HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng: $\vec{a} \neq \vec{0}$ là VTCP của d nếu giá của $\vec{a}$ song song hoặc trùng với d.

2. Góc giữa hai đường thẳng:

- a′//a, b′//b $\Rightarrow \left(a,b\right)=\left(a',b'\right)$
- Giả sử $\vec{u}$ là VTCP của a, $\vec{v}$ là VTCP của b, $(\vec{u},\vec{v})=\alpha$.

Khi đó: $$\left(a,b\right)=\begin{cases}\alpha & \text{nếu } 0^0 \le \alpha \le 180^0\\ 180^0-\alpha & \text{nếu } 90^0 < \alpha \le 180^0\end{cases}$$

- Nếu a//b hoặc a ≡ b thì $\left(a,b\right)=0^0$

Chú ý: $0^0 \le \left(a,b\right) \le 90^0$

3. Hai đường thẳng vuông góc:

- a ⊥ b ⇔ $\left(a,b\right)=90^0$
- Giả sử $\vec{u}$ là VTCP của a, $\vec{v}$ là VTCP của b. Khi đó $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0$.
- Lưu ý: Hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

B – BÀI TẬP

Câu 1: Trong không gian cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Nếu a và b cùng vuông góc với c thì $a // b$.

B. Nếu $a // b$ và $c \perp a$ thì $c \perp b$.

C. Nếu góc giữa a và c bằng góc giữa b và c thì $a // b$.

D. Nếu a và b cùng nằm trong mp $\left(\alpha\right) // c$ thì góc giữa a và c bằng góc giữa b và c.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Nếu a và b cùng vuông góc với c thì a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.

C sai do:

Giả sử hai đường thẳng a và b chéo nhau, ta dựng đường thẳng c là đường vuông góc chung của a và b. Khi đó góc giữa a và c bằng với góc giữa b và c và cùng bằng $90°$, nhưng hiển nhiên hai đường thẳng a và b không song song.

D sai do: giả sử a vuông góc với c, b song song với c, khi đó góc giữa a và c bằng $90°$, còn góc giữa b và c bằng $0°$.

Do đó B đúng.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song với c (hoặc b trùng với c).

B. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c

C. Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.

D. Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai véctơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$ có hai cặp cạnh đối vuông góc. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Tứ diện có ít nhất một mặt là tam giác nhọn.

B. Tứ diện có ít nhất hai mặt là tam giác nhọn.

C. Tứ diện có ít nhất ba mặt là tam giác nhọn.

D. Tứ diện có cả bốn mặt là tam giác nhọn.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Câu 4: Trong các mệnh đề dưới đây mệnh đề đúng là?

A. Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì cũng vuông góc với đường thẳng thứ hai.

B. Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt vuông góc với nhau thì chúng cắt nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Theo lý thuyết.

Câu 5: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a vuông góc với c

B. Cho ba đường thẳng $a,\ b,\ c$ vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c

C. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì a vuông góc với c

D. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng $(a,\ b)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Câu 6: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng

B. Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một và không nằm trong một mặt phẳng thì đồng quy

C. Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cắt nhau cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng

D. Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một thì cùng nằm trong một mặt phẳng

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi d_1, d_2, d_3 là 3 đường thẳng cắt nhau từng đôi một. Giả sử d_1, d_2 cắt nhau tại A, vì d_3 không nằm cùng mặt phẳng với d_1, d_2 mà d_3 cắt d_1, d_2 nên d_3 phải đi qua A. Thật vậy giả sử d_3 không đi qua A thì nó phải cắt d_1, d_2 tại hai điểm B, C điều này là vô lí, một đường thẳng không thể cắt một mặt phẳng tại hai điểm phân biệt.

Câu 7: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng** ?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a vuông góc với c.

C. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b. Nếu đường thẳng c vuông góc với a và b thì a, b, c không đồng phẳng.

D. Cho hai đường thẳng a và b song song, nếu a vuông góc với c thì b cũng vuông góc với c.

Hướng dẫn giải:

Theo nhận xét phần hai đường thẳng vuông góc trong SGK thì đáp án D đúng.

Câu 8: Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì song song với đường thẳng còn lại.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Hướng dẫn giải:

Theo nhận xét phần hai đường thẳng vuông góc trong SGK thì đáp án D đúng.

Câu 9: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Hướng dẫn giải:

Theo nhận xét phần hai đường thẳng vuông góc trong SGK thì đáp án D đúng.

Câu 10: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Cho hai đường thẳng a, b song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng a,b .

B. Cho ba đường thẳng a, b, c vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c.

C. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c.

D. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c.

Hướng dẫn giải:

Chọn D. Theo định lý-sgk

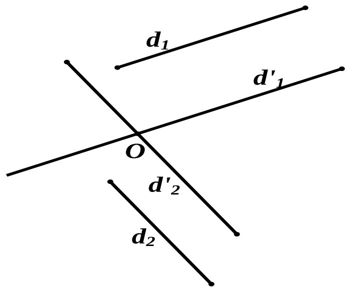
HavaMATH

DẠNG 1: TÍNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG.

Phương pháp:

Để tính góc giữa hai đường thẳng d_1,d_2 trong không gian ta có thể thực hiện theo hai cách

Cách 1. Tìm góc giữa hai đường thẳng d_1,d_2 bằng cách chọn một điểm O thích hợp (O thường nằm trên một trong hai đường thẳng).



Từ O dựng các đường thẳng d_1',d_2' lần lượt song song (có thể tròng nếu O nằm trên một trong hai đường thẳng) với d_1 và d_2. Góc giữa hai đường thẳng d_1',d_2' chính là góc giữa hai đường thẳng d_1,d_2.

Lưu ý 1: Để tính góc này ta thường sử dụng định lí côsin trong tam giác

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Cách 2. Tìm hai vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ của hai đường thẳng d_1,d_2

Khi đó góc giữa hai đường thẳng d_1,d_2 xác định bởi $\cos\left(d_1,d_2\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$.

Lưu ý 2: Để tính $\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2},\left|\overrightarrow{u_1}\right|,\left|\overrightarrow{u_2}\right|$ ta chọn ba vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng mà có thể tính được độ dài và góc giữa chúng,sau đó biểu thị các vec tơ $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ qua các vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ rồi thực hiện các tính toán

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a$, $IJ=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

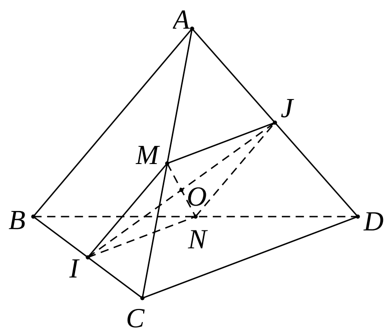
Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC, BC.

Ta có:

$$\begin{cases} MI=NI=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{a}{2} \\ MI\ //\ AB\ //\ CD\ //\ NI \end{cases}\Rightarrow MINJ \text{ là hình thoi.}$$



Gọi O là giao điểm của MN và IJ.

Ta có: $\widehat{MIN}=2\widehat{MIO}$.

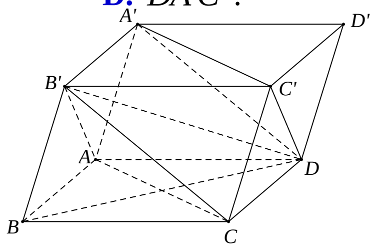
Xét ΔMIO vuông tại O, ta có: $\cos\widehat{MIO}=\dfrac{IO}{MI}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{a}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \widehat{MIO}=30°\Rightarrow \widehat{MIN}=60°$.

Mà: $\left(AB,CD\right)=\left(IM,IN\right)=MIN=60^\circ$.

Câu 2: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có 3 góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây?

A. BDB'. **B.** $AB'C$. **C.** $DB'B$. **D.** $DA'C'$.

Hướng dẫn giải:



Chọn D.

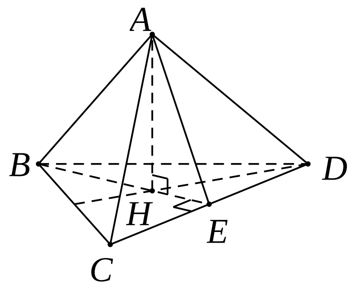
Ta có: $AC\,//\,A'C'$ (tính chất của hình hộp)

$\Rightarrow\left(AC,A'D\right)=\left(A'C',A'D\right)=DA'C'$ (do giả thiết cho $\Delta DA'C'$ nhọn).

Câu 3: Cho tứ diện đều $ABCD$ (Tứ diện có tất cả các cạnh bằng nhau). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Hướng dẫn giải:



Chọn D.

Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta BCD\Rightarrow AH\perp\left(BCD\right)$.

Gọi E là trung điểm CD $\Rightarrow BE\perp CD$ (do ΔBCD đều).

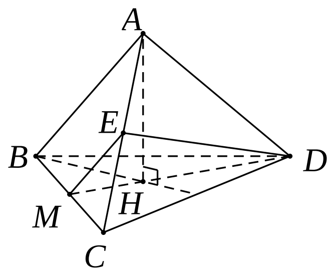
Do $AH\perp\left(BCD\right)\Rightarrow AH\perp CD$.

