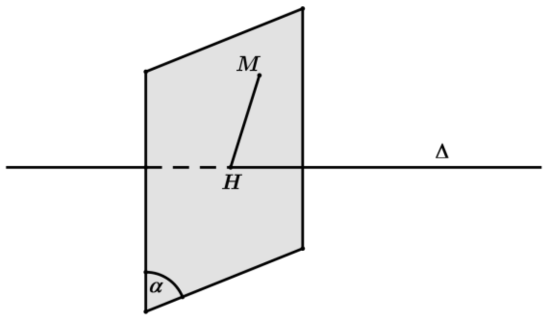
KHOẢNG CÁCH

A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT

1. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng.

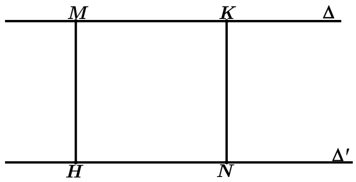


Cho điểm M và một đường thẳng Δ. Trong $mp(M,\Delta)$ gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên Δ. Khi đó khoảng cách MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến Δ.

$d(M,\Delta) = MH$

Nhận xét: $OH \le OM, \forall M \in \Delta$

2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng

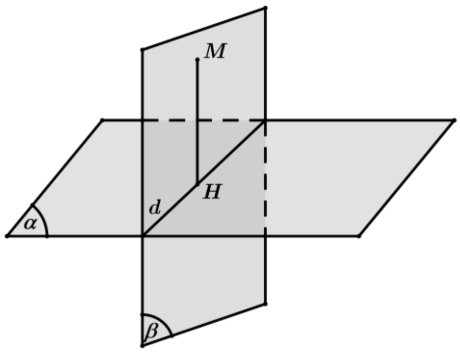


Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ':

- Nếu Δ và Δ' cắt nhau hoặc trùng nhau thì $d(\Delta,\Delta') = 0$.

- Nếu Δ và Δ' song song với nhau thì $d(\Delta,\Delta') = d(M,\Delta') = d(N,\Delta)$

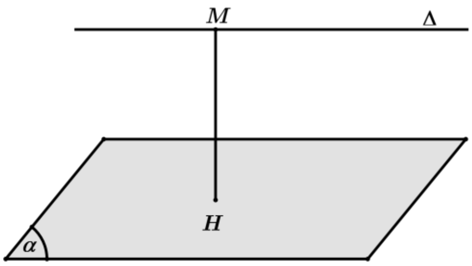
3. Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng.



Cho mặt phẳng (α) và một điểm M, gọi H là hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng (α). Khi đó khoảng cách MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α).

$d(M,(\alpha)) = MH$

4. Khoảng cách từ một đường thẳng tới một mặt phẳng.

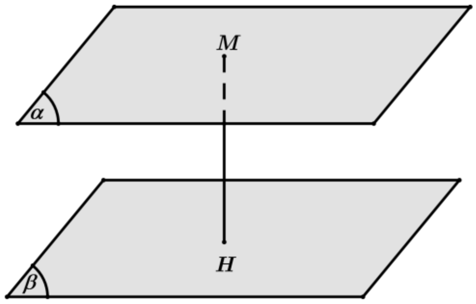


Cho đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) song song với nhau. Khi đó khoảng cách từ một điểm bất kì trên Δ đến mặt phẳng (α) được gọi là khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α).

$d(\Delta,(\alpha)) = d(M,(\alpha)), M \in \Delta$.

- Nếu Δ cắt (α) hoặc Δ nằm trong (α) thì $d(\Delta,(\alpha)) = 0$.

5. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng.

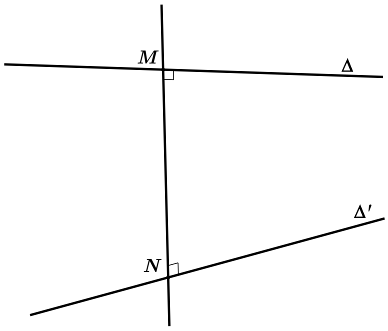


Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau, khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳn kia được gọi là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β).

$d\left((\alpha),(\beta)\right)=d\left(M,(\beta)\right)=d\left(N,(\alpha)\right)$ $,M\in(\alpha),N\in(\beta)$.

6. Khoảng cách giữa hai đường thẳng.

Cho hai đường thẳng chéo nhau a,b. Độ dài đoạn vuông góc chung MN của a và b được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b.



B – BÀI TẬP

Câu 1: Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây?

A. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm M bất kỳ trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

B. Nếu hai đường thẳng a và b chéo nhau và vuông góc với nhau thì đường vuông góc chung của chúng nằm trong mặt phẳng (α) chứa đường này và (α) vuông góc với đường kia.

C. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là khoảng cách từ một điểm M thuộc (α) chứa a và song song với b đến một điểm N bất kì trên b.

D. Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với a là khoảng cách từ một điểm A bất kì thuộc a tới mặt phẳng (α)

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia

B. Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó vuông góc với cả hai đường thẳng đó

C. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì nằm trong mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia

D. Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó cắt cả hai đường thẳng đó**.**

Hướng dẫn giải:

• Đáp án A: Đúng

• Đáp án B: Sai, do phát biểu này thiếu yếu tố cắt nhau.

• Đáp án C: Sai, vì mặt phẳng đó chưa chắc đã tồn tại.

• Đáp án D: Sai, do phát biểu này thiếu yếu tố vuông góc.

Chọn đáp án D.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào s**ai**?

A. Nếu hai đường thẳng a và b chéo nhau và vuông góc với nhau thì đường thẳng vuông góc chung của chúng nằm trong mặt phẳng (P) chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

B. Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm A bất kỳ thuộc a tới mp(P).

C. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là khoảng cách từ một điểm M thuộc mặt phẳng (P) chứa a và song song với b đến một điểm N bất kỳ trên b.

D. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm M bất kỳ trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

DẠNG 1: TÍNH KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM M ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG Δ.

Phương pháp:

Để tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ ta cần xác định được hình chiếu H của điểm M trên đường thẳng Δ, rồi xem MH là đường cao của một tam giác nào đó để tính. Điểm H thường được dựng theo hai cách sau:

□ Trong $mp(M,\Delta)$ vẽ $MH \perp \Delta \Rightarrow d(M,\Delta) = MH$

□ Dựng mặt phẳng (α) qua M và vuông góc với Δ tại H

$\Rightarrow d(M,\Delta) = MH$.

Hai công thức sau thường được dùng để tính MH

□ ΔMAB vuông tại M và có đường cao AH thì $\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MA^2} + \frac{1}{MB^2}$.

□ MH là đường cao của ΔMAB thì $MH = \frac{2S_{MAB}}{AB}$.

Câu 1: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ với SA vuông góc với (ABC) và $SA = 3a$. Diện tích tam giác ABC bằng $2a^2, BC = a$. Khoảng cách từ S đến BC bằng bao nhiêu?

A. $2a$. **B.** $4a$. **C.** $3a$. **D.** $5a$.

Hướng dẫn giải:

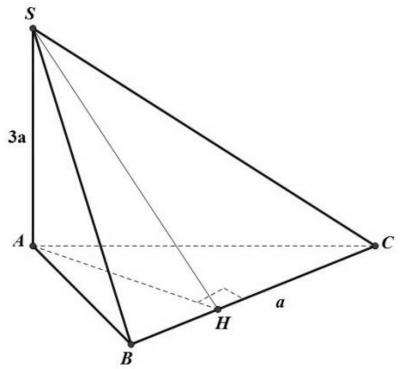
Kẻ AH vuông góc với BC:

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH.BC \to AH = \frac{2.S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{4a^2}{a} = 4a$

Khoảng cách từ S đến BC chính là SH

Dựa vào tam giác vuông ΔSAH ta có

$SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$

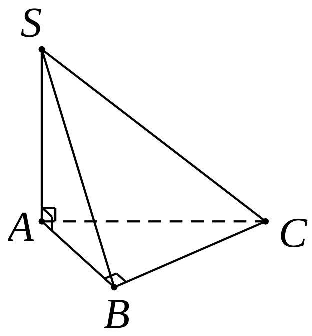


Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ trong đó SA, AB, BC đôi một vuông góc và $SA = AB = BC = 1$. Khoảng cách giữa hai điểm S và C nhận giá trị nào trong các giá trị sau ?

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Do $\begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp BC \end{cases}$ nên $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC$



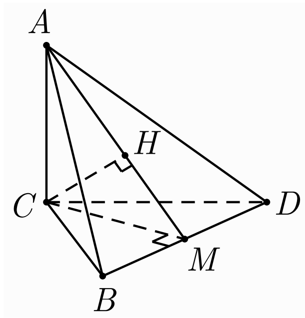
Như vậy $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{SA^2+(AB^2+BC^2)}=\sqrt{3}$

Chọn đáp án B.

Câu 3: Cho hình chóp $A.BCD$ có cạnh $AC\perp(BCD)$ và BCD là tam giác đều cạnh bằng a. Biết $AC=a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD. Khoảng cách từ C đến đường thẳng AM bằng

A. $a\sqrt{\frac{7}{5}}$. **B.** $a\sqrt{\frac{4}{7}}$. **C.** $a\sqrt{\frac{6}{11}}$. **D.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Hướng dẫn giải:



Do ΔABC đều cạnh a nên đường cao $MC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$d(C,AM)=CH=\frac{AC.MC}{\sqrt{AC^2+MC^2}}=a\frac{\sqrt{66}}{11}$$

Chọn đáp án C.

Câu 4: Trong mặt phẳng (P) cho tam giác đều ABC cạnh a. Trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng (P) lấy điểm S sao cho $SA=a$. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

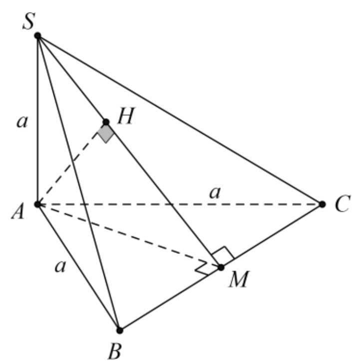
A. $a\sqrt{5}$. **B.** $2a$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

• Gọi M là trung điểm của BC ; H là hình chiếu vuông góc của A trên SM.

• Ta có $BC\perp AM$ và $BC\perp SA$ nên

$BC\perp(SAM)\Rightarrow BC\perp AH$.



Mà $AH\perp SM$, do đó $AH\perp(SBC)$.

Vậy $AH=d(A,(SBC))$.

• $AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AH=\frac{AS.AM}{\sqrt{AS^2+AM^2}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

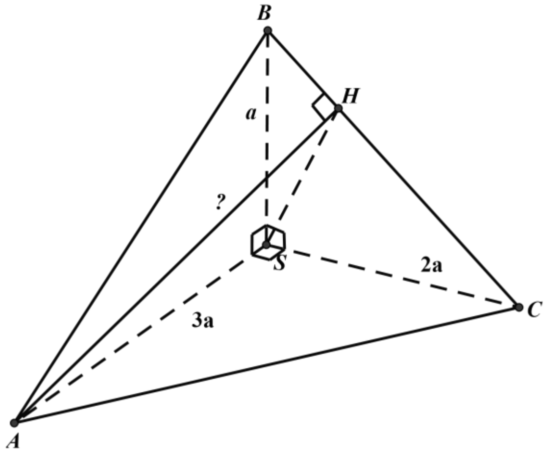
Chọn đáp án C.

Câu 5: Cho tứ diện $SABC$ trong đó SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một và $SA=3a$, $SB=a$, $SC=2a$. Khoảng cách từ A đến đường thẳng BC bằng:

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{7a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{8a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{5a\sqrt{6}}{6}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.



+ Dựng $AH \perp BC \Rightarrow d(A,BC) = AH$.

