

TRẮC NGHIỆM MŨ VÀ LÔGARIT

TRONG CÁC ĐỀ THI TỐT NGHIỆP

I. MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT VÀ THÔNG HIỂU

Câu 1. (TN LẦN 2-2020) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 2a$ bằng

- A. $1 + \log_2 a$. B. $1 - \log_2 a$. C. $2 - \log_2 a$. D. $2 + \log_2 a$.

Lời giải

Chọn A

$$\log_2 2a = \log_2 2 + \log_2 a = 1 + \log_2 a$$

Câu 2. (TN LẦN 2-2020) Nghiệm của phương trình $\log_2(x+6) = 5$ là

- A. $x = 4$. B. $x = 19$. C. $x = 38$. D. $x = 26$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện } x+6 > 0 \Leftrightarrow x > -6$$

$$\text{Ta có: } \log_2(x+6) = 5 \Leftrightarrow \log_2(x+6) = \log_2 2^5 \Leftrightarrow (x+6) = 32 \Leftrightarrow x = 32 - 6 \Leftrightarrow x = 26(TM)$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình: } x = 26$$

Câu 3. (TN LẦN 2-2020) Với a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_3 a - 2\log_9 b = 3$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a = 27b$. B. $a = 9b$. C. $a = 27b^4$. D. $a = 27b^2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \log_3 a - 2\log_9 b = 3 \Leftrightarrow \log_3 a - \log_3 b = 3 \Leftrightarrow \log_3 \frac{a}{b} = 3 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 27 \Leftrightarrow a = 27b.$$

Câu 4. (TN LẦN 2-2020) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(36 - x^2) \geq 3$ là

- A. $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$. B. $(-\infty; 3]$. C. $[-3; 3]$. D. $(0; 3]$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \log_3(36 - x^2) \geq 3 \Leftrightarrow 36 - x^2 \geq 27 \Leftrightarrow 9 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3.$$

Câu 5. (TN LẦN 2-2020) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3(3a)$ bằng

- A. $3 - \log_3 a$. B. $1 - \log_3 a$. C. $3 + \log_3 a$. D. $1 + \log_3 a$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3(3a) = \log_3 3 + \log_3 a = 1 + \log_3 a$.

Câu 6. (TN LẦN 2-2020) Nghiệm của phương trình $2^{2x-2} = 2^x$ là

- A. $x = -2$. B. $x = 2$. C. $x = -4$. D. $x = 4$.

Lời giải

Chọn B

$2^{2x-2} = 2^x \Leftrightarrow 2x-2 = x \Leftrightarrow x = 2$.

Câu 7. (TN LẦN 2-2020) Nghiệm của phương trình $\log_2(x+7) = 5$ là

- A. $x = 18$. B. $x = 25$. C. $x = 39$. D. $x = 3$.

Lời giải

Chọn B

$\log_2(x+7) = 5 \Leftrightarrow x+7 = 2^5 \Leftrightarrow x = 25$.

Câu 8. (TN LẦN 2-2020) Với a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_2 a - 2\log_4 b = 4$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a = 16b^2$. B. $a = 8b$. C. $a = 16b$. D. $a = 16b^4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_2 a - 2\log_4 b = 4$

$\Leftrightarrow \log_2 a - 2\log_2 b = 4 \Leftrightarrow \log_2 a - 2 \cdot \frac{1}{2} \log_2 b = 4 \Leftrightarrow \log_2 a - \log_2 b = 4$

$\Leftrightarrow \log_2 \frac{a}{b} = 4 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 2^4 \Leftrightarrow a = 16b$

Câu 9. (TN LẦN 2-2020) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(31-x^2) \geq 3$ là

- A. $(-\infty; 2]$. B. $[-2; 2]$. C. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. D. $(0; 2]$.

Lời giải

Chọn B

$$\log_3(31-x^2) \geq 3 \Leftrightarrow 31-x^2 \geq 27 \Leftrightarrow x^2-4 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2; 2].$$

Câu 10. (TN LẦN 1-2020) Nghiệm của phương trình $\log_2(x-2)=3$ là:

- A. $x=6$. B. $x=8$. C. $x=11$. D. $x=10$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

$$\log_2(x-2)=3 \Leftrightarrow x-2=8 \Leftrightarrow x=10 \text{ (thỏa)}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=10$.