Ta có: $\begin{cases}CD\perp BE\\ CD\perp AH\end{cases}\Rightarrow CD\perp\left(ABE\right)\Rightarrow CD\perp AB\Rightarrow\left(AB,CD\right)=90^\circ$.

Câu 17. [1H3-2] Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos\left(AB,DM\right)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:



Chọn A.

Không mất tính tổng quát, giả sử tứ diện $ABCD$ có cạnh bằng a.

Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta BCD\Rightarrow AH\perp\left(BCD\right)$.

Gọi E là trung điểm AC $\Rightarrow ME\,//\,AB\Rightarrow\left(AB,DM\right)=\left(ME,MD\right)$

Ta có: $\cos\left(AB,DM\right)=\cos\left(ME,MD\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MD}\right)\right|=\left|\cos EMD\right|$.

Do các mặt của tứ diện đều là tam giác đều, từ đó ta dễ dàng tính được độ dài các cạnh của ΔMED:

$ME=a$, $ED=MD=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét ΔMED, ta có: $\cos EMD=\dfrac{ME^2+MD^2-ED^2}{2ME.MD}=\dfrac{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

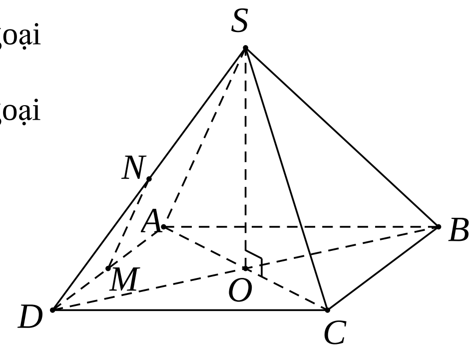
Từ đó: $\cos\left(AB,DM\right)=\left|\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc $\left(MN,SC\right)$ bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ $\Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của hình vuông $ABCD$ (1).

Ta có: $SA = SB = SC = SD \Rightarrow S$ nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Từ giả thiết ta có: $MN \,//\, SA$ (do MN là đường trung bình của ΔSAD). $\Rightarrow (MN, SC) = (SA, SC)$.

Xét ΔSAC, ta có: $\begin{cases} SA^2 + SC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \\ AC^2 = 2AD = 2a^2 \end{cases} \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S $\Rightarrow SA \perp SC$.

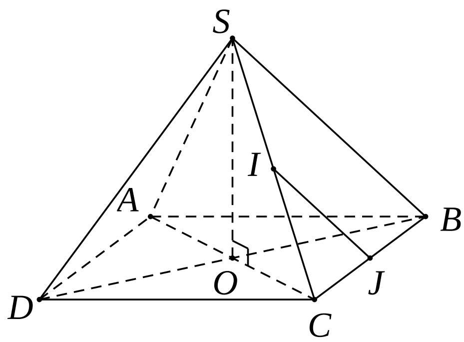
$\Rightarrow (SA, SC) = (MN, SC) = 90°$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ $\Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của hình vuông $ABCD$ (1).

Ta có: $SA = SB = SC = SD \Rightarrow S$ nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Từ giả thiết ta có: $IJ \,//\, SB$ (do IJ là đường trung bình của ΔSAB).

$\Rightarrow (IJ, CD) = (SB, AB)$.

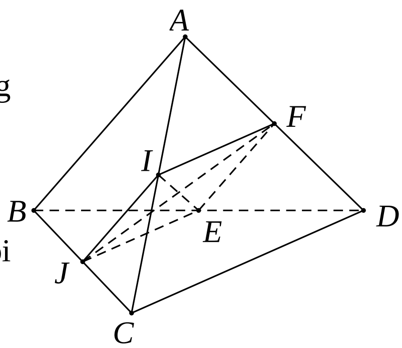
Mặt khác, ta lại có ΔSAB đều, do đó $SBA = 60° \Rightarrow (SB, AB) = 60° \Rightarrow (IJ, CD) = 60°$.

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Góc giữa (IE, JF) bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} IJ \,//\, EF \,//\, AB \\ JE \,//\, IF \,//\, CD \end{cases}$ (tính chất đường trung bình trong tam giác)

Từ đó suy ra tứ giác $IJEF$ là hình bình hành.

Mặt khác: $AB = CD \Rightarrow IJ = \frac{1}{2}AB = JE = \frac{1}{2}CD \Rightarrow ABCD$ là hình thoi

$\Rightarrow IE \perp JF$ (tính chất hai đường chéo của hình thoi)

$\Rightarrow (IE, JF) = 90°$.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

A. $45°$ **B.** $90°$ **C.** $120°$ **D.** $60°$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$$\left.\begin{matrix} AB \perp AE \\ AE \,//\, DH \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp DH \Rightarrow (AB, DH) = 90°$$

Câu 8: Trong không gian cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABC'D'$ có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O'. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{OO'}$?

A. $60°$ **B.** $45°$ **C.** $120°$ **D.** $90°$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Vì $ABCD$ và $ABC'D'$ là hình vuông nên $AD // BC'$; $AD = BC' \Rightarrow ADBC'$ là hình bình hành

Mà O; O' là tâm của 2 hình vuông nên O; O' là trung điểm của BD và AC' $\Rightarrow OO'$ là đường trung bình của $ADBC' \Rightarrow OO' // AD$

Mặt khác, $AD \perp AB$ nên $OO' \perp AB \perp \Rightarrow (OO', AB) = 90^o$

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $BAC = BAD = 60^0$, $CAD = 90^0$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{IJ}$ và $\overrightarrow{CD}$?

A. $45°$ **B.** $90°$ **C.** $60°$ **D.** $120°$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có BAC và BAD là 2 tam giác đều, I là trung điểm của AB nên $CI = DI$ (2 đường trung tuyến của 2 tam giác đều chung cạnh AB) nên CID là tam giác cân ở I. Do đó $IJ \perp CD$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $ASB = BSC = CSA$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$?

A. $60°$. **B.** $120°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $\Delta SAB = \Delta SBC = \Delta SCA\ (c-g-c) \Rightarrow AB = BC = CA$.

Do đótam giác ABC đều. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Vì hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$

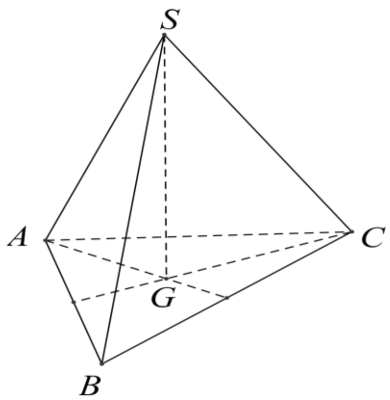
nên hình chiếu của S trùng với G

Hay $SG \perp (ABC)$.

Ta có: $\begin{cases} AC \perp BG \\ AC \perp SG \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBG)$

Suy ra $AC \perp SB$.

Vậy góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng 90^0.



Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $BAC = BAD = 60^0, CAD = 90^0$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

A. $120°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Xét tam giác ICD có J là trung điểm đoạn CD.

Ta có: $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right)$

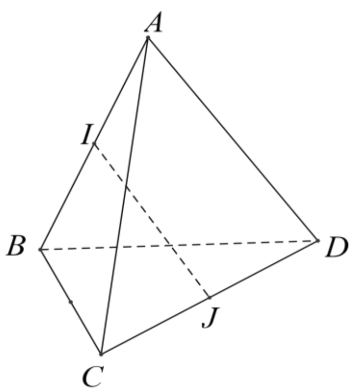
Vì tam giác ABC có $AB = AC$ và $BAC = 60°$

Nên tam giác ABC đều. Suy ra: $CI \perp AB$

Tương tự ta có tam giác ABD đều nên $DI \perp AB$.

Xét $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right).\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AB}$. Hay góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$ bằng 90^0.



Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Chọn khẳng định

đúng?

A. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=3\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

B. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=4\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

C. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=6\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

D. $AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=2\left(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2\right)$.

Hướng dẫn giải:

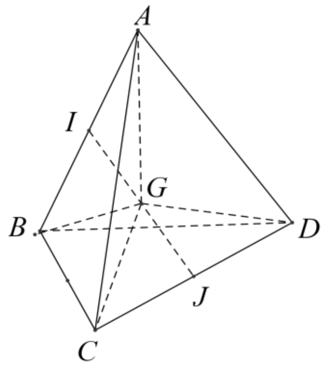
Chọn B.

$AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2$

$=\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\right)^2+\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GD}\right)^2+\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}\right)^2+\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GD}\right)^2+\left(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GD}\right)^2$

$=3AG^2+3BG^2+3CG^2+3DG^2+2\left(\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{GD}\right)(1)$

Lại có:



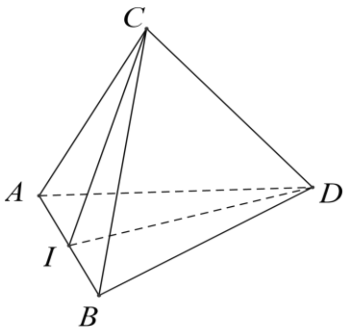
$\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$

$=2\left(\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{GD}\right)(2)$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Góc giữa AB và CD là?



