Chọn A

Vì $2\pi < a < \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \tan a > 0, \cot a > 0$.

Câu 3. Cho $7\pi < \alpha < \frac{15\pi}{2}$. Xác định dấu của biểu thức $M = \sin \alpha \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

A. $M \geq 0$.

B. $M > 0$.

C. $M \leq 0$.

D. $M < 0$.

Lời giải

Chọn B

Vì $7\pi < \alpha < \frac{15\pi}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) < 0, \sin \alpha < 0$.

Câu 4. Tính giá trị của $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right]$.

A. $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = \frac{1}{2}$.

C. $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{1}{2}$.

D. $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Ta có $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi + k2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Chọn C.

Câu 5. Cho biết $\tan\alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot\alpha$

A. $\cot\alpha = 2$. B. $\cot\alpha = \frac{1}{4}$. C. $\cot\alpha = \frac{1}{2}$. D. $\cot\alpha = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 6. Cho góc α thỏa mãn $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \frac{\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$.

A. $P = -3$. B. $P = \frac{3}{7}$. C. $P = \frac{12}{25}$. D. $P = -\frac{12}{25}$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \pm\frac{4}{5} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \longrightarrow \cos\alpha = -\frac{4}{5} \longrightarrow \tan\alpha = -\frac{3}{4}$.

Thay $\tan\alpha = -\frac{3}{4}$ vào P , ta được $P = -\frac{12}{25}$. **Chọn D.**

Câu 7. Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha = 2$. Tính $P = \frac{2\sin^2\alpha + 3\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 4\cos^2\alpha}{5\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha}$.

A. $P = \frac{9}{13}$. B. $P = \frac{9}{65}$. C. $P = -\frac{9}{65}$. D. $P = \frac{24}{29}$.

Lời giải

Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos^2\alpha$ ta được

$P = \frac{2\tan^2\alpha + 3\tan\alpha + 4}{5\tan^2\alpha + 6} = \frac{2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 4}{5 \cdot 2^2 + 6} = \frac{9}{13}$. **Chọn A.**

Câu 8. Biểu thức:

$A = \cos(\alpha + 26\pi) - 2\sin(\alpha - 7\pi) - \cos 1,5\pi - \cos\left(\alpha + \frac{2003\pi}{2}\right) + \cos(\alpha - 1,5\pi) \cdot \cot(\alpha - 8\pi)$

có kết quả thu gọn bằng :

A. $-\sin\alpha$. B. $\sin\alpha$. C. $-\cos\alpha$. D. $\cos\alpha$.

Lời giải

Ta có:

$$A = \cos(\alpha + 26\pi) - 2\sin(\alpha - 7\pi) - \cos(1,5\pi) - \cos\left(\alpha + 2003\frac{\pi}{2}\right) + \cos(\alpha - 1,5\pi) \cdot \cot(\alpha - 8\pi)$$

$$A = \cos \alpha - 2\sin(\alpha - \pi) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cot \alpha$$

$$A = \cos \alpha + 2\sin \alpha - 0 - \sin \alpha - \sin \alpha \cdot \cot \alpha = \cos \alpha + \sin \alpha - \cos \alpha = \sin \alpha.$$

Chọn B

Câu 9. Tính giá trị của biểu thức $A = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$.

A. $A = -1$.

B. $A = 1$.

C. $A = 4$.

D. $A = -4$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 + 3\sin^2 x \cos^2 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + 3\sin^2 x \cos^2 x = 1. \end{aligned}$$

Chọn B

Câu 10. Hệ thức nào sau đây là sai?

A. $\frac{\sin^2 \alpha + 1}{2} \cdot \frac{1 + \cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} + 1 = \tan \alpha + \cot \alpha^2$.

B. $\frac{1 - 4\sin^2 x \cos^2 x}{4\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1 + \tan^4 x - 2\tan^2 x}{4\tan^2 x}$.

C. $\frac{\sin x + \tan x}{\tan x} = 1 + \sin x + \cot x$.

D. $\tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1}{\cos x}$.

Lời giải

Ta có :

$$\frac{\sin x + \tan x}{\tan x} = \frac{\sin x}{\tan x} + 1 = \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + 1 = 1 + \cos x \neq 1 + \sin x + \cot x.$$

Chọn C.