Câu 11. (TN LẦN 1-2020) Nghiệm của phương trình $3^{x+1}=9$ là

- A. $x=1$. B. $x=2$. C. $x=-2$. D. $x=-1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3^{x+1}=9 \Leftrightarrow 3^{x+1}=3^2 \Leftrightarrow x+1=2 \Leftrightarrow x=1$.

Câu 12. (TN LẦN 1-2020) Tập xác định của hàm số $y=\log_3 x$ là

- A. $(-\infty; 0)$ B. $(0; +\infty)$ C. $(-\infty; +\infty)$ D. $[0; +\infty)$

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện xác định: $x > 0$.

Câu 13. (TN LẦN 1-2020) Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^3} b$ bằng

- A. $3+\log_a b$ B. $3\log_a b$ C. $\frac{1}{3}+\log_a b$ D. $\frac{1}{3}\log_a b$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_{a^3} b = \frac{1}{3}\log_a b$.

Câu 14. (TN LẦN 1-2020) Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-7} < 4$ là

- A. $(-3; 3)$. B. $(0; 3)$. C. $(-\infty; 3)$. D. $(3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $2^{x^2-7} < 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-7} < 2^2 \Rightarrow x^2 - 7 < 2 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Rightarrow x \in (-3; 3)$.

Câu 15. (TN LẦN 1-2020) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $9^{\log_3(ab)} = 4a$. Giá trị của ab^2 bằng

- A. 3 B. 6 C. 2 D. 4

Lời giải

Chọn D

Ta có : $9^{\log_3 ab} = 4a \Leftrightarrow 2\log_3 ab = \log_3 4a \Leftrightarrow \log_3 a^2b^2 = \log_3 4a \Rightarrow a^2b^2 = 4a$
 $\Leftrightarrow ab^2 = 4$.

Câu 16: (THAM KHẢO LẦN 2-2020) Nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 27$ là

- A. $x = 4$. B. $x = 3$. C. $x = 2$. D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn A

$3^{x-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^3 \Leftrightarrow x = 4$.

Câu 17: (THAM KHẢO LẦN 2-2020) Tập xác định của hàm số $y = \log_2 x$ là

- A. $[0; +\infty)$. B. $(-\infty; +\infty)$. C. $(0; +\infty)$. D. $[2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi $x > 0$. Vậy tập xác định $D = (0; +\infty)$.

Câu 18: (THAM KHẢO LẦN 2-2020) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2(a^3)$ bằng

- A. $\left(\frac{3}{2}\log_2 a\right)$. B. $\frac{1}{3}\log_2 a$. C. $3 + \log_2 a$. D. $3\log_2 a$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_2(a^3) = 3\log_2 a$.

Câu 19: (THAM KHẢO LẦN 2-2020) Tập nghiệm của bất phương trình $\log x \geq 1$ là

- A. $(10; +\infty)$. B. $(0; +\infty)$. C. $[10; +\infty)$. D. $(-\infty; 10)$.

Lời giải

Chọn C

$$\log x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 10.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[10; +\infty)$.

Câu 20: (THAM KHẢO LẦN 2-2020) Xét các số thực $a; b$ thỏa mãn $\log_3(3^a \cdot 9^b) = \log_9 3$.

Mệnh đề nào là đúng?

- A. $a + 2b = 2$. B. $4a + 2b = 1$. C. $4ab = 1$. D. $2a + 4b = 1$.

Lời giải

Chọn D

$$\log_3(3^a \cdot 9^b) = \log_9 3 \Rightarrow \log_3(3^a) + \log_3(9^b) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a + 2b = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a + 4b = 1.$$

Câu 21: (THAM KHẢO LẦN 2-2020) Tập nghiệm của bất phương trình $9^x + 2 \cdot 3^x - 3 > 0$ là

- A. $[0; +\infty)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(1; +\infty)$. D. $[1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = 3^x (t > 0) \text{ bất phương trình đã cho trở thành } t^2 + 2t - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 1 \\ t < -3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với $t > 1$ thì $3^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Câu 22. (THAM KHẢO LẦN 1-2020) Nghiệm của phương trình $\log_3(2x-1) = 2$ là

- A. $x = 3$. B. $x = 5$. C. $x = \frac{9}{2}$. D. $x = \frac{7}{2}$.