A. $120°$. **B.** $60°$.

C. $90°$. **D.** $30°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi I là trung điểm của AB

Vì ABC và ABD là các tam giác đều

Nên $\begin{cases} CI\perp AB \\ DI\perp AB \end{cases}$.

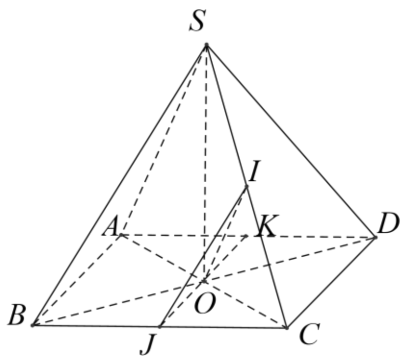
Suy ra $AB\perp(CID)\Rightarrow AB\perp CD$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng:

A. $90°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$.

Ta có: $OJ//CD$.

Nên góc giữa IJ và CD bằng góc giữa IJ và OJ.

Xét tam giác IOJ có

$IJ=\frac{1}{2}SB=\frac{a}{2},OJ=\frac{1}{2}CD=\frac{a}{2},\ IO=\frac{1}{2}SA=\frac{a}{2}$.

Nên tam giác IOJ đều.

Vậy góc giữa IJ và CD bằng góc giữa IJ và OJ

bằng góc $IJO = 60^0$.

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có 3 góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây?

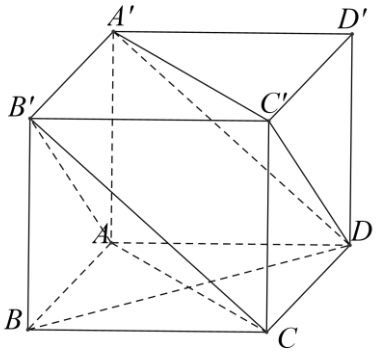
A. $AB'C$. **B.** $DA'C'$. **C.** $BB'D$. **D.** BDB'.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $AC//A'C'$ nên góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và $A'D$

bằng góc nhọn $DA'C'$ (Vì tam giác $A'DC'$ đều có 3 góc nhọn



Câu 16: Cho tứ diện đều $ABCD$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng:

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Hướng dẫn giải:

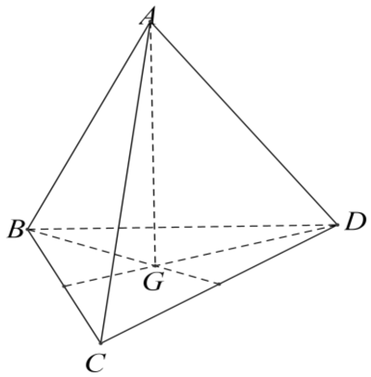
Chọn C.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Vì tứ diện $ABCD$ đều nên $AG \perp (BCD)$.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AG \\ CD \perp BG \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABG) \Rightarrow CD \perp AB$.

Vậy số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng 90^0



Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$ có hai cặp cạnh đối vuông góc. Cắt tứ diện đó bằng một mặt phẳng song song với một cặp cạnh đối diện của tứ diện. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Thiết diện là hình chữ nhật. **B.** Thiết diện là hình vuông.

C. Thiết diện là hình bình hành. **D.** Thiết diện là hình thang.

Hướng dẫn giải:

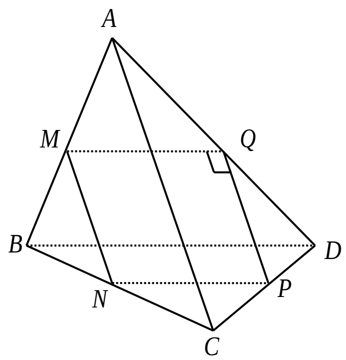
Chọn A.

Gỉa sử thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Ta có: $MN//PQ$ và $MN = PQ$ nên $MNPQ$ là hình bình hành

Lại có $AC \perp BD \Rightarrow MQ \perp PQ$

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.



Câu 18: Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ thì $AB\perp CD$, $AC\perp BD$, $AD\perp BC$. Điều ngược lại đúng không?

Sau đây là lời giải:

Bước 1: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=0\Leftrightarrow AC\perp BD$

Bước 2: Chứng minh tương tự, từ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được $AD\perp BC$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được $AB\perp CD$.

Bước 3: Ngược lại đúng, vì quá trình chứng minh ở bước 1 và 2 là quá trình biến đổi tương đương.

Bài giải trên đúng hay **sai**? Nếu sai thì sai ở đâu?

A. Sai ở bước 3. **B.** Đúng **C.** Sai ở bước 2. **D.** Sai ở bước 1.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

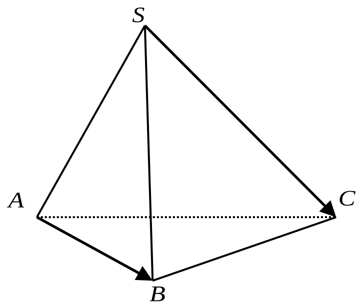
Bài giải đúng.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$ và $ASB=BSC=CSA$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$?

A. $120°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $90°$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Ta có: $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{SC}.\left(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}\right)=\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}$

$=SA.SB\cos BSC-SC.SA.\cos ASC=0$

Vì $SA=SB=SC$ và $BSC=ASC$

Do đó: $\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{AB}\right)=90^0$

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc $\left(MN,SC\right)$ bằng:

A. $45°$ **B.** $30°$ **C.** $90°$ **D.** $60°$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

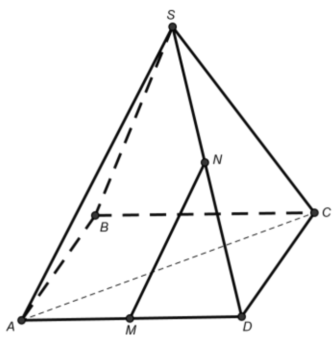
Ta có: $AC=a\sqrt{2}$

$\Rightarrow AC^2=2a^2=SA^2+SC^2$

$\Rightarrow\Delta SAC$ vuông tại S.

Khi đó: $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{SC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{NM},\overrightarrow{SC}\right)=90°$

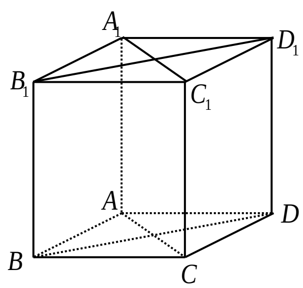
$\Rightarrow\left(MN,SC\right)=90°$



Câu 21: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định **sai?**

A. Góc giữa AC và B_1D_1 bằng $90°$. **B.** Góc giữa B_1D_1 và AA_1 bằng $60°$.

C. Góc giữa AD và B_1C bằng $45°$. **D.** Góc giữa BD và A_1C_1 bằng $90°$.



Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{B_1D_1}=\overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BB_1}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$

$=\overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BC}=0$

(vì $\left(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{BA}\right)=90^0$ và $\left(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{BC}\right)=90^0$)

Do đó: $\left(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{B_1D_1}\right)=90^0\Rightarrow\left(AA_1,B_1D_1\right)=90^0$

Câu 22: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi M là trung điểm AD. Giá trị $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1}$ là:

A. $\frac{1}{2}a^2$. **B.** a^2. **C.** $\frac{3}{4}a^2$. **D.** $\frac{3}{2}a^2$.

Hướng dẫn giải:

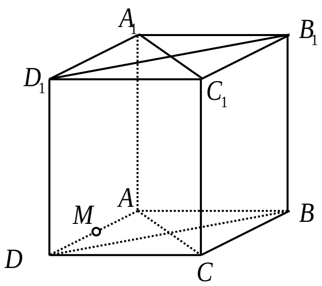
Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1}=\left(\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right)\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}\right)$

$=\overrightarrow{B_1B}.\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}$

$=-a^2+a^2+\frac{a^2}{2}$

$=\frac{a^2}{2}$



Câu 23: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có thể **sai**?