+ $\begin{cases} AS \perp (SBC) \supset BC \Rightarrow AS \perp BC \\ AH \perp BC \end{cases}$, AH cắt AS cùng nằm trong (SAH).

$\Rightarrow BC \perp (SAH) \supset SH \Rightarrow BC \perp SH$.

Xét trong ΔSBC vuông tại S có SH là đường cao ta có:

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow SH^2 = \frac{4a^2}{5} \Rightarrow SH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

+ Ta dễ chứng minh được $AS \perp (SBC) \supset SH \Rightarrow AS \perp SH \Rightarrow \Delta ASH$ vuông tại S.

Áp dụng hệ thức lượng trong ΔASH vuông tại S ta có:

$$AH^2 = SA^2 + SH^2 = 9a^2 + \frac{4a^2}{5} = \frac{49a^2}{5} \Rightarrow AH = \frac{7a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 6: Cho hình chóp $A.BCD$ có cạnh $AC \perp (BCD)$ và BCD là tam giác đều cạnh bằng a. Biết $AC = a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD. Khoảng cách từ C đến đường thẳng AM bằng

A. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.　　**B.** $a\sqrt{\frac{6}{11}}$.　　**C.** $a\sqrt{\frac{7}{5}}$.　　**D.** $a\sqrt{\frac{4}{7}}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>

Chọn đáp án B.

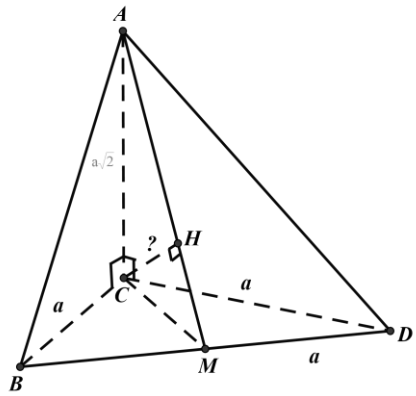
Dựng $CH \perp AM \Rightarrow d(C, AM) = CH$.

Vì ΔBCD là tam giác đều cạnh a và M là trung điểm của BD nên dễ tính được $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét ΔACM vuông tại C có CH là đường cao, ta có:

$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CA^2} + \frac{1}{CM^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} = \frac{11}{6a^2} \Rightarrow CH^2 = \frac{6a^2}{11}$$

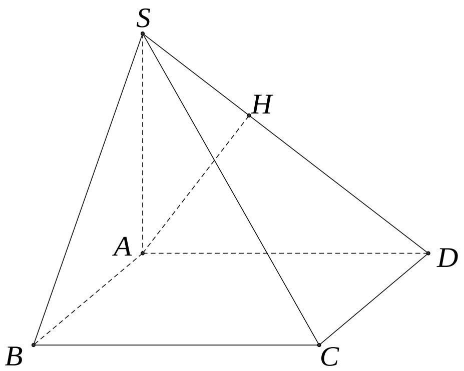
$\Rightarrow CH = a\sqrt{\frac{6}{11}}$.



Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AD=2a$, $SA=a$. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng:

A. $\dfrac{3a}{\sqrt{7}}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:



$SA\perp(ABCD)$ nên $SA\perp CD$; $AD\perp CD$.

Suy ra $(SAD)\perp CD$ Trong (SAD) kẻ AH vuông góc SD tại H. Khi đó $AH\perp(SCD)$

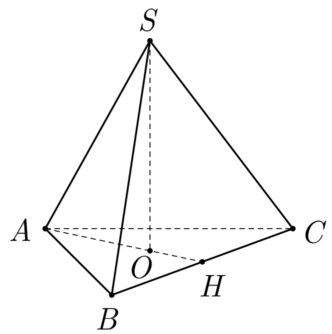
$$d\left(A,(SCD)\right)=AH=\frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}=\frac{a.2a}{\sqrt{a^2+(2a)^2}}=\frac{2a\sqrt{5}}{5}..$$

Chọn đáp án C.

Câu 8: Hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Khoảng cách từ S đến (ABC) bằng :

A. $2a$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** a. **D.** $a\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi O là chân đường cao của hình chóp.

Ta có $AO=\frac{2}{3}AH=\frac{2}{3}.3a.\frac{\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$

$\mathrm{d}(O,(ABC))=SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=a$

Chọn đáp án C.

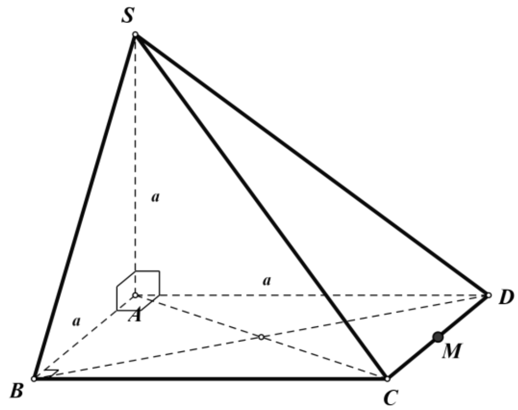
Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=a$. Gọi M là trung điểm của CD. Khoảng cách từ M đến (SAB) nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2a$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** a.

Hướng dẫn giải:

☑ Khoảng cách từ M đến (SAB): $d\left(M,(SAB)\right)=d\left(D,(SAB)\right)=a$.

Chọn đáp án D.



Câu 10: Cho hình chóp $A.BCD$ có cạnh $AC \perp (BCD)$ và BCD là tam giác đều cạnh bằng a. Biết $AC = a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD. Khoảng cách từ A đến đường thẳng BD bằng:

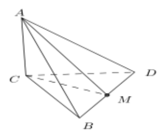
A. $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $\begin{cases} AC \perp BD \\ CM \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp AM$ (Định lý 3 đường vuông góc) $\Rightarrow d(A;BD) = AM$.

$CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (vì tam giác BCD đều).



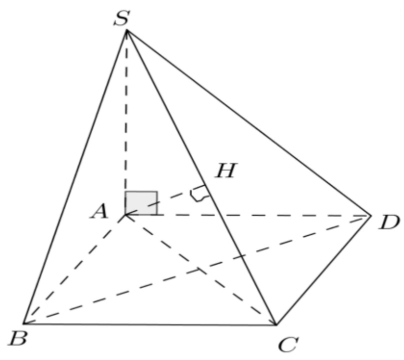
Ta có: $AM = \sqrt{AC^2 + MC^2} = \sqrt{2a^2 + \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $\hat{B} = 60°$. Biết $SA = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến SC.

A. $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{5a\sqrt{6}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Kẻ $AH \perp SC$, khi đó $d(A;SC) = AH$.

$ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $\hat{B} = 60° \Rightarrow \triangle ABC$ đều nên $AC = a$.

Trong tam giác vuông SAC ta có:

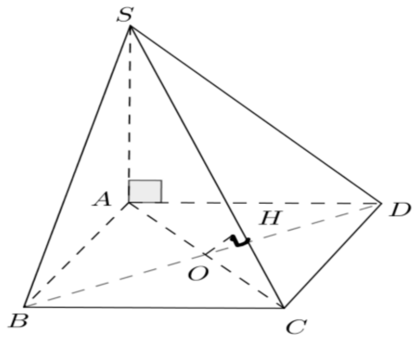
$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AC^2}$$

$$\Rightarrow AH=\frac{SA.AC}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\frac{2a.a}{\sqrt{4a^2+a^2}}=\frac{2\sqrt{5}a}{5}.$$

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, $SA=2a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Gọi O là tâm của $ABCD$, tính khoảng cách từ O đến SC.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Hướng dẫn giải:



Chọn A.

Kẻ $OH\perp SC$, khi đó $d(\text{O};SC)=OH$. Ta có: $\triangle SAC\sim\triangle OCH$ (g-g) nên $\frac{OH}{SA}=\frac{OC}{SC}\Rightarrow OH=\frac{OC}{SC}.SA$.

Mà: $OC=\frac{1}{2}AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=a\sqrt{6}$.

Vậy $OH=\frac{OC}{SC}.SA=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 13: Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và góc hợp bởi một cạnh bên và mặt đáy bằng α. Khoảng cách từ tâm của đáy đến một cạnh bên bằng

A. $a\sqrt{2}\cot\alpha$. **B.** $a\sqrt{2}\tan\alpha$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$.

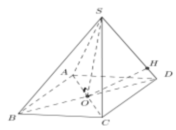
Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$SO\perp(ABCD)$, O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Kẻ $OH\perp SD$, khi đó $d(\text{O};SD)=OH$, $\alpha=SDO$.

Ta có: $OH=OD\sin\alpha=\frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$.



Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA=3a$, $AB=a\sqrt{3}$, $BC=a\sqrt{6}$. Khoảng cách từ B đến SC bằng

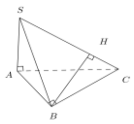
A. $a\sqrt{2}$. **B.** $2a$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Vì SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một nên $CB \perp SB$.

Kẻ $BH \perp SC$, khi đó $d\left(B;SC\right) = BH$.



Ta có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{9a^2 + 3a^2} = 2\sqrt{3}a$.

Trong tam giác vuông SBC ta có:

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BH = \frac{SB.BC}{\sqrt{SB^2 + BC^2}} = 2a.$$

Câu 15: Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và góc hợp bởi một cạnh bên và mặt đáy bằng α. Khoảng cách từ tâm của đáy đến một cạnh bên bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$ **B.** $a\sqrt{2}\tan$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$ **D.** $a\sqrt{2}\cot\alpha$

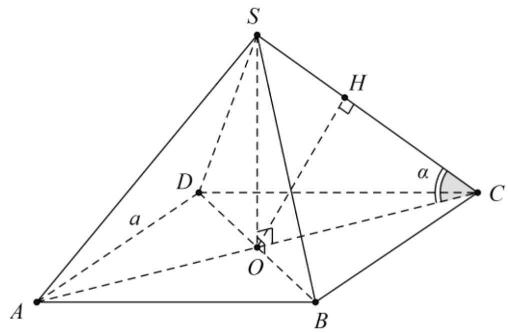
Hướng dẫn giải:

• $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

• Khoảng cách cần tìm là đoạn OH.

$OH = OC\sin\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\alpha.$

Chọn đáp án C.



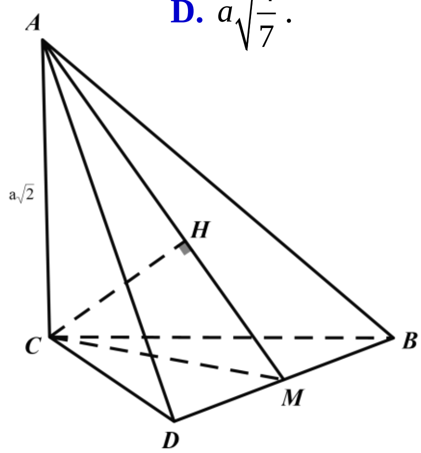
Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh bên AC vuông góc với mặt phẳng (BCD) và BCD là tam giác đều cạnh bằng a. Biết $AC = a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD. Khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AM bằng

A. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **B.** $a\sqrt{\frac{6}{11}}$. **C.** $a\sqrt{\frac{7}{5}}$. **D.** $a\sqrt{\frac{4}{7}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Nối CM. Kẻ $CH \perp AM$



Suy ra $d(C;AM)=CH$

Xét ΔACM có

$$\frac{1}{CH^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{CM^2}=\frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{11}{6a^2}$$

$$\Rightarrow CH=a\sqrt{\frac{6}{11}}$$

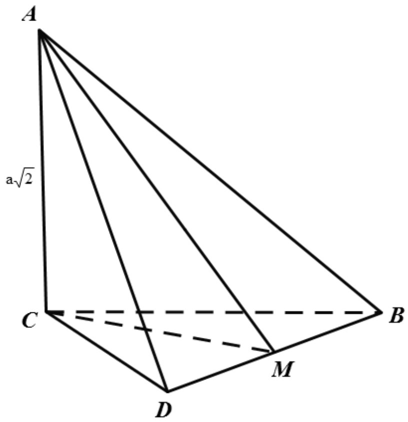
Vậy $d(C;AM)=CH=a\sqrt{\frac{6}{11}}$.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh bên AC vuông góc với mặt phẳng (BCD) và BCD là tam giác đều cạnh bằng a. Biết $AC=a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BD bằng

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{4a\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{11}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án D.