Lời giải

Đáp án B

$$\log_3(2x-1) = 2 \Leftrightarrow 2x-1 = 3^2 \Leftrightarrow x = 5$$

Câu 23. (THAM KHẢO LẦN 1-2020) Xét tất cả các số dương a và b thỏa mãn

$\log_2 a = \log_8(ab)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a = b^2$. B. $a^3 = b$. C. $a = b$. D. $a^2 = b$.

Lời giải

Đáp án D

$$\log_2 a = \log_8(ab) \Leftrightarrow \log_2 a = \frac{1}{3} \log_2(ab)$$

$$\Leftrightarrow 3\log_2 a = \log_2(ab) \Leftrightarrow \log_2 a^3 = \log_2(ab) \Leftrightarrow a^3 = ab \Leftrightarrow a^2 = b.$$

Câu 24. (THAM KHẢO LẦN 1-2020) Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9}$ là

- A. $[-2; 4]$. B. $[-4; 2]$. C. $(-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$. D. $(-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải

Đáp án A

$$5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9} \Leftrightarrow x-1 \geq x^2-x-9 \Leftrightarrow x^2-2x-8 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$$

Câu 25. (THAM KHẢO LẦN 1-2020) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn

$$\log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x+y). \text{ Giá trị của } \frac{x}{y} \text{ bằng}$$

- A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$. D. $\log_{\frac{3}{2}} 2$.

Lời giải

Đáp án B

$$\text{Giả sử } \log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x+y) = t. \text{ Suy ra: } \begin{cases} x = 9^t \\ y = 6^t \\ 2x + y = 4^t \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 9^t + 6^t = 4^t$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^t + \left(\frac{3}{2}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^t = -1 \text{ (loại)} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{x}{y} = \frac{9^t}{6^t} = \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1}{2}.$$

Câu 26. (THPT QG-2019) Với a là số thực dương tùy, $\log_5 a^2$ bằng

- A. $2\log_5 a$. B. $2 + \log_5 a$. C. $\frac{1}{2} + \log_5 a$. D. $\frac{1}{2} \log_5 a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_5 a^2 = 2\log_5 a$.

Câu 27. (THPT QG-2019) Nghiệm phương trình $3^{2x-1} = 27$ là

- A. $x = 5$. B. $x = 1$. C. $x = 2$. D. $x = 4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $3^{2x-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 3^3 \Leftrightarrow 2x-1=3 \Leftrightarrow x=2$.

Câu 28. (THPT QG-2019) Cho hàm số $y = 2^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

- A. $(2x-3) \cdot 2^{x^2-3x} \cdot \ln 2$. B. $2^{x^2-3x} \cdot \ln 2$. C. $(2x-3) \cdot 2^{x^2-3x}$. D. $(x^2-3x) \cdot 2^{x^2-3x-1}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 29. (THPT QG-2019) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^4 b = 16$. Giá trị của $4\log_2 a + \log_2 b$ bằng

- A. 4. B. 2. C. 16. D. 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có $4\log_2 a + \log_2 b = \log_2 a^4 + \log_2 b = \log_2 a^4 b = \log_2 16 = 4$.

Câu 30 (THPT QG-2019) Nghiệm của phương trình $\log_3(x+1) + 1 = \log_3(4x+1)$ là

- A. $x = 3$. B. $x = -3$. C. $x = 4$. D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn D

- $\log_3(x+1) + 1 = \log_3(4x+1)$ (1)
- (1) $\Leftrightarrow \log_3[3 \cdot (x+1)] = \log_3(4x+1) \Leftrightarrow 3x+3 = 4x+1 > 0 \Leftrightarrow x=2$.
- Vậy (1) có một nghiệm $x=2$.