A. $A'C'\perp BD$ **B.** $BB'\perp BD$ **C.** $A'B\perp DC'$ **D.** $BC'\perp A'D$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BB'}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC}$

$=BB'.BA\left(\cos B'BA+\cos B'BC\right)$

Vì $AA'B'B$ và $ABCD$ là hai hình thoi bằng nhau nên

+ $B'BA=B'BC\Rightarrow\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BD}\neq 0$ suy ra BB' không vuông góc với BD

+ $B'BA+B'BC=180^0\Rightarrow\cos B'BA=-\cos B'BC\Rightarrow\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BD}=0$ suy ra $BB'\perp BD$

Nên đáp án B có thể sai vì chưa có điều kiện của góc $B'BA$ và $B'BC$

Chọn **B.**

Câu 24: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

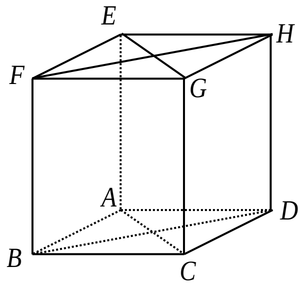
A. 90° **B.** 60° **C.** 45° **D.** 120°

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $EG//AC$ (do $ACGE$ là hình chữ nhật)

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EG}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=BAC=45°$

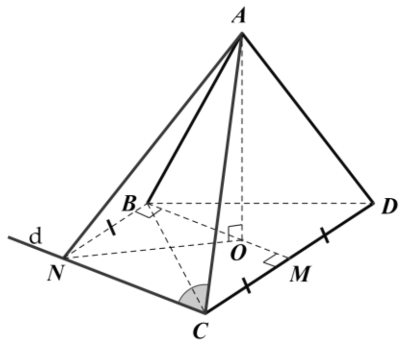


Câu 25: Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm CD, α là góc giữa AC và BM. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ **C.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\alpha=60^0$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Gọi O là trọng tâm của ΔBCD $\Rightarrow AO\perp(BCD)$

Trên đường thẳng d qua C và song song BM lấy điểm N sao cho $BMCN$ là hình chữ nhật, từ đó suy ra:

$(AC,BM)=(AC,CN)=(ACN)=\alpha$

Có: $CN=BM=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ và $BN=CN=\frac{a}{2}$

$AO^2=AB^2-BO^2=AB^2-\left(\frac{2}{3}BM\right)^2=\frac{2}{3}a^2$

$ON^2=BN^2+BO^2=\frac{7}{12}a^2$; $AN=\sqrt{AO^2+ON^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a\Rightarrow\cos\alpha=\frac{AC^2+CN^2-AN^2}{2AC.CN}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

Câu 26: Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CC'}$?

A. 45^0 **B.** 120^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

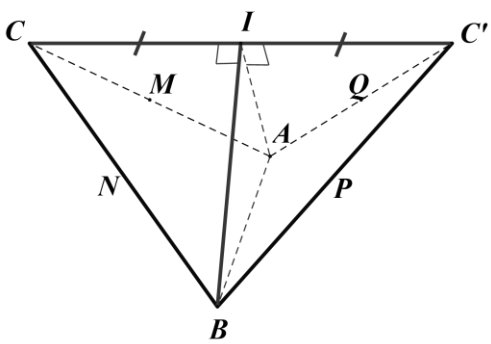
Gọi I là trung điểm CC'

$\Delta CAC'$ cân tại A $\Rightarrow CC'\perp AI$ (1)

$\Delta CBC'$ cân tại B $\Rightarrow CC'\perp BI$ (2)

$\xrightarrow{(1),(2)}CC'\perp(AIB)\Rightarrow CC'\perp AB\Rightarrow\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}$

Kết luận: góc giữa $\overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{AB}$ là $90°$



Câu 27: Cho $\vec{a}=3$, $\vec{b}=5$ góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $120°$. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng đính sau?

A. $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{19}$ **B.** $|\vec{a}-\vec{b}|=7$ **C.** $|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{139}$ **D.** $|\vec{a}+2\vec{b}|=9$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $|\vec{a}+\vec{b}|^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}.\vec{b}.\cos(\vec{a},\vec{b})=19$ $|\vec{a}+\vec{b}|^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}.\vec{b}.cos(\vec{a},\vec{b})=19$

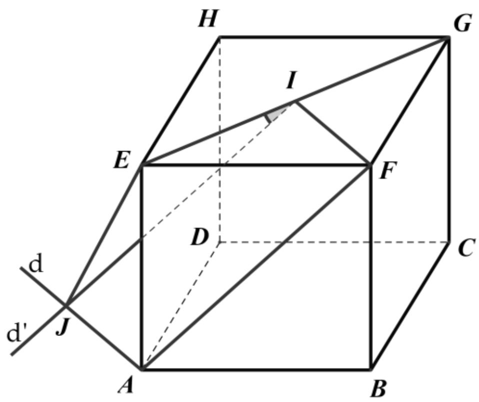
Câu 28: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$?

A. 90^0 **B.** 60^0 **C.** 45^0 **D.** 120^0

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Đặt cạnh của hình lập phương trên là a
Gọi I là giao trung điểm EG
Qua A kẻ đường thẳng $d // FI$
Qua I kẻ đường thẳng $d' // FA$
Suy ra d cắt d' tại J.



Từ đó suy ra $\left(\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{AF}\right) = EIJ = \alpha$

$$IJ = AF = 2EI = 2FI = 2AJ = a\sqrt{2}$$

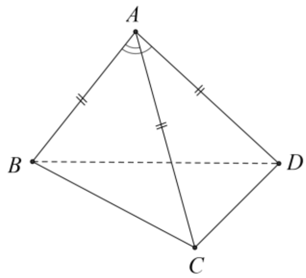
$$EJ^2 = AE^2 + AJ^2 = \frac{3}{2}$$

$$\cos\alpha = \left|\frac{EI^2 + IJ^2 + AJ^2}{2.EI.EJ}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

Câu 29: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $BAC = BAD = 60^0$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

A. 60^0. **B.** 45^0. **C.** 120^0. **D.** 90^0.

Hướng dẫn giải:



Ta có

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

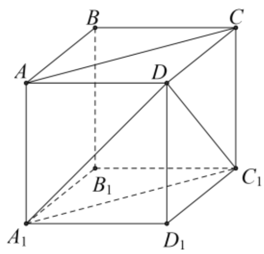
$$= AB.AD.\cos 60^0 - AB.AC.\cos 60^0 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 90^0$$

Câu 30: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Góc giữa AC và DA_1 là

A. 45^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 120^0.

Hướng dẫn giải:



Vì $A'C' // AC$ nên góc giữa AC và DA_1 là DA_1C_1.

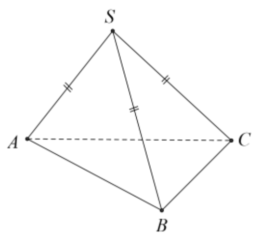
Vì tam giác DA_1C_1 đều nên $DA_1C_1 = 60^0$.

Vậy góc giữa AC và DA_1 bằng 60^0.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $ASB = BSC = CSA$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$?

A. 120^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 45^0.

Hướng dẫn giải:



Ta có

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA}.\left(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}\right) = \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$$

$$= SA.SC.\cos ASC - SA.SB.\cos ASB = 0$$

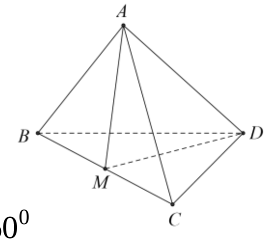
$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}\right) = 90^0$$

Câu 32: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos\left(AB, DM\right)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Giả sử cạnh của tứ diện là a.



Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DM}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{DM}\right|}=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}}{a.\frac{a\sqrt{3}}{2}}$

Mặt khác

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB.AM.\cos 30^0-AB.AD.\cos 60^0$

$=a.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}-a.a.\frac{1}{2}=\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{4}$.

Do có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DM}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}$. Suy ra $\cos\left(AB,DM\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

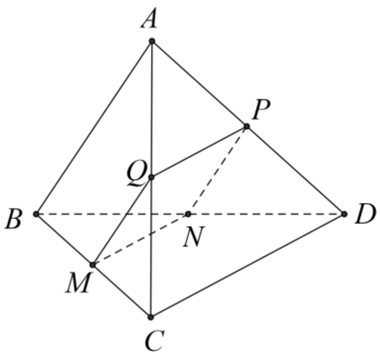
Câu 33: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB=CD=6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC=x.BC$ $\left(0<x<1\right)$. mp$\left(P\right)$ song song với AB và CD lần lượt cắt BC,DB,AD,AC tại M,N,P,Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu ?

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

Hướng dẫn giải:

Xét tứ giác $MNPQ$ có $\begin{cases}MQ//NP//AB\\MN//PQ//CD\end{cases}$

$\Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.



Mặt khác, $AB\perp CD\Rightarrow MQ\perp MN$.

Do đó, $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Vì $MQ//AB$ nên $\frac{MQ}{AB}=\frac{CM}{CB}=x\Rightarrow MQ=x.AB=6x$.

Theo giả thiết $MC=x.BC\Rightarrow BM=\left(1-x\right)BC$.

Vì $MN//CD$ nên $\frac{MN}{CD}=\frac{BM}{BC}=1-x\Rightarrow MN=\left(1-x\right).CD=6\left(1-x\right)$

.

Diên tích hình chữ nhật $MNPQ$ là

$$S_{MNPQ}=MN.MQ=6\left(1-x\right).6x=36.x.\left(1-x\right)\le 36\left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2=9.$$

Ta có $S_{MNPQ}=9$ khi $x=1-x\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

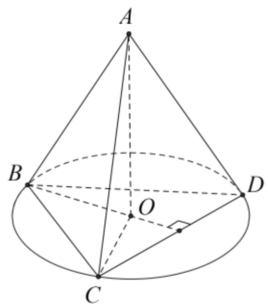
Vậy diện tích tứ giác $MNPQ$ lớn nhất bằng 9 khi M là trung điểm của BC.

Câu 34: Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu ?

A. 0^0. **B.** 30^0. **C.** 90^0. **D.** 60^0.

Hướng dẫn giải:

Ta có $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CA}\right)\overrightarrow{CD}$



$=\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}=CO.CD.\cos 30^0-CA.CD.\cos 60^0$

$=\frac{a\sqrt{3}}{3}.a.\frac{\sqrt{3}}{2}-a.a.\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}=0.$

Suy ra $AO \perp CD$.