Ta có $d(A;BD)=\frac{a\sqrt{11}}{2}$ $AC\perp(BCD)\Rightarrow AC\perp BD$

Lại có với M là trung điểm BD mà ΔBCD đều nên $CM\perp BD$

Từ đó ta có $\begin{cases} AC\perp BD \\ CM\perp BD \end{cases}\Rightarrow AM\perp BD$

Suy ra $d(\mathrm{A};\mathrm{BD})=\mathrm{AM}$

Xét tam giác vuông ACM, ta có

$$AM=\sqrt{AC^2+CM^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{11}}{2}$$

Vậy $d(A;BD)=\frac{a\sqrt{11}}{2}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA=3a$, $AB=a\sqrt{3}$, $BC=a\sqrt{6}$. Khoảng cách từ B đến SC bằng

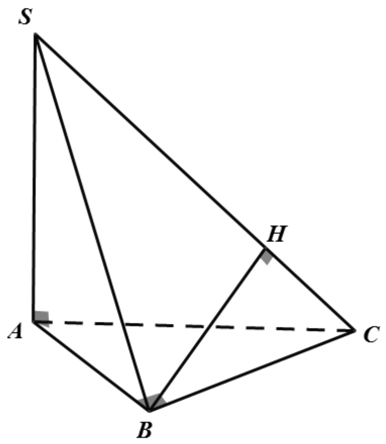
A. $a\sqrt{2}$. **B.** $2a$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Ta có

$\begin{cases} SA \perp AB \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow SB \perp BC$



Suy ra ΔSBC vuông tại B

Kẻ $BH \perp SC$. Ta có $d(B;SC) = BH$

Lại có

$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{SA^2 + AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{4a^2}$

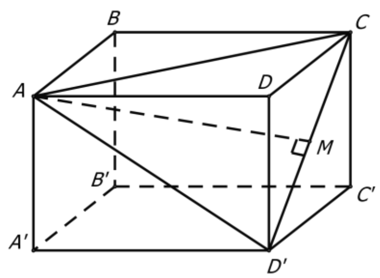
$\Rightarrow d(B;SC) = BH = 2a$.

Câu 19: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ đỉnh A của hình lập phương đó đến đường thẳng CD' bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm của CD'. Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên tam giác ACD' là tam giác đều cạnh $a\sqrt{2}$.



$AM \perp CD' \Rightarrow d\left(A, CD'\right) = AM = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Đáp án: **B.**

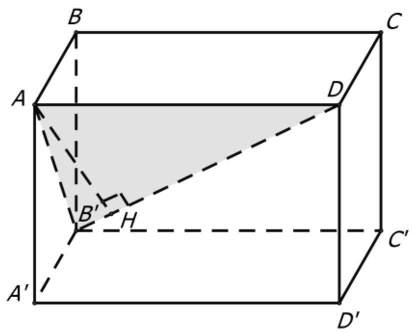
Câu 20: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ đỉnh A của hình lập phương đó đến đường thẳng DB' bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống DB'.

Dễ thấy $AD \perp \left(ABB'A'\right) \Rightarrow \Delta ADB'$ vuông đỉnh A.



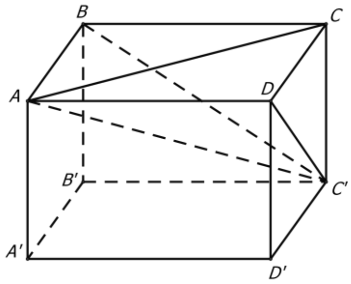
$AD = a; AB' = a\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB'^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Đáp án **D.**

Câu 21: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ ba điểm nào sau đây đến đường chéo AC' bằng nhau ?

A. A',B,C'. **B.** B,C,D. **C.** B',C',D'. **D.** A,A',D'.

Hướng dẫn giải:



Dễ thấy các tam giác $ABC', C'CA, ADC'$ là các tam giác vuông bằng nhau nên các đường cao hạ từ đỉnh góc vuông xuống canh huyền cũng bằng nhau.

Vậy: $d\left(B,AC'\right)=d\left(C,AC'\right)=d\left(D,AC'\right)$

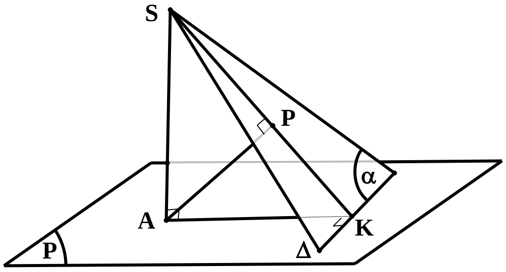
Đáp án **B.**

DẠNG 2: TÍNH KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẲNG.

Để tính được khoảng từ điểm M đến mặt phẳng (α) thì điều quan trọng nhất là ta phải xác định được hình chiếu của điểm M trên (α).

Phương pháp này, chúng tôi chia ra làm 3 trường hợp sau (minh hoạ bằng hình vẽ):

<u>TH 1:</u> A là chân đường cao, tức là $A \equiv H$.

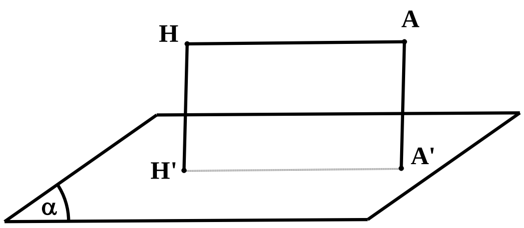


<u>*Bước 1:*</u> Dựng $AK \perp \Delta \Rightarrow \Delta \perp (SAK) \Rightarrow (\alpha) \perp (SAK)$

và $(\alpha) \cap (SAK) = SK$.

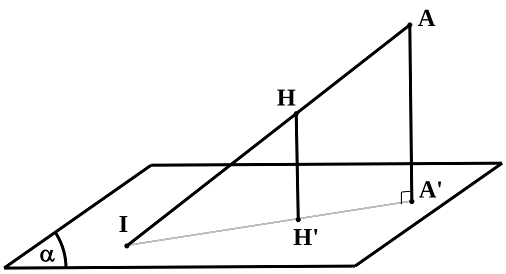
<u>*Bước 2:*</u> Dựng $AP \perp SK \Rightarrow AP \perp (\alpha) \Rightarrow d(A,(\alpha)) = AP$.

<u>TH 2:</u> Dựng đường thẳng AH, $AH \,||\, (\alpha)$.



Lúc đó: $d(A,(\alpha)) = d(H,(\alpha))$.

<u>TH 2:</u> Dựng đường thẳng AH, $AH \cap \alpha = I$.



Lúc đó: $\dfrac{d(A,(\alpha))}{d(H,(\alpha))} = \dfrac{IA}{IH} \Rightarrow \quad d(A,(\alpha)) = \dfrac{IA}{IH}.d(H,(\alpha))$

☐ Một kết quả có nhiều ứng dụng để tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng đối với tứ diện vuông (tương tư như hệ thức lượng trong tam giác vuông) là:

☐ Nếu tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và có đường cao OH thì

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}.$$

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA=a\sqrt{3}$, $AB=a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ A đến $\left(SBC\right)$ bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

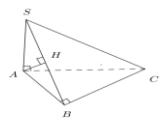
Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Kẻ $AH\perp SB$.

Ta có: $\begin{cases} BC\perp SA \\ BC\perp AB \end{cases}\Rightarrow BC\perp\left(SAB\right)\Rightarrow BC\perp AH$.

Suy ra $AH\perp\left(SBC\right)\Rightarrow d\left(A;\left(SBC\right)\right)=AH$.



Trong tam giác vuông SAB ta có:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AB^2}\Rightarrow AH=\frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\frac{\sqrt{6}a}{2}.$$

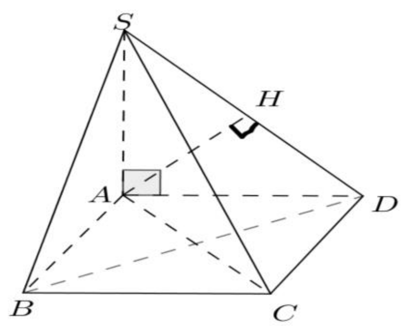
Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp\left(ABCD\right)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AD=2a$, $SA=a$. Khoảng cách từ A đến $\left(SCD\right)$ bằng:

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{3a}{\sqrt{7}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Kẻ $AH\perp SD$, mà vì $CD\perp\left(SAD\right)\Rightarrow CD\perp AH$ nên $d\left(A;SCD\right)=AH$.



Trong tam giác vuông SAD ta có:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AD^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{a.2a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

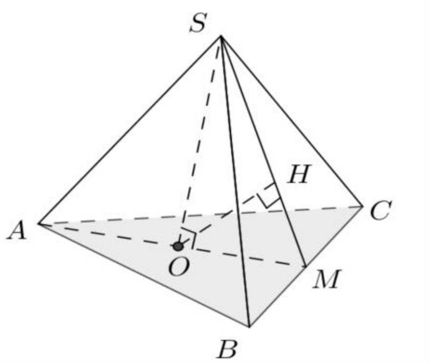
Câu 3: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ tâm O của đáy ABC đến một mặt bên:

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $a\sqrt{\frac{3}{10}}$. **D.** $a\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$SO \perp (ABC)$, với O là trọng tâm của tam giác ABC. M là trung điểm của BC.



Kẻ $OH \perp SM$, ta có $\begin{cases} BC \perp SO \\ BC \perp MO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOM) \Rightarrow BC \perp OH$

nên suy ra $d(O;(SBC)) = OH$.

Ta có: $OM = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2}$$

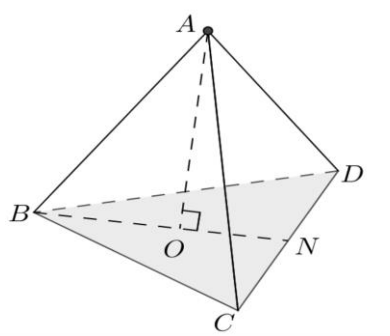
$$\Rightarrow OH = \frac{SO.OM}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \frac{a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3a^2 + \frac{3}{9}a^2}} = \frac{3a}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{3}{10}}a.$$

Câu 4: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ A đến (BCD) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Ta có: $AO \perp (BCD) \Rightarrow O$ là trọng tâm tam giác BCD.

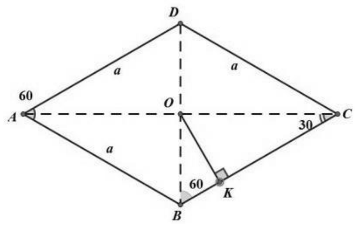
$$d(A;(BCD)) = AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a và có góc $BAD = 60^o$. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \frac{3a}{4}$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) là:

A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{3a}{4}$. **C.** $\frac{3a}{8}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Trong mặt phẳng $(ABCD)$: kẻ $OK \perp BC \left(K \in BC\right)$.



Mà $BC \perp SO$ nên suy ra hai mặt phẳng (SOK) và (SBC) vuông góc nhau theo giao tuyến SK.

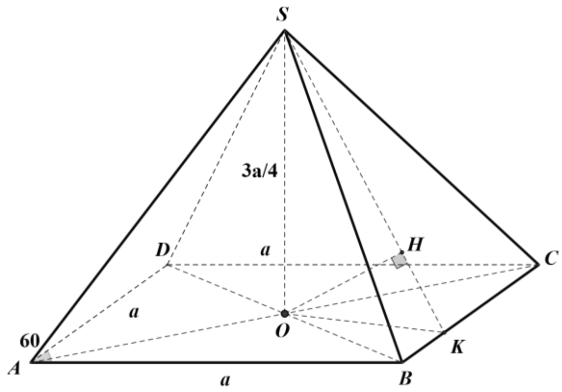
Trong mặt phẳng (SOK): kẻ $OH \perp SK \left(H \in SK\right)$.