Câu 31. (THPT QG-2018) Với a là số thực dương tùy ý, $\ln 5a - \ln 3a$ bằng

- A. $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$. B. $\ln(2a)$. C. $\ln \frac{5}{3}$. D. $\frac{\ln 5}{\ln 3}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \ln 5a - \ln 3a = \ln \frac{5a}{3a} = \ln \frac{5}{3}.$$

Câu 32. (THPT QG-2018) Phương trình $2^{2x+1} = 32$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{5}{2}$. B. $x = 2$. C. $x = \frac{3}{2}$. D. $x = 3$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } 2^{2x+1} = 32 \Leftrightarrow 2x+1=5 \Leftrightarrow x=2.$$

II. MỨC ĐỘ VẬN DỤNG VÀ VẬN DỤNG CAO

Câu 1. (TN LẦN 2-2020) Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2) \cdot 4^x$. Giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{8x+4}{2x-y+1}$ gần nhất với số nào dưới đây

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét $x^2 + y^2 - 2x + 2 > 0 \forall x, y$

$$\text{Bất phương trình } 2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2) \cdot 4^x \Leftrightarrow \frac{2^{x^2+y^2+1}}{2^{2x}} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2)$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2).$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + y^2 - 2x + 1$$

$$\text{Bất phương trình } \Leftrightarrow 2^t \leq t+1 \Leftrightarrow 2^t - t - 1 \leq 0$$

$$\text{Đặt } f(t) = 2^t - t - 1. \text{ Ta thấy } f(0) = f(1) = 0.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 2^t \ln 2 - 1$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2^t \ln 2 = 1 \Leftrightarrow t = \log_2 \left(\frac{1}{\ln 2} \right) \approx 0,52$$

t	$-\infty$	0	$\log_2\left(\frac{1}{\ln 2}\right)$	1	$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		0		0	

Quan sát BBT ta thấy $f(t) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1$

$$0 \leq x^2 + y^2 - 2x + 1 \leq 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \quad (1)$$

$$\text{Xét } P = \frac{8x+4}{2x-y+1} \Leftrightarrow 2Px - Py + P = 8x + 4$$

$$\Leftrightarrow P - 4 = (8 - 2P)x + Py$$

$$\Leftrightarrow P - 4 + 2P - 8 = (8 - 2P)x + 2P - 8 + Py$$

$$\Leftrightarrow 3P - 12 = (8 - 2P)(x - 1) + Py$$

$$\Leftrightarrow (3P - 12)^2 = [(8 - 2P)(x - 1) + Py]^2 \leq [(8 - 2P)^2 + P^2][(x - 1)^2 + y^2]$$

$$\text{Thế (1) vào ta có } (3P - 12)^2 \leq [(8 - 2P)^2 + P^2] \Leftrightarrow 4P^2 - 40P + 80 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 5 - \sqrt{5} \leq P \leq 5 + \sqrt{5}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} \frac{8-2P}{P} = \frac{x-1}{y} = \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{-2}{\sqrt{5}}y \\ \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}y\right)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{-2}{\sqrt{5}}y \\ y = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{-\sqrt{5}}{3} \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $5 - \sqrt{5} \approx 2,76$ gần giá trị 3 nhất.

Câu 2. (TN LẦN 2-2020) Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m;n)$ sao cho $m+n \leq 10$ và ứng với mỗi cặp $(m;n)$ tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1;1)$ thỏa mãn $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$?

A. 7.

B. 8.

C. 10.

D. 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) \Leftrightarrow \frac{2a^m}{n} = \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$.

Xét hai hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ và $g(x) = \frac{2}{n}x^m$ trên $(-1; 1)$.

Ta có $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$ nên $f(x)$ luôn đồng biến và

$f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln\left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right) = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x)$ nên $f(x)$ là

hàm số lẻ.

+ Nếu m chẵn thì $g(x)$ là hàm số chẵn và có bảng biến thiên dạng

x	-1	0	1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$g(-1)$	0	$g(1)$

Suy ra phương trình có nhiều nhất 2 nghiệm, do đó m lẻ.

+ Nếu m lẻ thì hàm số $g(x)$ là hàm số lẻ và luôn đồng biến.

Ta thấy phương trình luôn có nghiệm $x = 0$. Dựa vào tính chất đối xứng của đồ thị hàm số lẻ, suy ra phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm trên $(-1; 1)$ khi có 1 nghiệm

trên $(0; 1)$, hay $f(1) > g(1) \Leftrightarrow \ln(1 + \sqrt{2}) < \frac{2}{n} \Leftrightarrow n < \frac{2}{\ln(1 + \sqrt{2})} \approx 2,26 \Rightarrow n \in \{1; 2\}$.

