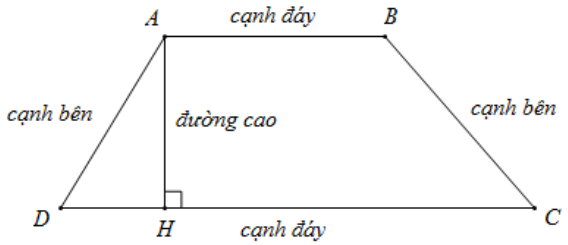
CHUYÊN ĐỀ 2: HÌNH THANG

A. LÝ THUYẾT

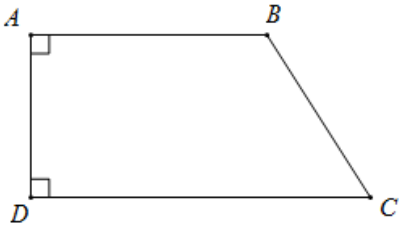
1. Định nghĩa hình thang

Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.



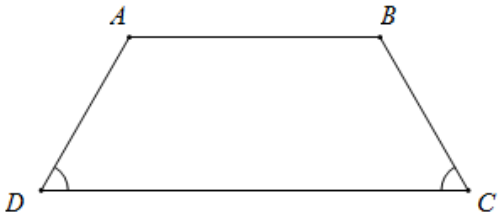
2. Hình thang vuông

Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông



3. Hình thang cân

Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau



- Trong hình thang cân
  - + Hai cạnh bên bằng nhau
  - + Hai đường chéo bằng nhau
- Dấu hiệu nhận biết hình thang cân
  1) Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.
  2) Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

B. BÀI TẬP

Dạng 1: Toán liên quan đến cạnh và góc của hình thang

Phương pháp:

+ Vận dụng bất đẳng thức tam giác
+ Tính chất hai góc kề bù
+ Tổng các góc trong một tam giác
+ Tính chất góc ngoài của tam giác
+ Tổng các góc trong một tứ giác

Bài toán 1: Tính các góc của hình thang ABCD (AB // CD) biết $A = 3D$ và $B - C = 30^0$.

Bài toán 2: Tính số đo các góc còn lại của hình thang ABCD (AB // CD) biết $A = 100^0$, $B = 60^0$.

Bài toán 3: Tính số đo các góc của hình thang ABCD biết AB // CD và $AB = BC = AD = \frac{1}{2}CD$, $BDC = 30^0$.

Đ/S: $A = 120^0$; $D = 60^0$; $C = 60^0$; $B = 120^0$.

Bài toán 4: Cho hình thang ABCD CÓ $A = D = 90^0$; $AB = AD = 2cm$; $CD = 4cm$. Tính các góc B, C của hình thang.

Hướng dẫn: Dựng $BH \perp CD \Rightarrow$ chứng minh ΔBHC vuông cân $\Rightarrow C = 45^0$

Đ/S: $C = 45^0$; $B = 135^0$

Bài toán 5: Cho hình thang ABCD (AB // CD) có $D = 60^0$

a) Tính A

b) Biết $\frac{B}{D} = \frac{4}{5}$. Tính B; C.

Bài toán 6: Cho hình thang ABCD (AB // CD) có $A - D = 20^0$; $B = 2C$. Tính các góc của hình thang.

Dạng 2: Chứng minh hình thang, hình thang vuông

Phương pháp:

+ Tứ giác có hai cạnh song song $\Rightarrow$ hình thang
+ Các cách chứng minh song song: so le, đồng vị, trong cùng phía bù nhau, từ vuông góc đến song song.
+ Hình thang có 1 góc vuông $\Rightarrow$ là hình thang vuông

Bài toán 1: Tứ giác ABCD có $AB = BC$ và AC là tia phân giác của A. Chứng minh rằng ABCD là hình thang.

Bài toán 2: Cho ΔABC vuông cân tại A. Vẽ về phía ngoài tam giác ACD vuông cân tại D. Tứ giác ABCD là hình gì? Vì sao?

Bài toán 3: Cho hình thang ABCD (AB // CD), tia phân giác của góc C đi qua trung điểm M của AD. Chứng minh rằng:

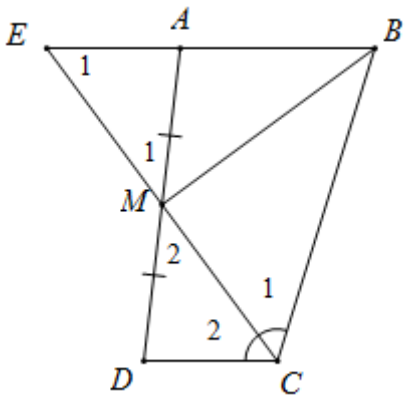
a) $BMC = 90^0$

b) $BC = AB + CD$

Hướng dẫn:

a) Giả sử CM cắt BA tại E.

- Xét ΔCMD và ΔEMA, có:



$$\begin{cases} M_1 = M_2 \text{ (đối đỉnh)} \\ DM = AM \text{ (M là trung điểm của AD)} \\ CDM = EAM \text{ (so le trong)} \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta CMD = \Delta EMA$ (g.c.g)

$\Rightarrow CM = EM$ và $CD = EA$

- Xét ΔBCE

$C_1 = C_2$ (CM là tia phân giác)

$C_2 = E_1$ ($\Delta CMD = \Delta EMA$)

$\Rightarrow E_1 = C_1$

$\Rightarrow \Delta EBC$ cân tại B.