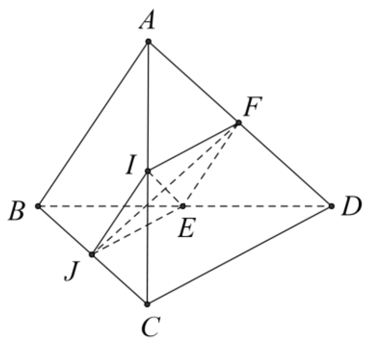
Câu 35: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Góc $(IE,\ JF)$ bằng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Hướng dẫn giải:

Tứ giác $IJEF$ là hình bình hành.

Mặt khác $\begin{cases} IJ = \dfrac{1}{2}AB \\ JE = \dfrac{1}{2}CD \end{cases}$ mà $AB = CD$ nên $IJ = JE$.



Do đó $IJEF$ là hình thoi.

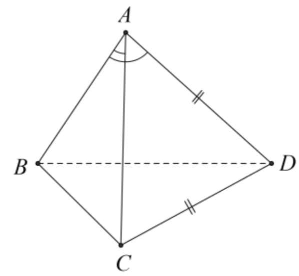
Suy ra $(IE,\ JF) = 90^0$.

Câu 36: Cho tứ diện $ABCD$ với $AC = \dfrac{3}{2}AD, \widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^0, CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD. Chọn khẳng định **đúng** ?

A. $\cos\varphi = \dfrac{3}{4}$. **B.** $\varphi = 60^0$. **C.** $\varphi = 30^0$. **D.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|} = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{AB.CD}$



Mặt khác

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= AB.AD.\cos 60^0 - AB.AC.\cos 60^0$

$= AB.AD.\dfrac{1}{2} - AB.\dfrac{3}{2}AD.\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}AB.AD = -\dfrac{1}{4}AB.CD.$

Do có $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \dfrac{-\frac{1}{4}AB.CD}{AB.CD} = -\dfrac{1}{4}$. Suy ra $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$.

Câu 37: Trong không gian cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABC'D'$ có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O'. Tứ giác $CDD'C'$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình vuông. **C.** Hình thang. **D.** Hình chữ nhật.

Hướng dẫn giải:

Tứ giác $CDD'C'$ là hình bình hành. Lại có: $DC \perp (ADD') \Rightarrow DC \perp DD'$.

Vậy tứ giác $CDD'C'$ là hình chữ nhật.

Câu 38: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$, IJ=$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là :

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

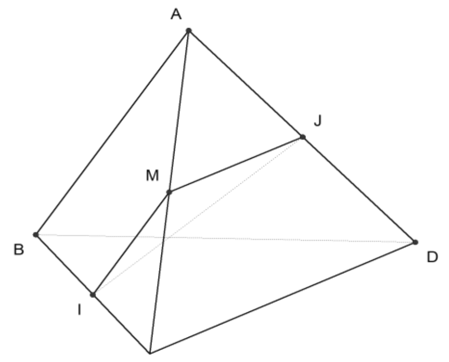
Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm của AC.

Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng góc giữa hai đường thẳng MI và MJ.

Tính được: $\cos IMJ = \dfrac{IM^2 + MJ^2 - IJ^2}{2MI.MJ} = -\dfrac{1}{2}$

Từ đó suy ra số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là: 60^0.



\

Câu 38: Cho tứ diện $ABCD$ với $AB \perp AC$, $AB \perp BD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Góc giữa PQ và AB là?

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 45^0.

Hướng dẫn giải:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PQ} \Rightarrow AB \perp PQ$

Câu 39: Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos\alpha = \dfrac{3}{8}$. **B.** $\alpha = 30^0$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. **D.** $\alpha = 60^0$.

Hướng dẫn giải:

$(\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}.\vec{b} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = \dfrac{9}{2}$.

Do đó: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{3}{8}$.

Câu 40: Cho tứ diện $ABCD$. Tìm giá trị của k thích hợp thỏa mãn: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = k$

A. $k = 1$. **B.** $k = 2$. **C.** $k = 0$. **D.** $k = 4$.

Hướng dẫn giải:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right).\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$$

$$= \overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}\right) + \overrightarrow{CB}\left(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AC} = 0.$$

Chọn đáp án C.

Câu 41: Trong không gian cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chọn hệ thức đúng?

A. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 2\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right)$.

B. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2$.

C. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 4\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right)$.

D. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right)$.

Hướng dẫn giải:

Cách 1

Ta có
$$\begin{aligned}
&\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} = 0 \\
&\Leftrightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 + \left(GA^2 + GB^2 - AB^2\right) + \left(GA^2 + GC^2 - AC^2\right) + \left(GB^2 + GC^2 - BC^2\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right)
\end{aligned}$$

Cách 2: Ta có:

$$\begin{cases} MA^2 = \dfrac{AB^2+AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} \\ GA = \dfrac{2}{3}MA \end{cases} \Rightarrow GA^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{AB^2+AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}\right).$$

Tương tự ta suy ra được

$$GA^2+GB^2+GC^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{AB^2+AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} + \frac{BA^2+BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} + \frac{CA^2+CB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}\right).$$

$$= \frac{1}{3}\ AB^2+BC^2+CA^2\ .$$

$$\Leftrightarrow 3\ GA^2+GB^2+GC^2\ = AB^2+BC^2+CA^2$$

Chọn đáp án **D.**

Cách 3: Chuẩn hóa giả sử tam giác ABC đều có cạnh là 1. Khi đó

$$\begin{cases} AB^2+BC^2+CA^2 = 3 \\ GA^2+GB^2+GC^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 3\ GA^2+GB^2+GC^2\ = AB^2+BC^2+CA^2.$$

Chọn đáp án **D.**

Câu 42: Trong không gian cho tam giác ABC. Tìm M sao cho giá trị của biểu thức $P = MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. M là trọng tâm tam giác ABC.
B. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
C. M là trực tâm tam giác ABC.
D. M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn giải:

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G$ cố định và $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$

$$P = \ \overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\ ^2 + \ \overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\ ^2 + \ \overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\ ^2$$

$$= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\ \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\ + GA^2+GB^2+GC^2$$

$$= 3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2 \geq GA^2+GB^2+GC^2.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv G.$

Vậy $P_{\min} = GA^2+GB^2+GC^2$ với $M \equiv G$ là trọng tâm tam giác $ABC.$

Chọn đáp án A.

Câu 43: Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right| = 26; \left|\vec{b}\right| = 28; \left|\vec{a}+\vec{b}\right| = 48$. Độ dài vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ bằng?

A. 25. **B.** $\sqrt{616}$. **C.** 9. **D.** $\sqrt{618}$.

Hướng dẫn giải:

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}.\vec{b} = 2\left(\vec{a}^2+\vec{b}^2\right)-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$$

$$= 2\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2\right)-\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = 2\left(26^2+28^2\right)-48^2 = 616$$

$$\Rightarrow \left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{616}.$$

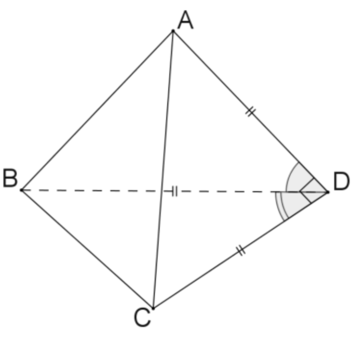
Câu 44: Cho tứ diện $ABCD$ có $DA = DB = DC$ và $BDA = 60^0, ADC = 90^0, BDC = 120^0$. Trong các mặt của tứ diện đó:

A. Tam giác ABD có diện tích lớn nhất. **B.** Tam giác BCD có diện tích lớn nhất.

C. Tam giác ACD có diện tích lớn nhất. **D.** Tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải:

Đặt $DA = DB = DC = a$



Tam giác ABD đều cạnh a nên diện tích $S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác ACD vuông tại D nên diện tích $S_{ACD} = \frac{1}{2}DA.DC = \frac{a^2}{2}$.

Diện tích tam giác BCD là $S_{BCD} = \frac{1}{2}DB.DC\sin 120^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác ABC có $AB = a, AC = a\sqrt{2}, BC = a\sqrt{3}$ nên tam giác ABC vuông tại A. Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Câu 45: Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right| = 4; \left|\vec{b}\right| = 3; \vec{a}.\vec{b} = 10$. Xét hai vectơ $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$ $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b},$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{x}, \vec{y}$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{15}}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{15}}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{15}}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $\vec{x}.\vec{y} = \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \left(\vec{a}\right)^2 + 2\left(\vec{b}\right)^2 - 3\vec{a}.\vec{b} = 4$.

$$\left|\vec{x}\right| = \sqrt{\left(\vec{x}\right)^2} = \sqrt{\left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\left(\vec{a}\right)^2 + 4\left(\vec{b}\right)^2 - 4\vec{a}.\vec{b}} = 2\sqrt{3}.$$

$$\left|\vec{y}\right| = \sqrt{\left(\vec{y}\right)^2} = \sqrt{\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2} = \sqrt{\left(\vec{a}\right)^2 + \left(\vec{b}\right)^2 - 2\vec{a}.\vec{b}} = \sqrt{5}.$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{x}.\vec{y}}{\left|\vec{x}\right|.\left|\vec{y}\right|} = \frac{4}{2\sqrt{3}.\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{15}}$$

Câu 46: Cho tam giác ABC có diện tích S. Tìm giá trị của k thích hợp thỏa mãn: $S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - 2k\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$.