Suy ra: $OH \perp (SBC) \Rightarrow d\left(O,(SBC)\right) = OH$.

Câu 6: Cho hai tam giác ABC và ABD nằm trong hai mặt phẳng hợp với nhau một góc 60^o, ΔABC cân ở C, ΔABD cân ở D. Đường cao DK của ΔABD bằng $12cm$. Khoảng cách từ D đến (ABC) bằng

A. $3\sqrt{3}$ cm **B.** $6\sqrt{3}$ cm **C.** 6 cm **D.** $6\sqrt{2}$ cm

Hướng dẫn giải:

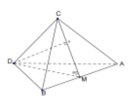


□ Gọi M là trung điểm AB suy ra:

□ Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên CM $\Rightarrow DH = d(\mathrm{D},(\mathrm{ABC}))$

□ $DH = \sin 60^0.DM = 6\sqrt{3}$

Chọn đáp án B.

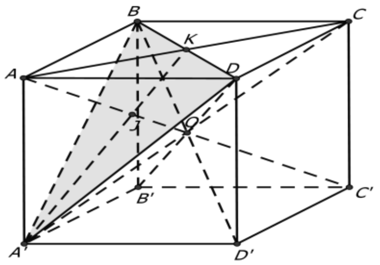


Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khi đó khoảng cách từ tâm của hình lập phương đến mặt phẳng (BDA') bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Hướng dẫn giải:

Bài toán chứng minh $AC' \perp (A'BD)$ trong sách giáo khoa đã có. Không chứng minh lại.



Dễ dàng tìm được $AC' = a\sqrt{3}$

$d(O,(A'BD)) = OJ = \frac{1}{6}AC' = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

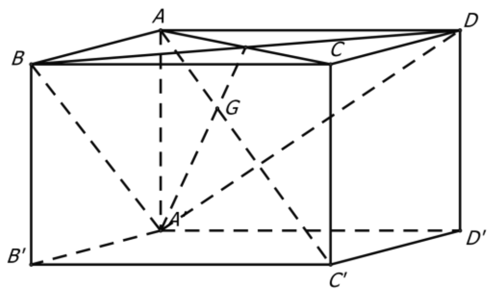
Đáp án: **D**

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khoảng cách từ A đến (BDA') bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $\left.\begin{array}{l} AC' \perp (BDA') \\ AC' \cap (BDA') = \{G\} \end{array}\right\} \Rightarrow d(A,(BDA')) = AG = \frac{1}{3}AC'$



$d(A,(BCA')) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Đáp án **B.**

Câu 9: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khoảng cách từ A đến $(B'CD')$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

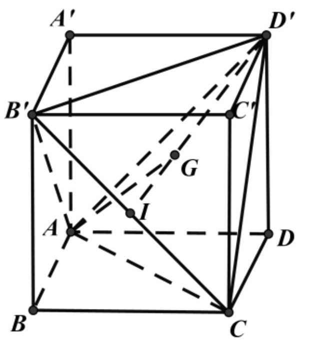
Hướng dẫn giải:

Ta có: $AB' = AC = AD' = B'D' = B'C = CD' = a\sqrt{2}$

Nên tứ diện $AB'CD'$ là tứ diện đều.

Gọi I là trung điểm $B'C$, G là trọng tâm tam giác $B'CD'$.

Khi đó ta có: $d(A;(B'CD')) = AG$



Vì tam giác $B'CD'$ đều nên $D'I = a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Theo tính chất trọng tâm ta có: $D'G = \frac{2}{3}D'I = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

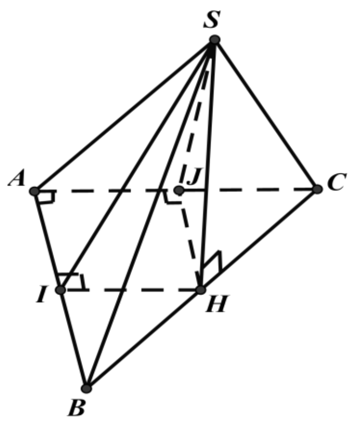
Trong tam giác vuông AGD' có:

$AG = \sqrt{D'A^2 - D'G^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **Chọn C**

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $AB = a$. Mặt bên chứa BC của hình chóp vuông góc với mặt đáy, hai mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc 45°. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng đáy (ABC).

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3a}{2}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC), vì mặt bên (SBC) vuông góc với (ABC) nên $H \in BC$.

Dựng $HI \perp AB, HJ \perp AC$, theo đề bài ta có $SIH = SJH = 45^0$.

Do đó tam giác $SHI = SHJ$ (cạnh góc vuông - góc nhọn)

Suy ra $HI = HJ$.

Lại có $B = C = 45^0 \Rightarrow \Delta BIH = \Delta CJH \Rightarrow HB = HC$

Vậy H trùng với trung điểm của BC. Từ đó ta có HI là đường trung bình của tam giác ABC nên $HI = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$.

Tam giác SHI vuông tại H và có $SIH = 45^0 \Rightarrow \Delta SHI$ vuông cân.

Do đó: $SH = HI = \frac{a}{2}$.**Chọn đáp án A.**

Câu 11: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng b, cạnh đáy bằng d, với $d < b\sqrt{3}$. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định bên dưới.

A. $d\left(S,(ABC)\right) = \sqrt{b^2 - \frac{1}{2}d^2}$. **B.** $d\left(S,(ABC)\right) = \sqrt{b^2 - d^2}$.

C. $d\left(S,(ABC)\right) = \sqrt{b^2 - \frac{1}{3}d^2}$. **D.** $d\left(S,(ABC)\right) = \sqrt{b^2 + d^2}$.

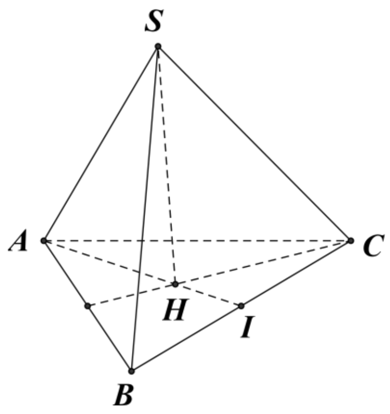
Hướng dẫn giải:

Gọi I là trung điểm của BC, H là trọng tâm tam giác ABC.

Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SH \perp (ABC) \Rightarrow d\left(S,(ABC)\right) = SH$.

Ta có $AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{d^2 - \dfrac{d^2}{4}} = \dfrac{d\sqrt{3}}{2}$.

$AH = \dfrac{2}{3}AI = \dfrac{d\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{b^2 - \dfrac{d^2}{3}}$. Chọn C.



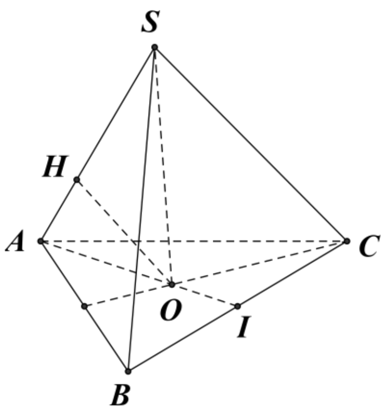
Câu 12: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và đường cao $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Khoảng cách từ điểm O đến cạnh bên SA bằng

A. $a\sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Vì hình chóp $S.ABC$ đều có SO là đường cao $\Rightarrow$ O là tâm của ΔABC

Gọi I là trung điểm cạnh BC.



Tam giác ABC đều nên $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO = \dfrac{2}{3}AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

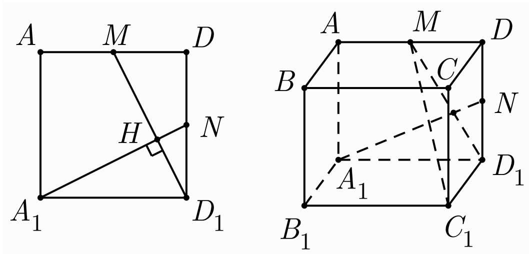
Kẻ $OH \perp SA . \Rightarrow d(O, SA) = OH$. Xét tam giác SOA vuông tại O:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OA^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{6}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AD. Khoảng cách từ A_1 đến mặt phẳng (C_1D_1M) bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$ **B.** $\dfrac{2a}{\sqrt{6}}$ **C.** $\dfrac{1}{2}a$ **D.** a

Hướng dẫn giải:



Gọi N là trung điểm cạnh DD_1 và $H = A_1N \cap MD_1$

Khi đó ta chứng minh được $A_1N \perp MD_1$

suy ra $A_1N \perp (C_1D_1M)$

$$\Rightarrow d\left(A_1,(C_1D_1M)\right) = AH = \frac{A_1D_1^2}{A_1N} = \frac{A_1D_1^2}{\sqrt{A_1D_1^2 + ND_1^2}}$$

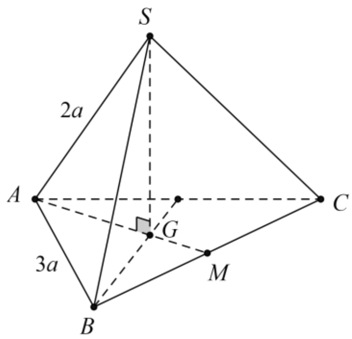
$$\Rightarrow d\left(A_1,(C_1D_1M)\right) = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Chọn đáp án A.

Câu 14: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng:

A. $4a$. **B.** $3a$. **C.** a. **D.** $2a$.

Hướng dẫn giải:



• Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Do $S.ABC$ là chóp đều nên $SG \perp (ABC)$.

• $AM = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AG = \dfrac{2}{3}AM = a\sqrt{3}.$

• ΔSAG vuông tại $SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a.$

Chọn đáp án C.

Câu 15: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ tâm O của đáy $ABCD$ đến một mặt bên:

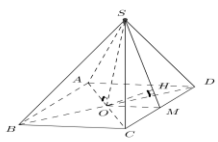
A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$SO \perp (ABCD)$, với O là tâm của hình vuông $ABCD$.

M là trung điểm của CD.



Kẻ $OH \perp SM$, ta có:

$$\begin{cases} DC \perp SO \\ DC \perp MO \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SOM) \Rightarrow DC \perp OH .$$

nên suy ra $d\left(O;(SCD)\right) = OH$.

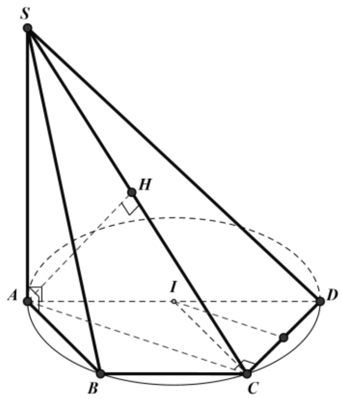
Ta có: $OM = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow OH = \frac{SO.\text{OM}}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \frac{\sqrt{2}a}{3} .$$

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$ và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ với $SA = a\sqrt{6}$. Khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD) lần lượt là:

A. $a\sqrt{2}$; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $a\sqrt{2}$; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $a\sqrt{3}$; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $a\sqrt{3}$; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải:



☑ $d\left(A,(SCD)\right) = AH; \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{1}{2a^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{2}$.

☑ $d\left(B,(SCD)\right) = d\left(I,(SCD)\right) = \frac{1}{2}.d\left(A,(SCD)\right) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A.

Câu 17: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có ba kích thước AB = a, AD = b, AA_1 = c. Trong các kết quả sau, kết quả nào **sai**?