- ΔEBC cân tại B có BM là trung tuyến $\Rightarrow BM$ cũng là đường cao

$\Rightarrow BM \perp EC$ tại $M \Rightarrow BMC = 90^0$ (đpcm)

b) Ta có: $BC = BE = EA + AB$

$\Leftrightarrow BC = CD + AB$ (vì $EA = CD$) $\Rightarrow$ đpcm

Bài toán 4: Cho hình thang ABCD (AB // CD) có $CD = AD + BC$. Gọi K là trung điểm của cạnh đáy CD sao cho $KD = AD$. Chứng minh rằng:

a) AK là tia phân giác của A

b) $KC = BC$

c) BK là tia phân giác của B.

Hướng dẫn:

a) ΔADK cân tại D $\Rightarrow DAK = DKA$

mà $BAK = DKA$ (so le trong)

$\Rightarrow DAK = BAK \Rightarrow AK$ là tia phân giác A

b) $CD = AD + BC$

$$\left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow CD = DK + BC \ (AD = DK) \\ \text{mà } CD = DK + KC \end{array}\right\} \Rightarrow BC = KC$$

c) Tương tự a.

Bài toán 5: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Trên BC lấy điểm M sao cho $CM = CA$, đường thẳng đi qua M song song với CA cắt AB tại I.

a) Tứ giác ACMI là hình gì? Vì sao?

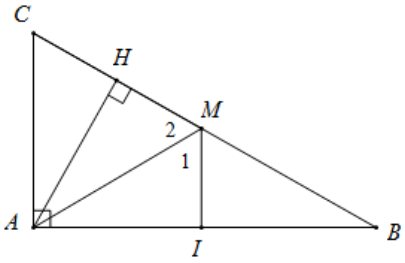
b) Chứng minh: $AI = AH$

c) Chứng minh $AB + AC < AH + BC$

Hướng dẫn:

a) ACMI là hình thang vuông (h/s tự chứng minh)

b) $\begin{cases} M_1 = CAM \ (\text{so le trong}) \\ M_2 = CAM \ (\Delta ACM \text{ cân}) \end{cases}$



$\Rightarrow M_1 = M_2$

$\Delta AHM = \Delta AIM \ (\text{ch} - \text{gn})$

$\Rightarrow AI = AH$

c) $AB = AI + IB = AH + IB < AH + BM \left(IB < BM\right)$

$\Rightarrow AB + AC < AH + BM + CM = AH + BC$

Dạng 3: Toán liên quan cạnh - góc của hình thang cân

Phương pháp:

+ Vận dụng bất đẳng thức tam giác
+ Tính chất hai góc kề bù
+ Tổng các góc trong tam giác, tứ giác

Bài toán 1: Cho hình thang cân ABCD (AB // CD) có $A = 2C$. Tính các góc của hình thang cân ABCD.

Bài toán 2: Cho hình thang cân ABCD (AB // CD) có $A = 3D$. Tính các góc của hình thang cân ABCD.

Bài toán 3: Cho hình thang cân ABCD (AB // CD) có $A = 50^0$. Tính B, C, D.

Bài toán 4: Cho hình thang cân ABCD (AD // BC). O là giao điểm của hai đường chéo AC vad BD. Chứng minh các tam giác OEB và OAD cân.

Bài toán 5: Cho hình thang cân ABCD (AB // CD) có $AB = 4,5cm$, $A = B = 60^0$, $AD = BC = 2cm$. Tính độ dài đáy CD và diện tích hình thang cân ABCD.

Hướng dẫn:

$CD = 2,5cm$

$S = 3,5\sqrt{5}\ cm^2$

- Dựng đường cao CH, DK
- Gọi M là trung điểm của CB

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow HM = BM = \dfrac{1}{2}BC \\ B = 60^0 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \Delta ABM$ đều $\Rightarrow HM = BM = \dfrac{1}{2}BC = 1(cm)$

- Tương tự $AH = 1(cm) \Rightarrow DC = HK = 2,5(cm)$
- Pytago tính $CH = \sqrt{5}(cm)$

Bài toán 6: Cho hình thang vuông ABCD có $A = D = 90^0$; $AB = AD = 2cm$; $DC = 4cm$ và BH vuông góc với CD tại H.

a) Chứng minh $\Delta ABD = \Delta HDB$

b) Chứng minh ΔBHC vuông cân ở H

c) Tính S_{ABCD}

Bài toán 7: Cho hình thang ABCD (AB // CD; $AB < CD$). Hai tia phân giác của hai góc C và D cắt nhau tại K thuộc đáy AB. Chứng minh rằng:

a) ΔADK cân ở A; ΔBKC cân ở B

b) $AD + BC = AB$

Bài toán 8: Cho ΔABC cân tại A có BD và CE là hai đường trung tuyến, $D \in AC, E \in AB$. Chứng minh rằng:

a) ΔADE cân tại A

b) $\Delta ABD = \Delta ACE$

c) BCDE là hình thang cân.

Bài toán 9: Cho ΔABC cân tại A có BD và CK là hai đường cao. Chứng minh:

a) $\Delta ABH = \Delta ACK$

b) BCHK là hình thang cân. $\Delta ABD = \Delta ACE$