Đối chiếu điều kiện, với $n = 1$ suy ra $m \in \{1; 3; 5; 7; 9\}$, có 5 cặp số thỏa mãn

Với $n = 2$ thì $m \in \{1; 3; 5; 7\}$ có 4 cặp số thỏa mãn.

Vậy có 9 cặp số thỏa mãn bài toán.

Câu 3. (TN LẦN 2-2020) Xét các số thực x và y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2)4^x$. Giá

trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{4y}{2x+y+1}$ gần nhất với số nào dưới đây?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2)4^x \Leftrightarrow 2^{x^2-2x+1+y^2} \leq (x^2 - 2x + 1) + y^2 + 1$.

Đặt $t = x^2 - 2x + 1 + y^2 \Rightarrow t \geq 0$. Khi đó ta có $2^t \leq t + 1, \forall t \geq 0$.

Đặt $f(t) = 2^t - t - 1, \forall t \geq 0$, ta có: $f'(t) = 2^t \ln 2 - 1$, cho $f'(t) = 0$.

Ta nhận thấy phương trình $f'(t) = 0$ có một nghiệm nên phương trình $f(t) = 0$ có tối đa hai nghiệm.

Mặt khác ta có $f(0) = f(1) = 0$. Suy ra phương trình $f(t) = 0$ có hai nghiệm $t = 1$ và $t = 0$.

Khi đó ta có bảng xét dấu của hàm số $f(t)$ như sau:

t	0	1	$+\infty$	
f(t)	0	-	0	+

Khi đó $f(t) \leq 0 \Leftrightarrow t \in [0; 1]$. Suy ra $x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

Khi đó tập hợp các điểm $M(x; y)$ là một hình tròn (S) tâm $I(1; 0)$, bán kính $R = 1$.

Ta có: $P = \frac{4y}{2x+y+1} \Leftrightarrow 2Px + (P-4)y + P = 0$.

Khi đó ta cũng có tập hợp các điểm $M(x; y)$ là một đường thẳng $\Delta: 2Px + (P-4)y + P = 0$.

Để Δ và (S) có điểm chung, ta suy ra $d(I, \Delta) \leq 1$.

$$\Leftrightarrow \frac{|2P+P|}{\sqrt{(2P)^2 + (P-4)^2}} \leq 1 \Leftrightarrow 3|P| \leq \sqrt{5P^2 - 8P + 16}$$

$$\Leftrightarrow 4P^2 + 8P - 16 \leq 0 \Leftrightarrow -1 - \sqrt{5} \leq P \leq -1 + \sqrt{5}.$$

Ta suy ra $P_{\max} = -1 + \sqrt{5}$. Dấu "=" xảy ra khi
$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}$$

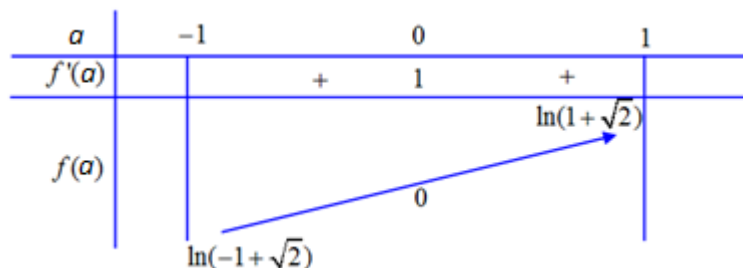
- Câu 4. (TN LẦN 2-2020)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $m+n \leq 12$ và ứng với mỗi cặp (m, n) tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1, 1)$ thỏa mãn $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$?
- A. 12. B. 10. C. 11. D. 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) \Leftrightarrow \frac{2}{n} a^m = \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$ (*).

Xét hàm $f(a) = \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$ trên $(-1, 1)$ (dễ thấy hàm f lẻ, đồng biến trên R), có BBT:



Xét hàm $g(a) = \frac{2}{n} \cdot a^m$ trên $(-1, 1)$.

Với m chẵn, $g(a)$ là hàm chẵn và $g(a) \geq 0, \forall a \in R$, do đó (*) không thể có 3 nghiệm.