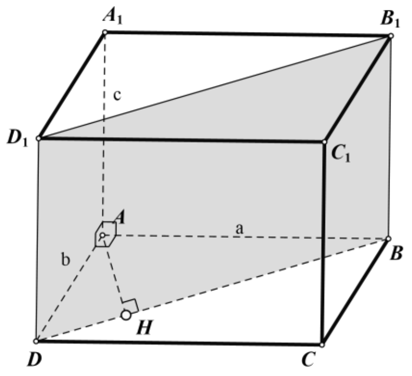
A. khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CC_1 bằng b.

B. khoảng cách từ A đến mặt phẳng (B_1BD) bằng $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

C. khoảng cách từ A đến mặt phẳng (B_1BD) bằng $\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

D. $BD_1 = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Hướng dẫn giải:



☑ $d\left(AB,CC_1\right)=BC=b\Rightarrow$ Câu A đúng.

☑

$$d\left(A,\left(B_1BD\right)\right)=AH;\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{\left(ab\right)^2}\Rightarrow AH=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Câu B đúng.

☑ Suy ra câu C sai.

☑ Suy ra câu D đúng, đường chéo hình chữ nhật bằng $BD_1=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Chọn đáp án C.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt đáy là hình thoi tâm $O,$ cạnh a và góc $BAD=120^\circ,$ đường cao $SO=a.$ Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a\sqrt{67}}{19}$. **B.** $\frac{a\sqrt{47}}{19}$. **C.** $\frac{a\sqrt{37}}{19}$. **D.** $\frac{a\sqrt{57}}{19}$.

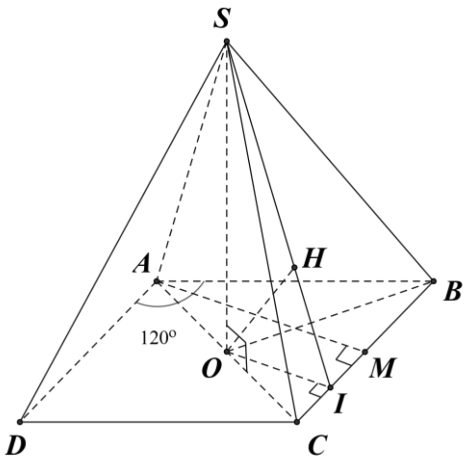
Hướng dẫn giải:

Vì hình thoi $ABCD$ có BAD bằng $120°$

Suy ra tam giác ABC đều cạnh a.

Kẻ đường cao AM của tam giác ABC

$$\Rightarrow AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Kẻ $OI\perp BC$ tại I $\Rightarrow OI=\frac{AM}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Kẻ $OH\perp SI\Rightarrow OH\perp\left(SBC\right)$

$\Rightarrow d\left(O,\left(SBC\right)\right)=OH$

Xét tam giác vuông SOI ta có:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OI^2}\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{57}}{19}.$$

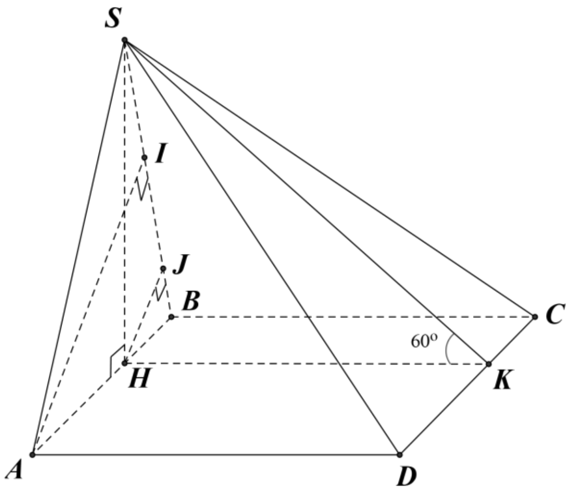
Chọn D.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=3a; AD=2a.$ Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ là điểm H thuộc cạnh AB sao cho

$AH = 2HB$. Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°. Khoảng từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) tính theo a bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{39}}{13}$. **C.** $\dfrac{6a\sqrt{39}}{13}$. **D.** $\dfrac{6a\sqrt{13}}{13}$.

Hướng dẫn giải:



Kẻ $HK \perp CD$

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$

là $\widehat{SKH} = 60^\circ$

Có $HK = AD = 2a$, $SH = HK.\tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$

Có $BC \perp (SAB)$,

Kẻ $HJ \perp SB$, mà $HJ \perp BC$ $HJ \perp (SBC)$

$$\frac{d(A,(SBC))}{d(H,(SBC))} = \frac{BA}{BH} = 3$$

$$d(A,(SBC)) = 3.d(H,(SBC)) = 3HJ$$

Mà $\dfrac{1}{HJ^2} = \dfrac{1}{HB^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{12a^2} = \dfrac{13}{12a^2} \Rightarrow HJ = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13} \Rightarrow d(A,(SBC)) = \dfrac{6a\sqrt{39}}{13}$.

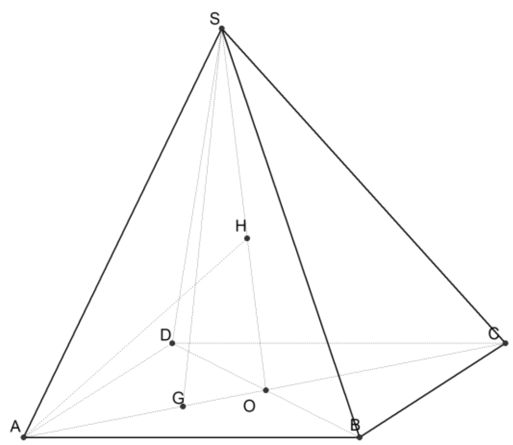
Chọn C**.**

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a; $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trọng tâm G của tam giác ABD, $\widehat{ASC} = 90^\circ$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) tính theo a bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Xác định khoảng cách:



- Đặc điểm của hình: Có đáy là hình thoi, góc $ABC = 120^\circ$ nên tam giác ABD đều cạnh a;

$AC = a\sqrt{3}; AG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Tam giác SAC vuông ở S, có đường cao SG nên $SA = \sqrt{AG.AC} = \sqrt{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.a\sqrt{3}} = a$; $SG = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Xét hình chóp $S.ABD$ có chân đường cao trùng với tâm của đáy nên $SA = SB = SD = a$.

- Dựng hình chiếu của A lên mặt phẳng (SBD): Kẻ đường cao AH của tam giác SAO với O là tâm của hình thoi.

$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SG \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAO) \Rightarrow BD \perp AH$

$\begin{cases} AH \perp BD \\ AH \perp SO \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBD)$. Vậy $d\left(A,(SBD)\right) = AH$

- Tính độ dài AH

$AH = \dfrac{SG.AO}{SO}$

Với $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $SG = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$; $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Cách khác: Nhận xét tứ diện $S.ABD$ có tất cả các cạnh bằng a; Do đó $S.ABD$ là tứ diện đều, vậy

$AH = SG = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án D.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD, DC. Góc giữa mặt phẳng (SBM) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBM) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

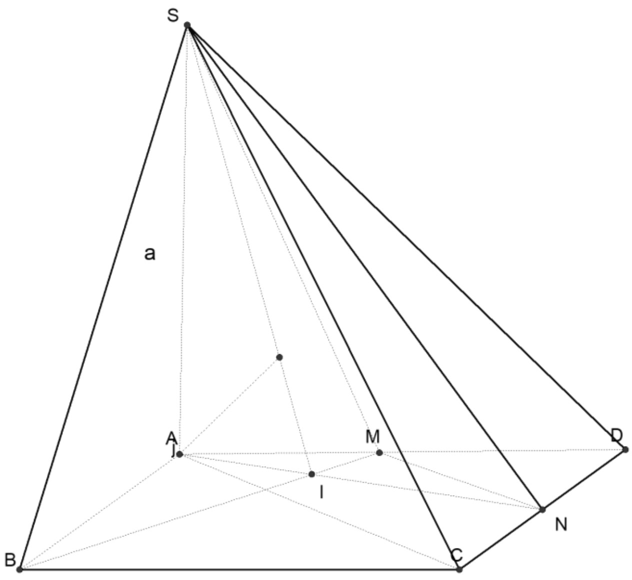
+ Đặc điểm của hình: Đáy là hình vuông $ABCD$ nên $AN \perp BM$.

Góc giữa mặt phẳng (SBM) và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $AIS = 45^\circ$. Vậy tam giác ASI vuông cân tại A. $AI = a$

- Xác định khoảng cách: $d(D,(SBM)) = d(A,(SBM)) = AH$. Với H là chân đường cao của tam giác ASI.

- Tính AH: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{2}{a^2}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Chọn đáp án D



Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của cạnh AD, góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$ bằng 60°. Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SBC) tính theo a bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{11}}{33}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{11}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{33}}{11}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{33}}{11}$.

Hướng dẫn giải:

- Đặc điểm của hình: Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$ là $SIH = 60^\circ$.

$IH = \dfrac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SH = IH.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$

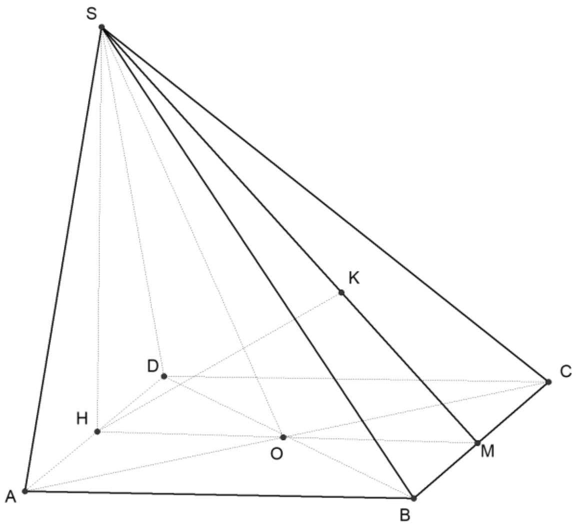
- Xác định khoảng cách: $d(H,(SAC)) = HK$.

Với HK là đường cao của tam giác SHM với M là trung điểm BC.

- Tính HK.

Xét tam giác vuông SHM có

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HM^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{6}a}{4}\right)^2} + \frac{1}{(a)^2} = \frac{11}{3a^2}$$



$HK = \dfrac{\sqrt{33}a}{11}$. Chọn đáp án C

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABD. Cạnh bên SD tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60°. Khoảng cách từ A tới mặt phẳng (SBC) tính theo a bằng

A. $\dfrac{3a\sqrt{285}}{19}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{285}}{19}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{285}}{18}$. **D.** $\dfrac{5a\sqrt{285}}{18}$.

Hướng dẫn giải:

Đặc điểm hình: Góc giữa SD tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SDE} = 60^\circ$.

$DE = \sqrt{OD^2 + OE^2} = \dfrac{2\sqrt{5}a}{6}$;

$SE = DE.\tan 60^0 = \dfrac{2\sqrt{15}}{6}a$

Xác định khoảng cách

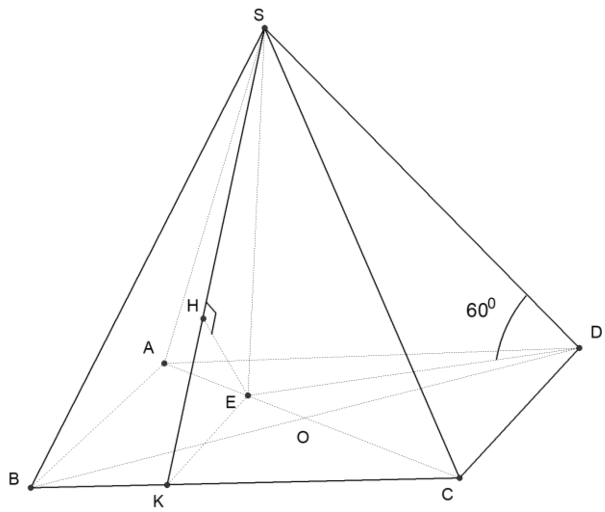
$d\left(A,(SBC)\right) = \dfrac{3}{2}d\left(E,(SBC)\right) = \dfrac{3}{2}EH$

Tính EH:

$$\frac{1}{EH^2} = \frac{1}{EK^2} + \frac{1}{ES^2} = \frac{1}{\left(\frac{2a}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{2\sqrt{15}a}{6}\right)^2} = \frac{57}{20a^2}$$

$EH = \dfrac{2\sqrt{5}a}{\sqrt{57}}$. Vậy

$d\left(A,(SBC)\right) = \dfrac{3}{2}d\left(E,(SBC)\right) = \dfrac{3}{2}EH = \dfrac{a\sqrt{285}}{19}$.