A. $k = \frac{1}{4}$. **B.** k = 0. **C.** $k = \frac{1}{2}$. **D.** $k = 1$.

Hướng dẫn giải:

$$S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin C = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2\sin^2 C} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2\left(1 - \cos^2 C\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}.$$

Chọn C.

Câu 47: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều

a) Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. AB và CD chéo nhau

B. AB và CD vuông góc với nhau

C. AB và CD đồng phẳng

D. AB và CD cắt nhau

b) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC, BD, DA. Khẳng định nào sau đây là đúng nhất?

Chứng minh $MNPQ$ là hình chữ nhật.

A. $MNPQ$ là hình vuông **B.** $MNPQ$ là hình bình hành

C. $MNPQ$ là hình chữ nhật **D.** $MNPQ$ là hình thoi

Hướng dẫn giải:

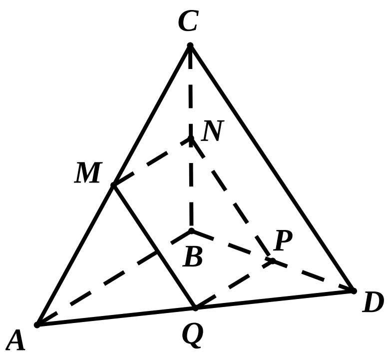
a) Đặt $AB = AD = AC = a$

Ta có $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB}$

$= \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos 60^0 - \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos 60^0 = a.a.\frac{1}{2} - a.a.\frac{1}{2} = 0$

Vậy $AB \perp CD$.

b) Ta có $MN \parallel PQ \parallel AB$ và $MN = PQ = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.



Lại có $\begin{cases} MN \parallel AB \\ NP \parallel CD \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow MN \perp NP$, do đó $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC.

A. $(AB, SC) = 60^0$ **B.** $(AB, SC) = 45^0$

C. $(AB, SC) = 30^0$ **D.** $(AB, SC) = 90^0$

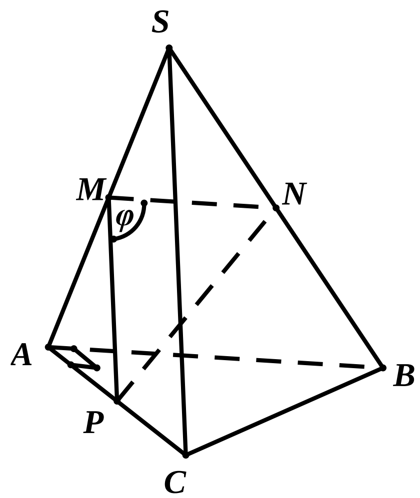
Hướng dẫn giải:

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, AC, khi đó $MN \parallel AB$ nên

$(AB, SC) = (MN, SC)$.

Đặt $\varphi = NMP$, trong tam giác MNP có

$\cos\varphi = \frac{MN^2 + MP^2 - NP^2}{2MN.MP} \quad (1)$.



Ta có $MN = MP = \frac{a}{2}$, $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A, vì vậy $PB^2 = AP^2 + AC^2 = \frac{5a^2}{4}$, $PS^2 = \frac{3a^2}{4}$.Trong tam giác PBS theo công thứ tính đường trung tuyến ta có

$$PN^2 = \frac{PB^2 + PS^2}{2} - \frac{SB^2}{4} = \frac{\frac{5a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

Thay MN, MP, NP vào (1) ta được $\cos\varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 120^0$.

Vậy $(AB, SC) = (MN, SC) = 60^0$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA = AB$ và $SA \perp BC$.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

A. $(BC, SD) = 30^0$ **B.** $(BC, SD) = 45^0$ **C.** $(BC, SD) = 60^0$ **D.** $(BC, SD) = 50^0$

b) Gọi I, J lần lượt là các điểm thuộc SB và SD sao cho $IJ \parallel BD$. Chứng minh góc giữa AC và IJ không phụ thuộc vào vị trí của I và J.

A. $(IJ, AC) = 90^0$ **B.** $(IJ, AC) = 60^0$ **C.** $(IJ, AC) = 30^0$ **D.** $(IJ, AC) = 45^0$

Hướng dẫn giải:

a) $(BC, SD) = 45^0$ b) $(IJ, AC) = 90^0$.

Câu 50: Cho hai tam giác cân ABC và DBC có chung cạnh đáy BC nằm trong hai mặt phẳng khác nhau.

a) Khẳng định nào sau đây là đúng nhất?

A. $AD \perp BC$ **B.** AD cắt BC

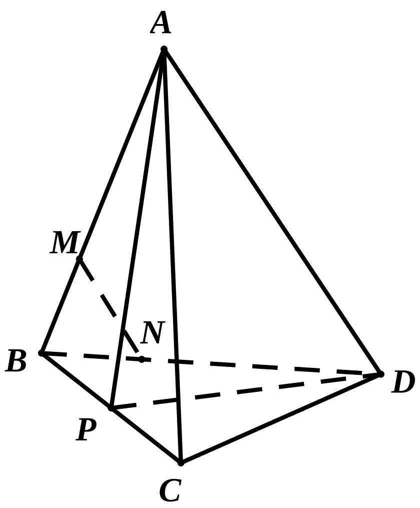
C. AD và BC chéo nhau **D.** Cả A, B, C đều đúng

b) Gọi M, N là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB và DB sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BC.

A. $(MN, BC) = 90^0$ **B.** $(MN, BC) = 80^0$

C. $(MN, BC) = 60^0$ **D.** $(MN, BC) = 45^0$

Hướng dẫn giải:



a) Gọi P là trung điểm của BC, thì các tam giác ABC và DBC cân nên $\begin{cases} AP \perp BC \\ DP \perp BC \end{cases}$.

Ta có $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PA}\right) = 0$

Vậy $BC \perp AD$.

b) Ta có $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = |k|$, $\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB} \Rightarrow \dfrac{ND}{NB} = |k|$

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{ND}{NB}$

suy ra $MN \parallel AD \Rightarrow (MN, BC) = (AD, BC) = 90^0$ (Theo câu a)

Câu 51: Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng a và $ABC = B'BA = B'BC = 60^0$ .Tính góc giữa hai đường thẳng AC và B’D’.

A. $(\text{AC}, B'\text{D}') = 90^0$ **B.** $(\text{AC}, B'\text{D}') = 60^0$ **C.** $(\text{AC}, B'\text{D}') = 45^0$ **D.** $(\text{AC}, B'\text{D}') = 30^0$

Hướng dẫn giải:

HS tự giải.

Câu 52: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và AD. Cho biết $AB = CD = 2a$ và $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $(AB, CD) = 30^0$ **B.** $(AB, CD) = 45^0$

C. $(AB, CD) = 60^0$ **D.** $(AB, CD) = 90^0$

Hướng dẫn giải:

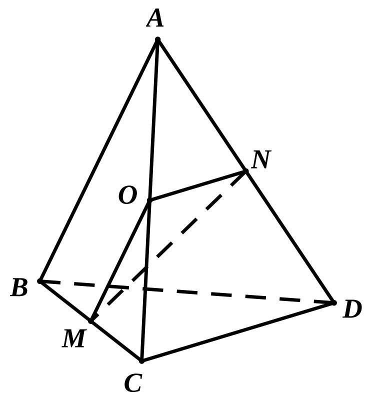
Gọi O là trung điểm của AC, ta có $OM = ON = a$.

$\begin{cases} OM \parallel AB \\ ON \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (AB, CD) = (OM, ON)$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác OMN ta có

$$\cos MON = \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM.ON} = \frac{a^2 + a^2 - \left(a\sqrt{3}\right)^2}{2.a.a} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $(AB, CD) = 60^0$.



Câu 53: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$.

a)Khẳng định nào sau đây là **đúng nhất**.

A. các đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì vuông góc với hai cạnh đó

B. các đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì không vuông góc với hai cạnh đó

C. các đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì *có thể vuông góc có thể không vuông góc* với hai cạnh đó

D. cả A, B, C đều sai

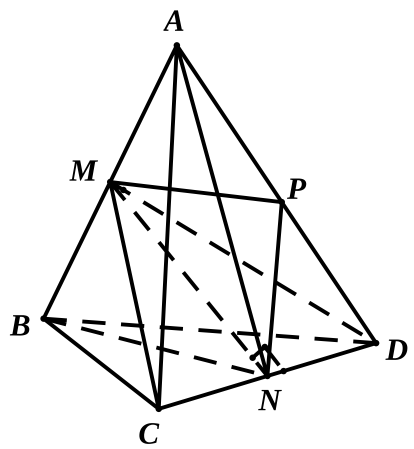
b) Tính góc giữa hai đường thẳng AC và BD.