Với m lẻ, $g(a)$ là hàm lẻ, đồng biến trên R và tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $a = 0$ là đường thẳng $y = 0$.

Dễ thấy (*) có nghiệm $a = 0 \in (-1, 1)$. Để (*) có đúng 3 nghiệm tức là còn có 2 nghiệm nữa là $\pm a_0$ với $0 < a_0 < 1$.

Muốn vậy, thì $g(1) = \frac{2}{n} \cdot 1^m = \frac{2}{n} > f(1) = \ln(1 + \sqrt{2}) \Leftrightarrow n < \frac{2}{\ln(1 + \sqrt{2})} \approx 2,26 \Rightarrow n = 1; n = 2$

Cụ thể:

+ $m \in \{3; 5; 7; 9\}$ thì $n \in \{1; 2\}$: Có 8 cặp (m, n)

+ $m = 11$ thì $n \in \{1\}$: Có 1 cặp (m, n)

+ $m=1$: Đồ thị hàm số $g(a)$ là đường thẳng ($g(a) = a; g(a) = 2a$) không thể cắt đồ thị hàm số $f(a)$ tại giao điểm $a_0 \neq 0$ được vì tiếp tuyến của hàm số $f(a)$ tại điểm có hoành độ $a=0$ là đường thẳng $y = a$.

Vậy có cả thảy 9 cặp (m, n) .

Câu 5. (TN LẦN 1-2020) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y)$?

A. 89.

B. 46.

C. 45.

D. 90.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y)$ (1)

Đặt $t = x + y \in \mathbb{N}^*$ (do $x, y \in \mathbb{Z}, x + y > 0$)

$$(1) \Leftrightarrow \log_3(x^2 - x + t) \geq \log_2 t \Leftrightarrow g(t) = \log_2 t - \log_3(x^2 - x + t) \leq 0 \quad (2)$$

Đạo hàm $g'(t) = \frac{1}{t \ln 2} - \frac{1}{(x^2 - x + t) \ln 3} > 0$ với mọi y . Do đó $g(t)$ đồng biến trên

$[1; +\infty)$

Vì mỗi x nguyên có không quá 127 giá trị $t \in \mathbb{N}^*$ nên ta có

$$g(128) > 0 \Leftrightarrow \log_2 128 - \log_3(x^2 - x + 128) > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 128 < 3^7 \Leftrightarrow -44,8 \leq x \leq 45,8$$

Như vậy có 90 giá trị thỏa yêu cầu bài toán

Câu 6: (THAM KHẢO LẦN 2-2020) Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(1; 2)$.

B. $\left[2; \frac{5}{2}\right)$.

C. $[3; 4)$.

D. $\left[\frac{5}{2}; 3\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $a, b > 1$ và $x, y > 0$ nên $a^x; b^y; \sqrt{ab} > 1$

$$\text{Do đó: } a^x = b^y = \sqrt{ab} \Leftrightarrow \log_a a^x = \log_a b^y = \log_a \sqrt{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_a b \\ 2y = 1 + \log_b a \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó, ta có: } P = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \log_a b + \log_b a.$$

Lại do $a, b > 1$ nên $\log_a b, \log_b a > 0$.

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{3}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2} \log_a b \cdot \log_b a} = \frac{3}{2} + \sqrt{2}, P = \frac{3}{2} + \sqrt{2} \Leftrightarrow \log_a b = \sqrt{2}.$$

Lưu ý rằng, luôn tồn tại $a, b > 1$ thỏa mãn $\log_a b = \sqrt{2}$.

$$\text{Vậy } \min P = \frac{3}{2} + \sqrt{2} \in \left[\frac{5}{2}; 3 \right).$$

Câu 7: (THAM KHẢO LẦN 2-2020) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2)$?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. Vô số

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+y > 0 \\ x^2+y^2 > 0 \end{cases}$$

Điều kiện cần

$$\text{Đặt } t = \log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2) \Rightarrow \begin{cases} x+y = 3^t (d) \\ x^2+y^2 = 4^t (C) \end{cases}$$

Suy ra x, y tồn tại nếu đường thẳng d cắt đường tròn (C) tại ít nhất một điểm.