Chọn đáp án B.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I với $AB = 2a\sqrt{3}; BC = 2a$. Biết chân đường cao H hạ từ đỉnh S xuống đáy $ABCD$ trùng với trung điểm đoạn DI và SB hợp với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ một góc 60°. Khoảng cách từ D đến (SBC) tính theo a bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{15}}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Đặc điểm của hình: Góc giữa SB tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ là $SBM = 60^\circ$. $BM = \dfrac{3}{4}BD = 3a$;

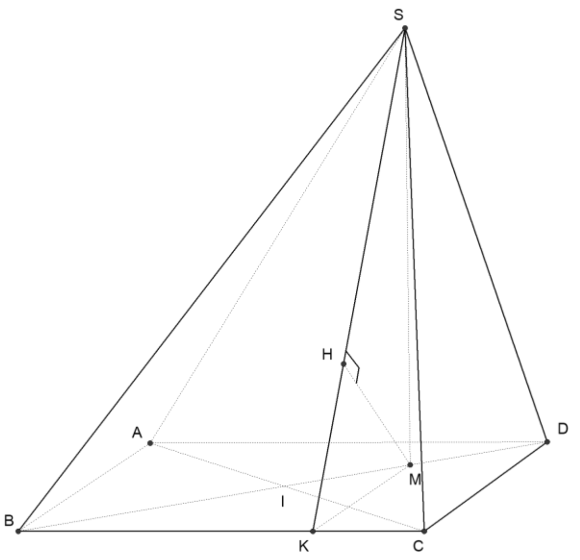
$SM = BM.\tan 60^0 = 3\sqrt{3}a$

Xác định khoảng cách:

$d\left(D,(SBC)\right) = \dfrac{4}{3}d\left(M,(SBC)\right) = \dfrac{4}{3}MH$

Tính khoảng cách MH:

$$\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MK^2} + \frac{1}{MS^2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}.2\sqrt{3}a\right)^2} + \frac{1}{\left(3\sqrt{3}a\right)^2} = \frac{5}{27a^2}$$



$MH = \sqrt{\dfrac{27}{5}}a$, vậy $d\left(D,(SBC)\right) = \dfrac{4}{3}d\left(M,(SBC)\right) = \dfrac{4}{3}MH = \dfrac{4\sqrt{15}}{5}a$

Chọn đáp án C**.**

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30°. Gọi M là một điểm trên cạnh AB sao cho $BM = 3MA$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCM) là

A. $\dfrac{\sqrt{34}a}{51}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{34}a}{51}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{34}a}{51}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{34}a}{51}$.

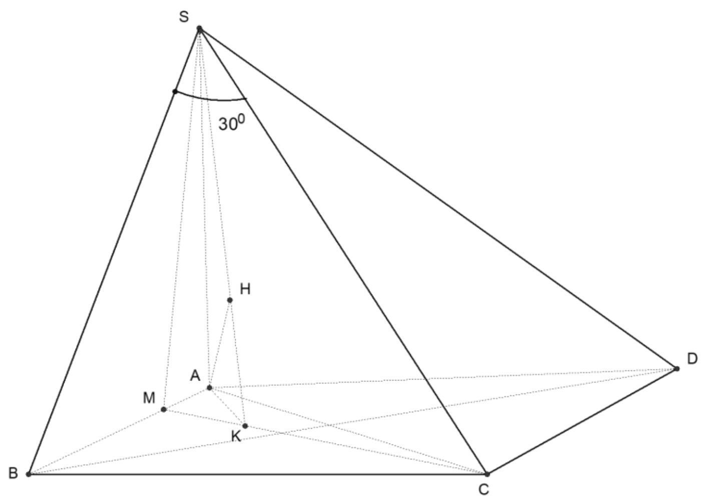
Đặc điểm của hình: SC tạo với mặt phẳng (SAB) góc $CSB = 30^\circ$. $BC = \sqrt{3}a$;

$SB = BC.\tan 30^0 = a$;

$MC = \sqrt{\left(\dfrac{3a}{4}\right)^2 + 3a^2} = \dfrac{\sqrt{57}}{4}a$; $\qquad MA = \dfrac{a}{4}$;

$AC = 2a$; $AS = 2\sqrt{2}a$

$AK = \dfrac{2S_{AMC}}{MC} = \dfrac{\sqrt{19}}{19}a$



Xác định khoảng cách: $d\left(A,(SBC)\right) = AH$

Tính AH $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AK^2} + \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{\sqrt{19}}{19}a\right)^2} + \dfrac{1}{\left(2\sqrt{2}a\right)^2} = \dfrac{153}{8a^2}$

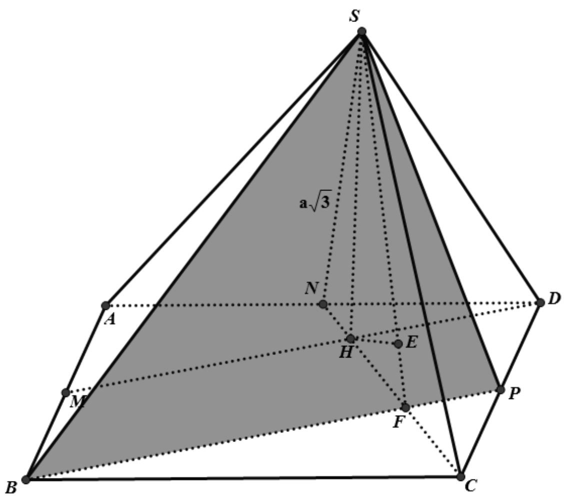
Vậy $d\left(A,\left(SBC\right)\right)=AH=\dfrac{2\sqrt{34}}{51}$

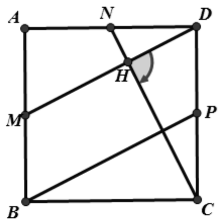
Chọn đáp án B.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD và DC. Gọi H là giao điểm của CN và DM, biết SH vuông góc $\left(ABCD\right)$, $SH=a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $\left(SBP\right)$ tính theo a bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:





Ta chứng minh : $NC\perp MD$

Thật vậy : $\Delta ADM=\Delta DCM$ vì $A=D=90^0; AD=DC; AM=DN$

$\Rightarrow ADM=DCN$; mà $ADM+MDC=90^0\Rightarrow MDC+DCN=90^0\Rightarrow NC\perp MD$

Ta có : $BP\perp NC\left(MD//BP\right); BP\perp SH\Rightarrow BP\perp\left(SNC\right)\Rightarrow\left(SBP\right)\perp\left(SNC\right)$

Kẻ $HE\perp SF\Rightarrow HE\perp\left(SBP\right)\Rightarrow d\left(H,(SBP)\right)=d(C,(SBP))=HE$

Do $DC^2=HC.NC\Rightarrow HC=\dfrac{DC^2}{NC}=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}\Rightarrow HF=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

Mà $HE=\dfrac{SH.HF}{SF}=\dfrac{SH.HF}{\sqrt{SH^2+HF^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân có hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau, $AD=2a\sqrt{2}; BC=a\sqrt{2}$. Hai mặt phẳng $\left(SAC\right)$ và $\left(SBD\right)$ cùng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60°. Khoảng cách từ M là trung điểm đoạn AB đến mặt phẳng (SCD) là

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{20}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{15}}{20}$. **D.** $\dfrac{9a\sqrt{15}}{20}$.

Hướng dẫn giải:

Do $(SAC)\perp(ABCD),(SBD)\perp(ABCD),(SAC)\cap(SBD)=SO\Rightarrow SO\perp(ABCD)$

Dựng góc giữa $(SCD),(ABCD)$:

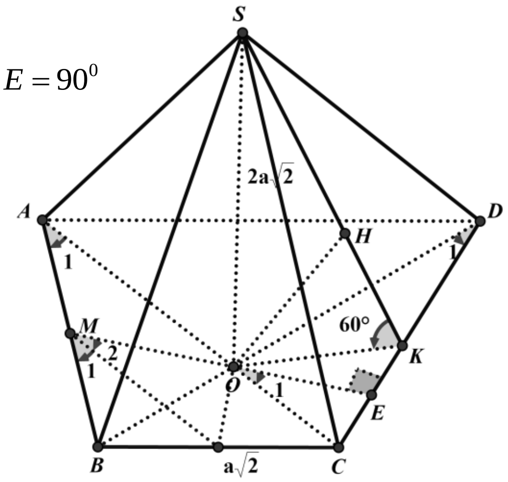
$(SCD)\cap(ABCD)=DC$. Kẻ $OK\perp DC\Rightarrow SK\perp DC\Rightarrow\big((SCD),(ABCD)\big)=SKO$

Kéo dài MO cắt DC tại E

Ta có :

$A_1=D_1;A_1=M_1;M_1=M_2=O_1\Rightarrow D_1=O_1;O_1+EOD=90^0\Rightarrow E=90^0$

$\Rightarrow E\equiv K$



Ta có: $OK=\dfrac{2a.a}{a\sqrt{5}};OM=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2};MK=\dfrac{9a\sqrt{5}}{10}$

$\dfrac{d(O,(SCD))}{d(M,(SCD))}=\dfrac{OE}{ME}=\dfrac{9}{4}\Rightarrow d\left(M,(SCD)\right)$

$=\dfrac{9}{4}d\left(O,(SCD)\right)=\dfrac{9}{4}OH$

$OS=OK.\tan 60^0=\dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$

$\Rightarrow OH=\dfrac{OK.OS}{\sqrt{OK^2+OS^2}}=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}\Rightarrow d\left(M,(SCD)\right)=\dfrac{9a\sqrt{15}}{20}$

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác vuông tại S, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh AD sao cho $HA=3HD$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Biết rằng $SA=2\sqrt{3}a$ và đường thẳng SC tạo với mặt đáy một góc 30°. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC) tính theo a bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{66}a}{11}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{11}a}{66}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{66}a}{11}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{66}a}{11}$.