A. $(AC, BD) = \arccos\left|\frac{(a^2 - c^2)}{b^2}\right|$

B. $(AC, BD) = \arccos\left|\frac{2(a^2 + c^2)}{b^2}\right|$

C. $(AC, BD) = \arccos\left|\frac{2(a^2 - c^2)}{3b^2}\right|$

D. $(AC, BD) = \arccos\left|\frac{2(a^2 - c^2)}{b^2}\right|$



Hướng dẫn giải:

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AD.

a) Do hai tam giác ACD và BCD có CD chung và $AC = BD, AD = BC$ nên chúng bằng nhau, suy ra $MC = MD$

Vậy tam giác MCD cân tại M và có trung tuyến MN nên $MN \perp CD$.

Tương tự $MN \perp AB$.

Chứng minh tương tự cho hai cặp cạnh đối còn lại.

b) Ta có $\begin{cases} PM \parallel BD \\ PN \parallel AC \end{cases} \Rightarrow (BD, AC) = (PM, PN)$

Theo công thức tính đường trung tuyến ta có

$$CM^2=\frac{CA^2+CB^2}{2}-\frac{AB^2}{4}=\frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$$

Tương tự $DM^2=\frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$, nên $MN^2=\frac{MC^2+MD^2}{2}-\frac{CD^2}{4}=\frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$

Áp dụng định lí cô sin cho tam giác PMN ta có

$$\cos MPN=\frac{PM^2+PN^2-MN^2}{2.PM.PN}=\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}{2\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)}=\frac{2\left(a^2-c^2\right)}{b^2}$$

Vậy $\left(AC,BD\right)=\arccos\left|\frac{2\left(a^2-c^2\right)}{b^2}\right|$.

DẠNG 2: CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Phương pháp:

Để chứng minh $d_1 \perp d_2$ ta có trong phần này ta có thể thực hiện theo các cách sau:

- Chứng minh $d_1 \perp d_2$ ta chứng minh $\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2} = 0$ trong đó $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ lần lượt là các vec tơ chỉ phương của d_1 và d_2.
- Sử dụng tính chất $\begin{cases} b \parallel c \\ a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp b$.
- Sử dụng định lí Pitago hoặc xác định góc giữa d_1, d_2 và tính trực tiếp góc đó.
- Tính độ dài đoạn thẳng, diện tích của một đa giác
- Tính tích vô hướng…

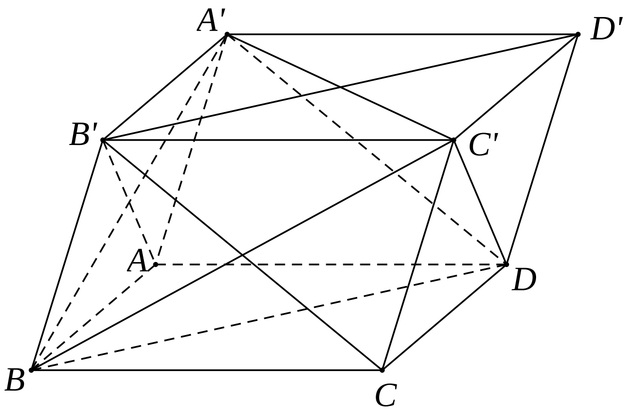
Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có thể **sai**?

A. $A'C' \perp BD$. **B.** $BB' \perp BD$. **C.** $A'B \perp DC'$. **D.** $BC' \perp A'D$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Chú ý: Hình hộp có tất cả các cạnh bằng nhau còn gọi là hình hộp thoi.



A đúng vì:

$\begin{cases} A'C' \perp B'D' \\ B'D' \,//\, BD \end{cases} \Rightarrow A'C' \perp BD$.

B sai vì:

C đúng vì: $\begin{cases} A'B \perp AB' \\ AB' \,//\, DC' \end{cases} \Rightarrow A'B \perp DC'$.

D đúng vì: $\begin{cases} BC' \perp B'C \\ B'C \,//\, A'D \end{cases} \Rightarrow BC' \perp A'D$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. Điều ngược lại đúng không?

Sau đây là lời giải:

Bước 1: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD$.

Bước 2: Chứng minh tương tự, từ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được $AD \perp BC$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được $AB \perp CD$.

Bước 3: Ngược lại đúng, vì quá trình chứng minh ở bước 1 và 2 là quá trình biến đổi tương đương.

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở đâu?

A. Đúng. **B.** Sai từ bước 1. **C.** Sai từ bước 1. **D.** Sai ở bước 3.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình thang. **B.** Hình bình hành.

C. Hình chữ nhật. **D.** Tứ giác không phải là hình thang.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

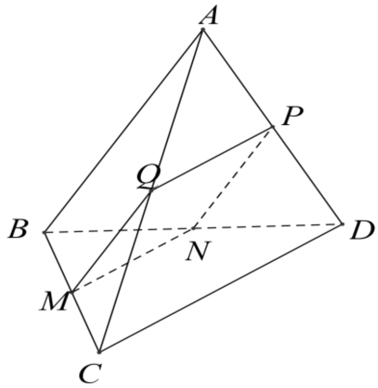
Ta có: $\begin{cases}\left(MNPQ\right)//AB\\ \left(MNPQ\right)\cap\left(ABC\right)=MQ\end{cases}\Rightarrow MQ//AB.$

Tương tự ta có: $MN//CD,\ NP//AB,\ QP//CD$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

lại có $MN\perp MQ\left(do\ AB\perp CD\right)$.

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.



Câu 5: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M,N,P,Q,R lần lượt là trung điểm của AB,CD,AD,BC và AC.

a) Khẳng định nào sau đây là **đúng nhất**?

A. $MN\perp RP, MN\perp RQ$ **B.** $MN\perp RP$, MN cắt RQ

C. MN chéo RP; MN chéo RQ **D.** Cả A, B, C đều sai

b) Tính góc của hai đường thẳng AB và CD?

A. $\left(AB,CD\right)=60^0$ **B.** $\left(AB,CD\right)=30^0$

C. $\left(AB,CD\right)=45^0$ **D.** $\left(AB,CD\right)=90^0$

Hướng dẫn giải:

a) Ta có $MC=MD=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên tam giác MCD cân tại M, do đó $MN\perp CD$.

Lại có $RP\parallel CD\Rightarrow MN\perp RQ$.

b) Tương tự ta có $QP\perp AD$

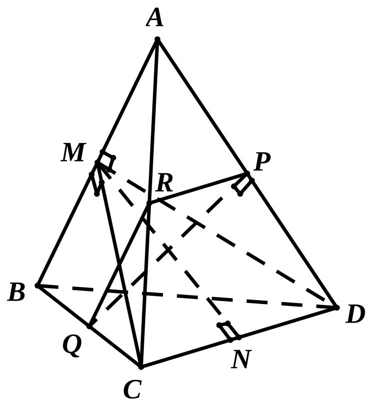
Trong tam giác vuông PDQ ta có

$QP^2=QD^2-DP^2=\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{a^2}{2}$ Ta có :

$RQ^2+RP^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=a^2=QP^2$

Do đó tam giác RPQ vuông tại R, hay $RP\perp RQ$.

Vì vậy $\begin{cases}AB\parallel RQ\\ CD\parallel RP\\ RP\perp RQ\end{cases}\Rightarrow AB\perp CD$.



Câu 6: Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

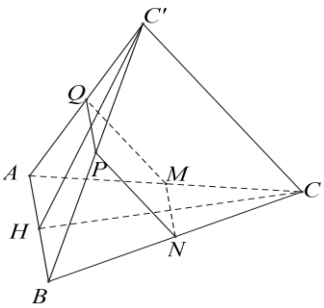
A. Hình bình hành. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình vuông. **D.** Hình thang.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Vì M, N, P, Q nên dễ thấy tứ giác $MNPQ$ là hình bhình hành.

Gọi H là trung điểm của AB.



Vì hai tam giác ABC và ABC' nên $\begin{cases} CH \perp AB \\ C'H \perp AB \end{cases}$

Suy ra $AB \perp (CHC')$. Do đó $AB \perp CC'$.

Ta có: $\begin{cases} PQ // AB \\ PN // CC' \\ AB \perp CC' \end{cases} \Rightarrow PQ \perp PN$.

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành với $AB = a, AD = 2a$.
Tam giác SAB vuông can tại A, M là một điểm trên cạnh AD(M khác A và D). Mặt phẳng (α) đi qua M và song sog với (SAB) cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q.

a) $MNPQ$ là hình gi?.

A. $MNPQ$ là hình thang vuông. **B.** $MNPQ$ là hình vuông.
C. $MNPQ$ là hình chữ nhật. **D.** $MNPQ$ là hình bình hành.

b)Tính diện tích của $MNPQ$ theo a.

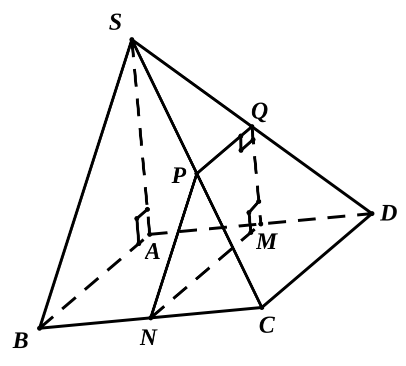
A. $S_{MNPQ} = \dfrac{3a^2}{8}$ **B.** $S_{MNPQ} = \dfrac{a^2}{8}$ **C.** $S_{MNPQ} = \dfrac{3a^2}{4}$ **D.** $S_{MNPQ} = \dfrac{a^2}{4}$

Hướng dẫn giải:

a) Ta có $\begin{cases} (\alpha) \parallel (SAB) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (\alpha) \cap (ABCD) = MN \end{cases} \Rightarrow MN \parallel AB$.