$$\text{Hay } \frac{|-3^t|}{\sqrt{2}} \leq 2^t \Rightarrow t \leq \log_{\frac{3}{2}} \sqrt{2} \approx 0,8548.$$

$$\text{Khi đó: } x^2 + y^2 \leq 4^{\log_{\frac{3}{2}} \sqrt{2}} \approx 3,27 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x^2 \leq 3 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Điều kiện đủ:

$$\square \text{ Với } x = -1 \Rightarrow \begin{cases} y = 3^t + 1 \\ y^2 = 4^t - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^t - 1 > 0 \\ 4^t - 1 = (3^t + 1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > 0 \\ f(t) = 9^t + 2 \cdot 3^t + 2 - 4^t = 0 \end{cases}.$$

Khi $0 < t < 0,8548 \Rightarrow 9^t \geq 4^t \Rightarrow f(t) > 0$. Suy $x = -1(t)$.

$$\square \text{ Với } x=0 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t \\ y^2=4^t \end{cases} \Rightarrow 4^t=3^t \Rightarrow t=0 \Rightarrow y=1(t/m).$$

$$\square x=1 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t-1 \\ y^2=4^t-1 \end{cases} \Rightarrow y=t=0(t/m).$$

Câu 8. (THAM KHẢO LẦN 1-2020) Cho phương trình $\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 2]$.

A. $(1; 2)$.

B. $[1; 2]$.

C. $[1; 2)$.

D. $[2; +\infty)$.

Lời giải

Đáp án C

Điều kiện: $x > 0$.

$$pt \Leftrightarrow (1 + \log_2 x)^2 - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x - m\log_2 x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = m - 1 \end{cases}$$

Ta có: $x \in [1; 2] \Leftrightarrow \log_2 x \in [0; 1]$.

Vậy để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 2]$ khi và chỉ khi

$$0 \leq m - 1 < 1 \Leftrightarrow 1 \leq m < 2.$$

Câu 9. (THAM KHẢO LẦN 1-2020) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn

$$0 \leq x \leq 2000 \text{ và } \log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y ?$$

A. 2019.

B. 6.

C. 2020.

D. 4.

Lời giải

Đáp án D

$$+ \text{ Ta có: } \log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y \Leftrightarrow 1 + \log_3(x+1) + x = 2y + 9^y \quad (1)$$

$$+ \text{ Đặt } t = \log_3(x+1). \text{ Suy ra: } x+1 = 3^t \Leftrightarrow x = 3^t - 1.$$

$$\text{Khi đó: } (1) \Leftrightarrow t + 3^t = 2y + 3^{2y} \quad (2).$$

Xét hàm số: $f(h) = h + 3^h$, ta có: $f'(h) = 1 + 3^h \cdot \ln 3 > 0 \forall h \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(h)$ đồng biến trên \mathbb{R} .

Do đó: $(2) \Leftrightarrow f(t) = f(2y) \Leftrightarrow t = 2y \Leftrightarrow \log_3(x+1) = 2y \Leftrightarrow x+1 = 3^{2y} \Leftrightarrow x+1 = 9^y$.

+ Do $0 \leq x \leq 2020$ nên $1 \leq x+1 \leq 2021 \Leftrightarrow 1 \leq 9^y \leq 2021 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_9 2021 \approx 3,46$.

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{0; 1; 2; 3\}$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị x thoả đề.

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$ thoả đề.

- Câu 11. (THPT QG-2019)** Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(3x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm
- A. 2. B. 4. C. 3. D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > \frac{1}{3}$

Phương trình tương đương với:

$$\log_3 x - \log_3(3x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 \frac{3x-1}{x} = \log_3 m \Leftrightarrow m = \frac{3x-1}{x} = f(x)$$

Xét $f(x) = \frac{3x-1}{x}; x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right); f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0; \forall x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

Để phương trình có nghiệm thì $m \in (0; 3)$, suy ra có 2 giá trị nguyên thoả mãn

- Câu 12. (THPT QG-2019)** Cho phương trình $(4\log_2^2 x + \log_2 x - 5)\sqrt{7^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt
- A. 49. B. 47. C. Vô số. D. 48.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x \geq \log_7 m \end{cases}$$