Hướng dẫn giải:

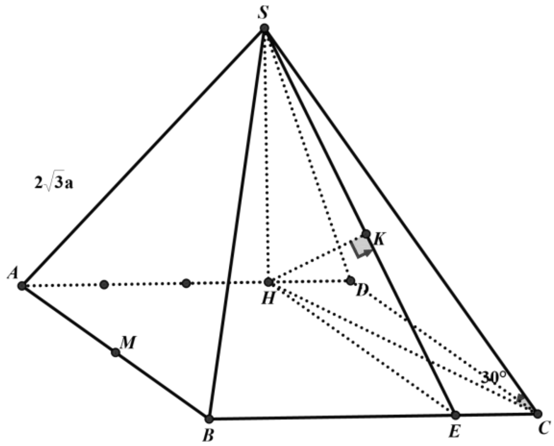
SC có hình chiếu vuông góc lên mp$(ABCD)$ là HC

$\Rightarrow SC,(ABCD)=SCH=30^0$

Đặt $AD=4x\ (x>0)$

Ta có :

$SA^2=AH.AD \Rightarrow 12a^2=12x^2 \Rightarrow x=a \Rightarrow AD=4a, AH=3a, HD=a$



Mà : $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=a\sqrt{3} \Rightarrow HC=3a \Rightarrow DC=2\sqrt{2}a$

Kẻ $HE\perp BC, SH\perp BC \Rightarrow (SHE)\perp(SBC)$

Kẻ $HK\perp SE \Rightarrow HK\perp(SBC) \Rightarrow d(H,SBC)=HK \Rightarrow d(M,(SBC))=\dfrac{HK}{2}$

$HK=\dfrac{SH.EH}{\sqrt{SH^2+EH^2}}=\dfrac{2a\sqrt{66}}{11} \Rightarrow d(M,(SBC))=\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$

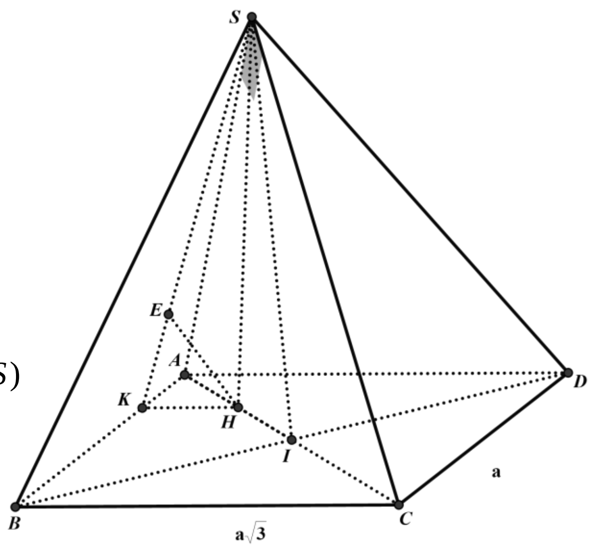
Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I, $AB=a; BC=a\sqrt{3}$, tam giác SAC vuông tại S. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của đoạn AI. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) tính theo a bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có : $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2a$**, mà** ΔSAC **vuông tại** S $\Rightarrow SI=\dfrac{AB}{2}=a$

$\Rightarrow SH=\sqrt{SI^2-HI^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



Kẻ

$HK\perp AB; AB\perp SH \Rightarrow AB\perp(KHS) \Rightarrow (SAB)\perp(KHS)$

Mà $(SAB)\cap(KHS)=SK$ **.** **Kẻ**

$HE\perp SK \Rightarrow HE\perp(SAB) \Rightarrow d(H,(SCD))=HE$

$A=HC\cap(SAB) \Rightarrow \dfrac{d(C,(SAB))}{d(H,(SAB))}=\dfrac{CA}{HA}=4 \Rightarrow d(C,(SAB))=4d(H,(SAB))=4HE$

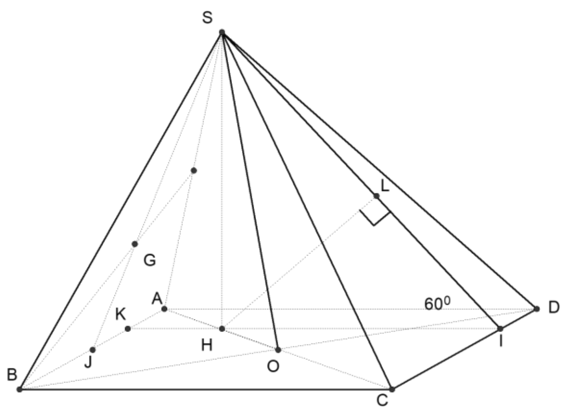
$$HE=\frac{HK.SH}{\sqrt{HK^2+SH^2}}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{3a^2}{16}+\frac{3a^2}{4}}}=\frac{a\sqrt{15}}{10}\Rightarrow d\left(C,(SAB)\right)=\frac{2a\sqrt{15}}{5}$$

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a tâm $O,$ hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$ là trung điểm của $AO,$ góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là 60°. Khoảng cách từ trọng tâm của tam giác SAB đến mặt phẳng (SCD) tính theo a bằng

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Ta có:

$$\frac{HI}{AD}=\frac{CH}{CA}=\frac{3}{4}\Rightarrow HI=\frac{3a}{4}$$

$$\tan 60^0=\frac{SH}{HI}\Rightarrow SH=\frac{3\sqrt{3}}{4}a$$

$$SI=\sqrt{SH^2+HI^2}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}a}{4}\right)^2+\left(\frac{3a}{4}\right)^2}=\frac{3}{2}a$$

$$d\left(G,(SCD)\right)=\frac{3}{2}d\left(J,(SCD)\right)=\frac{2}{3}d\left(K,(SCD)\right)=\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.d\left(H,(SCD)\right)$$

$$=\frac{8}{9}d\left(H,(SCD)\right)=\frac{8}{9}HL=\frac{8}{9}.\frac{SH.HI}{SI}=\frac{8}{9}\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}a.\frac{3a}{4}}{\frac{3a}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC cân tại $A,$ $AB=AC=a,$ $BAC=120^\circ$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác $ABC.$ Cạnh bên SC tạo với mặt phẳng đáy một góc α sao cho $\tan\alpha=\frac{3}{\sqrt{7}}$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) tính theo a bằng

A. $\frac{a\sqrt{13}}{13}$. **B.** $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$. **C.** $\frac{5a\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\frac{3a}{13}$.

Hướng dẫn giải:

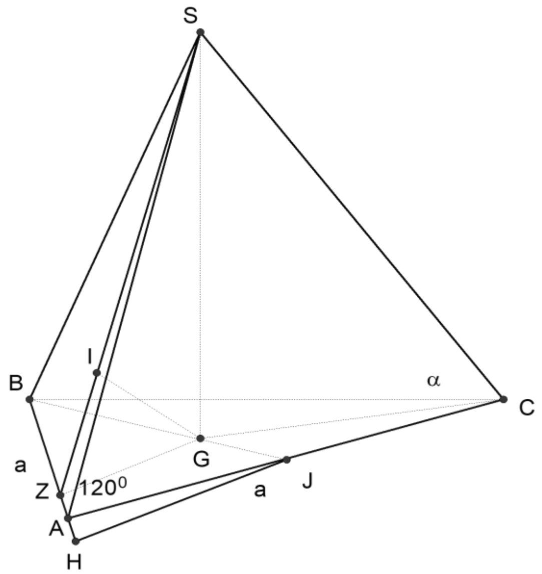
Chọn B.

Ta có:

Gọi H là hình chiếu của J lên AB

Gọi G là hình chiếu của G lên AB

Gọi I là hình chiếu của G lên SZ



$$BJ=\sqrt{BA^2+AJ^2-2BA.AJ.cos120^0}=\frac{\sqrt{7}}{2}a$$

$$S_{\Delta BAJ=}\frac{1}{2}.AB.AJ.\sin120^0=\frac{1}{2}JH.AB\Leftrightarrow JH=\frac{\sqrt{3}a}{4}$$

$$\frac{GZ}{JH}=\frac{BG}{BJ}=\frac{2}{3}\Rightarrow GZ=\frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$\tan\alpha=\frac{SG}{GC}\Leftrightarrow\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{SG}{BG}\Leftrightarrow\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{SG}{\frac{2}{3}BJ}$$

$$\Leftrightarrow SG=\frac{2}{\sqrt{7}}.\frac{\sqrt{7}}{2}a=a$$

$$d\left(C,\left(SAB\right)\right)=3d\left(G,\left(SAB\right)\right)=3GI=3.\frac{SG.GZ}{SZ}$$

$$=3\frac{SG.GZ}{\sqrt{SG^2+GZ^2}}=3.\frac{a.\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\sqrt{a^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}a$$

Câu 32: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $\left(SMN\right)$ tính theo a bằng

A. $\frac{a}{7}$. **B.** $\frac{7a}{3}$. **C.** $\frac{3a}{7}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có:

Trong ΔSGC vuông tại G suy ra $SG=GC\sqrt{3}=\frac{2}{3}\frac{3a}{2}=a.$

Gọi E,F lần lượt là hình chiếu của G trên MN và SE.

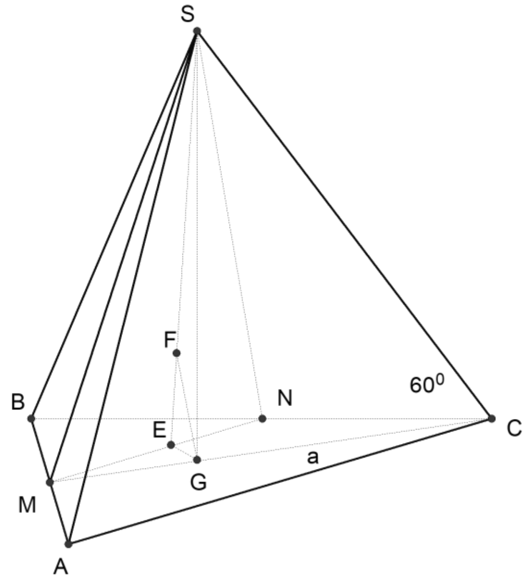
Khi đó $d\left(C,\left(SMN\right)\right)=3d\left(G,\left(SMN\right)\right)=3GF$

Ta có : $GE = \frac{1}{2}d\left(G, \mathrm{AC}\right) = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.d\left(M, \mathrm{AC}\right)$

$= \frac{1}{3}d\left(M, \mathrm{AC}\right) = \frac{1}{6}d\left(B, \mathrm{AC}\right) = \frac{a\sqrt{3}}{12}.$

Trong ΔSGE vuông tại H suy ra

$$GF = \frac{GE.SG}{\sqrt{GE^2 + SG^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{12}.a}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{12}\right)^2 + a^2}} = \frac{a}{7}$$



Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Gọi I là trung điểm của cạnh AB. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng đáy là trung điểm H của CI, góc giữa đường thẳng SA và mặt đáy bằng 60°. Khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$ là

A. $\frac{a\sqrt{21}}{4\sqrt{29}}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{\sqrt{29}}$. **C.** $\frac{4a\sqrt{21}}{\sqrt{29}}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{2\sqrt{29}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có:

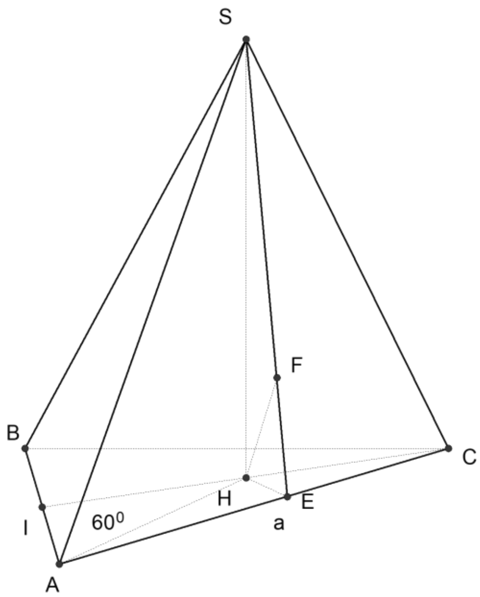
Trong ΔACI có trung tuyến AH suy ra

$$AH = \sqrt{\frac{2\left(AI^2 + AC^2\right) - CI^2}{4}} = \sqrt{\frac{7a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

Trong ΔSHA vuông tại H suy ra $SH = AH\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{21}}{4}$

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H trên BC và SE.