Tương tự $\begin{cases} (\alpha) \parallel (SAB) \\ (SBC) \cap (SAB) = SB \\ (\alpha) \cap (SBC) = NP \end{cases} \Rightarrow NP \parallel SB$

$\begin{cases} (\alpha) \parallel (SAB) \\ (SAD) \cap (SAB) = SA \\ (\alpha) \cap (SAD) = MQ \end{cases} \Rightarrow MQ \parallel SA$



Dễ thấy $MN \parallel PQ \parallel AB \parallel CD$ nên $MNPQ$ là hình bình hành

Lại có $\begin{cases} MN \parallel AB \\ MQ \parallel SA \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp MQ$.

Vậy $MNPQ$ là hình thang vuông.

b) Ta có $MN = AB = a$, $MQ = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a}{2}$, $PQ = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Vậy $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}(MN + PQ).MQ = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{a}{2}\right)\dfrac{a}{2} = \dfrac{3a^2}{8}$.

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Trên các cạnh DC và BB' lấy các điểm M và N sao cho $MD = NB = x (0 \le x \le a)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a) Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $AC' \perp B'D'$ **B.** AC’ cắt B’D’

C. AC’và B’D’ đồng phẳng

D. Cả A, B, C đều đúng

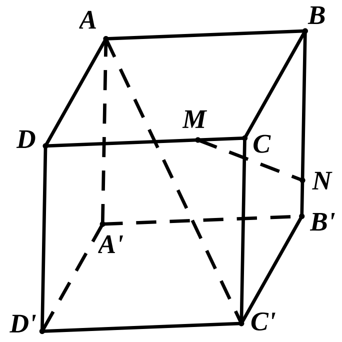
b) khẳng định nào sau đây là đúng ?.

A. $AC' \perp MN$

B. AC’ và MN cắt nhau

C. AC’ và MN đồng phẳng

D. Cả A, B, C đều đúng



Hướng dẫn giải:

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

a) Ta có $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{B'D'} = \vec{c} - \vec{b}$ nên

$$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{B'D'} = \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)\left(\vec{c} - \vec{b}\right)$$

$$= \vec{a}\left(\vec{c} - \vec{b}\right) + \vec{c}^2 - \vec{b}^2 = a^2 - a^2 = 0$$

$\Rightarrow AC' \perp B'D'$.

b) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}\right) - \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM}\right) = \left(\vec{b} + \frac{x}{a}\vec{a}\right) - \left(\vec{c} + \frac{x}{a}\vec{b}\right) = \frac{x}{a}\vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b} - \vec{c}$

Từ đó ta có $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN} = \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)[\left(\vec{b} + \frac{x}{a}\vec{a}\right) - \left(\vec{c} + \frac{x}{a}\vec{b}\right) = \frac{x}{a}\vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b} - \vec{c}]$

$$= \frac{x}{a}\vec{a}^2 + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b}^2 - \vec{c}^2 = x.a + \left(1 - \frac{x}{a}\right)a^2 - a^2 = 0.$$

Vậy $AC' \perp MN$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = a$, $BD = 3a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính MN.

A. $MN = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

B. $MN = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

C. $MN = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

D. $MN = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

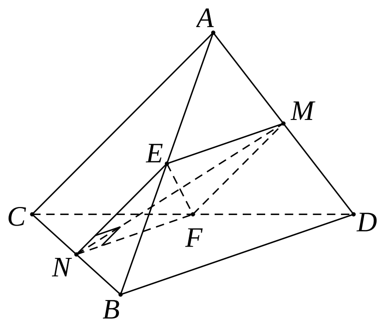
Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Ta có: $\begin{cases} EN \,//\, AC \\ NF \,//\, BD \end{cases} \Rightarrow \left(AC, BD\right) = \left(NE, NF\right) = 90° \Rightarrow NE \perp NF$ (1).

Mà: $\begin{cases} NE = FM = \frac{1}{2}AC \\ NF = ME = \frac{1}{2}BD \end{cases}$ (2).



Từ (1), (2) $\Rightarrow MENF$ là hình chữ nhật.

Từ đó ta có: $MN = \sqrt{NE^2 + NF^2} = \sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Chọn D

Câu 10: Trong không gian cho ba điểm A, B, C bất kỳ, chọn đẳng thức đúng?

A. $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$

B. $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$

C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$

D. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

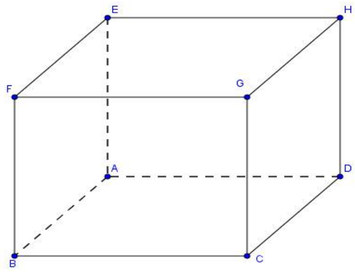
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\left(AB, AC\right) = AB^2 + AC^2 - 2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$

A. $a^2\sqrt{3}$.　　**B.** a^2　　**C.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$　　**D.** $a^2\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:.

Chọn B.



Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, mặt khác $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

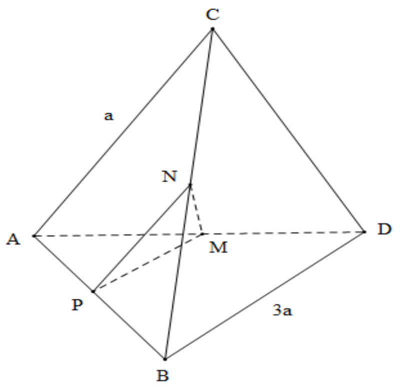
Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=a^2$

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=a,\ BD=3a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính MN

A. $MN=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$　　**B.** $MN=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$　　**C.** $MN=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$　　**D.** $MN=\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Kẻ $NP//AC\ (P\in AB)$, nối MP.

NP là đường trung bình $\Delta ABC\ \Rightarrow PN=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{a}{2}$.

MP là đường trung bình $\Delta ABD\ \Rightarrow PM=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{3a}{2}$.

Lại có $(AC,BD)=(PN,PM)=\overrightarrow{NPM}=90^\circ$ suy ra $\Rightarrow \Delta MNP$ vuông tại P.

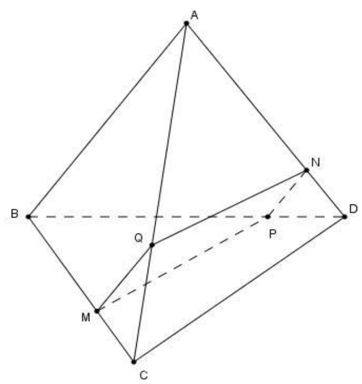
Vậy $MN=\sqrt{PN^2+PM^2}=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$ trong đó $AB=6$, $CD=3$, góc giữa AB và CD là 60° và điểm M trên BC sao cho $BM=2MC$. Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD cắt BD, AD, AC lần lượt tại M, N, Q. Diện tích $MNPQ$ bằng:

A. $2\sqrt{2}$　　**B.** 2　　**C.** $2\sqrt{3}$　　**D.** $\dfrac{3}{2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Thiết diện $MNPQ$ là hình bình hành.

Ta có $(AB,CD)=(QM,MP)=QMP=60^\circ$.

Suy ra $S_{MPNQ}=QN.QN.\sin 60^\circ$.

Lại có

$\Delta CMQ\ \#\ \Delta CBA \Rightarrow \dfrac{CM}{AB}=\dfrac{MO}{AB}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow MQ=2$

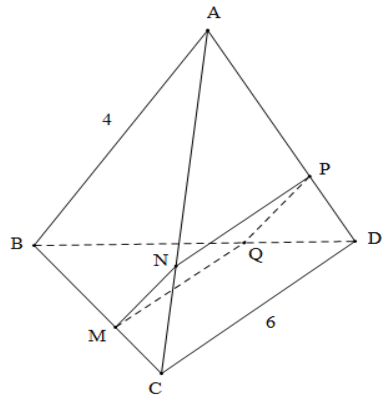
$\Delta AQN\ \#\ \Delta ACD \Rightarrow \dfrac{AQ}{AC}=\dfrac{QN}{CD}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow QN=2$

Do đó $S_{MPNQ}=QM.QN.\sin 60^\circ=2.2.\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$.

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB=4,\ CD=6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC=2BM$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với AB và CD. Diện tích thiết diện của (P) với tứ diện là?

A. 5 **B.** 6 **C.** $\dfrac{17}{3}$ **D.** $\dfrac{16}{3}$

Hướng dẫn giải:



Ta có $(AB,CD)=(MN,MQ)=NMQ=90^\circ$.

Suy ra thiết diện $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Lại có:

$$\Delta CMN \sim \Delta CBA \Rightarrow \frac{CM}{CB}=\frac{MN}{AB}=\frac{1}{3}\Rightarrow MN=\frac{4}{3}$$

$$\Delta ANP \sim \Delta ACD \Rightarrow \frac{AN}{AC}=\frac{NP}{CD}=\frac{2}{3}\Rightarrow MP=4$$

Suy ra $S_{MNPQ}=MN.NP=\dfrac{16}{3}$.