Với $m=1$, phương trình trở thành $(4\log_2^2 x + \log_2 x - 5)\sqrt{7^x - 1} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\log_2^2 x + \log_2 x - 5 = 0 \\ 7^x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = -\frac{5}{4} \\ x = 0 \quad (\text{loại}) \end{cases}$$

Phương trình này có hai nghiệm (thỏa)

Với $m \geq 2$, điều kiện phương trình là $x \geq \log_7 m$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\log_2^2 x + \log_2 x - 5 = 0 \\ 7^x - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = -\frac{5}{4} \\ 7^x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2^{-\frac{5}{4}} \\ 7^x = m \end{cases}$$

Do $x = 2^{-\frac{5}{4}} \approx 2,26$ không là số nguyên, nên phương trình có đúng 2 nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \geq 3 \\ m < 7^2 \end{cases} \text{ (nghiệm } x = 2^{-\frac{5}{4}} \text{ không thỏa điều kiện và nghiệm } x = 2 \text{ thỏa điều kiện và}$$

khác $\log_7 m$)

Vậy $m \in \{3; 4; 5; \dots; 48\}$. Suy ra có 46 giá trị của m .

Do đó có tất cả 47 giá trị của m

Câu 13. (THPT QG-2018) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m \cdot 4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 13.

B. 3.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t = 4^x$, $t > 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 4mt + 5m^2 - 45 = 0 \quad (*).$$

Với mỗi nghiệm $t > 0$ của phương trình (*) sẽ tương ứng với duy nhất một nghiệm x của phương trình ban đầu. Do đó, yêu cầu bài toán tương đương phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt. Khi đó

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 45 > 0 \\ 4m > 0 \\ 5m^2 - 45 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\sqrt{5} < m < 3\sqrt{5} \\ m > 0 \\ \begin{cases} m < -3 \\ m > 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 3\sqrt{5}.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{4; 5; 6\}$.

Câu 14. (THPT QG-2018) Cho $a > 0$, $b > 0$ thỏa mãn

$$\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) = 2. \text{ Giá trị của } a + 2b \text{ bằng}$$

- A. 6. B. 9. C. $\frac{7}{2}$. D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } a > 0, b > 0 \text{ nên } \begin{cases} 3a + 2b + 1 > 1 \\ 9a^2 + b^2 + 1 > 1 \\ 6ab + 1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) > 0 \\ \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) > 0 \end{cases}.$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta được

$$\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) \geq 2\sqrt{\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1)}$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq 2\sqrt{\log_{6ab+1}(9a^2 + b^2 + 1)} \Leftrightarrow \log_{6ab+1}(9a^2 + b^2 + 1) \leq 1 \Leftrightarrow 9a^2 + b^2 + 1 \leq 6ab + 1$$

$$\Leftrightarrow (3a - b)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 3a = b.$$

Vì dấu “=” đã xảy ra nên

$$\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) = \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) \Leftrightarrow \log_{3b+1}(2b^2 + 1) = \log_{2b^2+1}(3b + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2b^2 + 1 = 3b + 1 \Leftrightarrow 2b^2 - 3b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{3}{2} \text{ (vì } b > 0). \text{ Suy ra } a = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } a + 2b = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}.$$

Câu 15. (THPT QG-2018) Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 20.

B. 19.

C. 9.

D. 21.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện $x > m$

Ta

có

$$5^x + m = \log_5(x - m) \Leftrightarrow 5^x + x = x - m + \log_5(x - m) \Leftrightarrow 5^x + x = 5^{\log_5(x - m)} + \log_5(x - m) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 5^t + t$, $f'(t) = 5^t \ln 5 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, do đó từ (1) suy ra

$$x = \log_5(x - m) \Leftrightarrow m = x - 5^x.$$

Xét hàm số $g(x) = x - 5^x$, $g'(x) = 1 - 5^x \cdot \ln 5$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_5 \frac{1}{\ln 5} = -\log_5 \ln 5 = x_0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\log_5 \ln 5$	$+\infty$
g'	+	0	-
g			

Do đó để phương trình có nghiệm thì $m \leq g(x_0) \approx -0,92$.

Các giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ là $\{-19; -18; \dots; -1\}$, có 19 giá trị m thỏa mãn.