Khi đó $d\left(H, \left(SBC\right)\right) = HF$



Ta có : $HE = \frac{1}{2}d\left(I, BC\right) = \frac{1}{4}d\left(\mathrm{A}, BC\right) = \frac{a\sqrt{3}}{8}.$

Trong ΔSHE vuông tại H suy ra $HF = \frac{HE.SH}{\sqrt{HE^2 + SH^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{8}.\frac{a\sqrt{21}}{4}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{21}}{4}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{4\sqrt{29}}.$

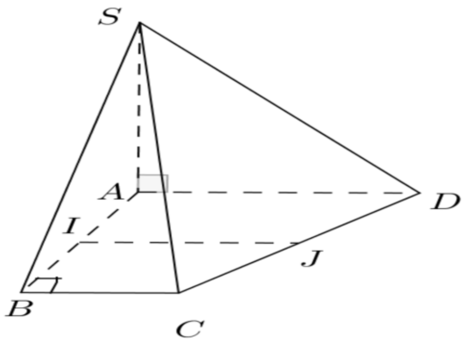
DẠNG 3: KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông cạnh a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính khoảng cách giữa đường thẳng IJ và (SAD).

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Ta có: Vì $IJ\,//\,AD$ nên $IJ\,//\,(SAD)$

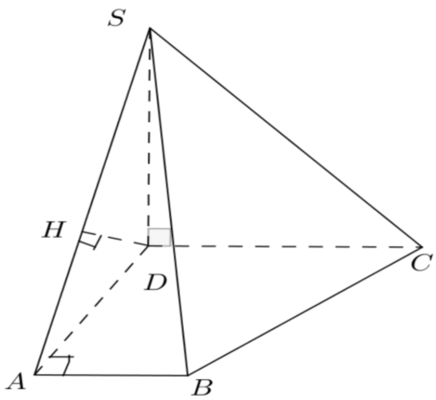
$\Rightarrow d\left(IJ;(SAD)\right)=d\left(\text{I};(SAD)\right)=IA=\frac{a}{2}$.

Câu 2: Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông ở A và D, $AD=2a$. Trên đường thẳng vuông góc tại D với $(ABCD)$ lấy điểm S với $SD=a\sqrt{2}$. Tính khỏang cách giữa đường thẳng DC và (SAB).

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Vì $DC\,//\,AB$ nên $DC\,//\,(SAB)$

$\Rightarrow d\left(DC;(SAB)\right)=d\left(D;(SAB)\right)$.

Kẻ $DH\perp SA$, do $AB\perp AD$, $AB\perp SA$ nên $AB\perp(SAD)\Rightarrow DH\perp AB$ suy ra $d\left(D;SC\right)=DH$.

Trong tam giác vuông SAD ta có:

$$\frac{1}{DH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AD^2}\Rightarrow DH=\frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}=\frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

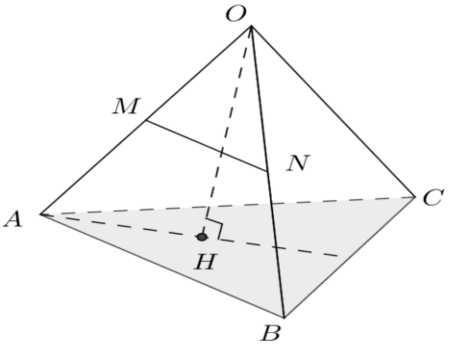
Câu 3: Cho hình chóp $O.ABC$ có đường cao $OH=\frac{2a}{\sqrt{3}}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB. Khoảng cách giữa đường thẳng MN và (ABC) bằng:

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn **D.**

Vì M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB nên MN // AB $MN // \left(ABC\right)$.

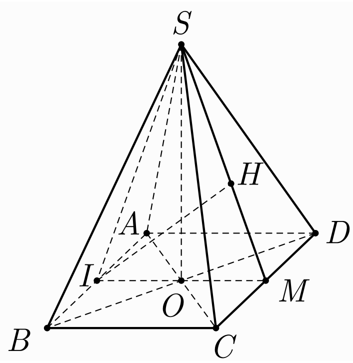


Ta có: $d\left(MN;\left(ABC\right)\right)=d\left(M;\left(ABC\right)\right)=\frac{1}{2}OH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ (vì M là trung điểm của OA).

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB=SA=2a$. Khoảng cách từ đường thẳng AB đến $\left(SCD\right)$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** a.

Hướng dẫn giải:



Gọi I,M lần lượt là trung điểm cạnh AB và CD thì $CD\perp(SIM)$

Vẽ $IH\perp SM$ tại $H\in SM$ thì $IH\perp(SCD)$

$\Rightarrow d\left(AB,(SCD)\right)=d\left(I,(SCD)\right)=IH=\frac{SO.IM}{SM}$

ΔSAB đều cạnh $2a\Rightarrow SI=a\sqrt{3}\Rightarrow SM=a\sqrt{3}$

Và $OM=\frac{1}{2}IM=a\Rightarrow SO=\sqrt{SM^2-OM^2}=a\sqrt{2}$

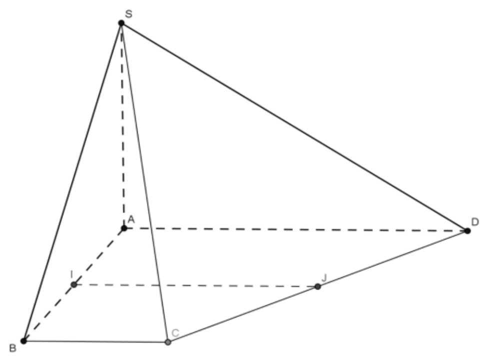
Cuối cùng $d\left(AB,(SCD)\right)=\frac{SO.IM}{SM}=\frac{a\sqrt{2}.2a}{a\sqrt{3}}=\frac{2a\sqrt{6}}{3}$

Chọn đáp án B.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp\left(ABCD\right)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông có chiều cao $AB=a$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CB. Tính khỏang cách giữa đường thẳng IJ và $\left(SAD\right)$.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a}{3}$

Hướng dẫn giải:



$IJ // AD \Rightarrow IJ // (SAD)$

□ $\Rightarrow d\left(IJ,(SAD)\right) = d\left(I,(SAD)\right) = IA = \dfrac{a}{2}$.

Chọn đáp án B.

Câu 6: Cho hình chóp $O.ABC$ có đường cao $OH = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB. Tính khoảng cách giữa đường thẳng MN và (ABC).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Khoảng cách giữa đường thẳng MN và (ABC):

$$d\left(MN,(ABC)\right) = d\left((MNP),(ABC)\right) = \frac{OH}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 7: Cho hình chóp $O.ABC$ có đường cao $OH = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB. Khoảng cách giữa đường thẳng MN và (ABC) bằng

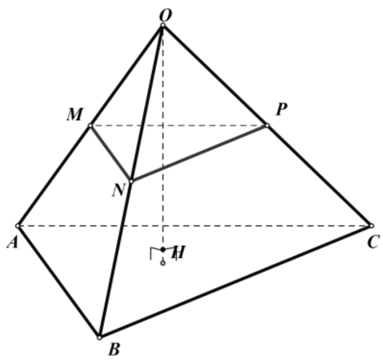
A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Do $MN // (ABC) \Rightarrow d\left(MN,(ABC)\right) = d\left(M,(ABC)\right)$

Lại có $\dfrac{OA}{MA} = \dfrac{d\left(O,(ABC)\right)}{d\left(M,(ABC)\right)} = 2 \Rightarrow d\left(M,(ABC)\right) = \dfrac{1}{2} d\left(O,(ABC)\right) = \dfrac{OH}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Chọn D.



Chọn đáp án A.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, mặt đáy $ABCD$ là hình thang vuông có chiều cao $AB = a$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính khoảng cách giữa đường thẳng IJ và (SAD).

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{a}{3}$.

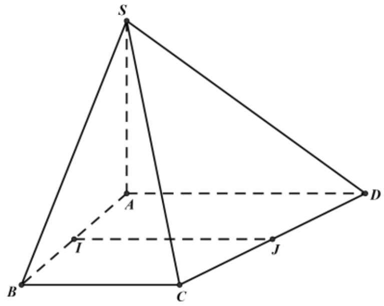
<u>Hướng dẫn giải:</u>

$SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp AI$.

Lại có $AI\perp AD$ (hình thang vuông) suy ra $IA\perp(SAD)$

$IJ\parallel AD$ theo tính chất hình thang, nên

$d(IJ,(SAD))=d(I,(SAD))=IA=\frac{a}{2}$



Câu 9: Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông ở A và D, $AD=2a$. Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại D lấy điểm S với $SD=a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa DC và (SAB).

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

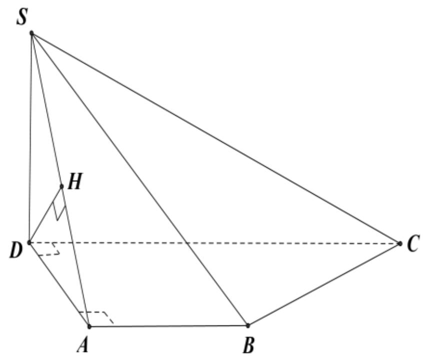
<u>Hướng dẫn giải:</u>

****Trong tam giác** DHA**, dựng** $DH\perp SA$**;**

****Vì** $DC//AB\Rightarrow d(DC;(SAB))=d(D;(SAB))=DH$

Xét tam giác vuông SDA **có :**

$$\frac{1}{DH^2}=\frac{1}{SD^2}+\frac{1}{AD^2}\Rightarrow DH=\frac{a\sqrt{12}}{3}=\frac{2a}{\sqrt{3}}$$



Chọn A.

Câu 10: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Khi đó khoảng cách giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. C. $\frac{2a\sqrt{6}}{9}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

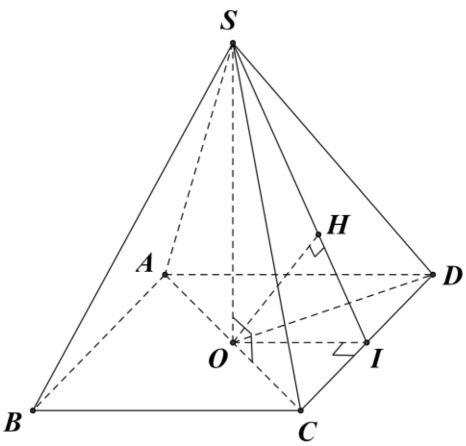
<u>Hướng dẫn giải:</u>

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$

Khi đó $SO\perp(ABCD)$.

Kẻ $OI\perp CD, OH\perp SI\Rightarrow OH\perp(SCD)$

Ta tính được $AO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$



$OI = \frac{AD}{2} = \frac{a}{2}$

$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow d\left(A,(SCD)\right) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

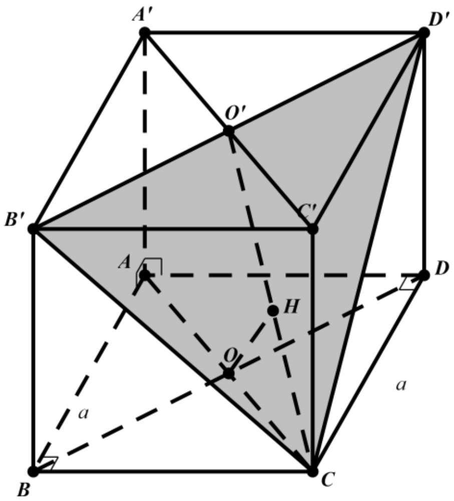
Chọn D.

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khi đó, khoảng cách giữa đường thẳng BD và mặt phẳng $(CB'D')$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ



$A(0;0;0); B(1;0;0); D(0;1;0); A'(0;0;1)$

$C(1;1;0); B'(1;0;1); D'(0;1;1); C'(1;1;1)$

$\overrightarrow{CB'} = (0;-1;1); \overrightarrow{CD'} = (-1;0;1)$

Viết phương trình mặt phẳng $(CB'D')$

Có VTPT $\vec{n} = \left[\overrightarrow{CB'};\overrightarrow{CD'}\right] = (-1;-1;-1)$

$(CB'D'): 1(x-1) + 1(y-1) + 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 2 = 0$

$d\left(BD;(CB'D')\right) = d\left(B;(CB'D')\right) = \frac{|1+0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Vậy $d\left(BD;(CB'D')\right) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.