

Câu I. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right)$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

- 1) Rút gọn biểu thức A.
- 2) Tìm x biết $A = 2$.
- 3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (A-4)\sqrt{x}$.

Câu II. (2,0 điểm) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một ô tô đi từ A đến B cách nhau 90km với vận tốc dự định. Khi từ B trở về A, ô tô đi với vận tốc nhanh hơn vận tốc lúc đi là 5km/h. Do đó thời gian về ít hơn thời gian đi là 15 phút. Tính vận tốc dự định của ô tô khi đi từ A đến B.

Câu III. (2,5 điểm)

- 1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x-2} + 2(x-y) = 8 \\ 2\sqrt{x-2} + 5(x-y) = 19 \end{cases}$$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $y = mx - m - 2$ (m là tham số) và parabol (P): $y = -x^2$.

- a. Với $m = -2$, tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P).
- b. Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = \sqrt{20}$.

Câu IV. (3,5 điểm)

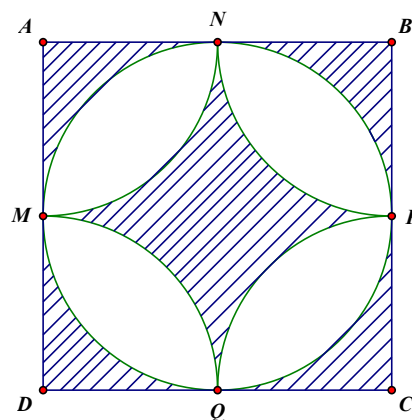
1. Một hộp sữa hình trụ có đường kính đáy là 12cm, chiều cao là 10cm. Tính diện tích vật liệu dùng để tạo nên một vỏ hộp như vậy (không tính phần mép nối).

2. Cho đường tròn (O; R), từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C lần lượt là các tiếp điểm).

- a. Chứng minh tứ giác ABOC nội tiếp.
- b. Gọi D là trung điểm của AC, BD cắt đường tròn tại E, đường thẳng AE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh $AB^2 = AE \cdot AF$.
- c. Chứng minh: $BC = CF$.

Câu V. (0,5 điểm)

Một viên gạch hình vuông cạnh a(cm) có hoa văn như hình vẽ. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AD, AB, BC, CD. Tìm độ dài a biết diện tích phần gạch chéo là $200(4 - \pi)(cm^2)$.



ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Bài 1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{x-\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1}\right)$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x biết $A = 2$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (A-4)\sqrt{x}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{x-\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1}\right) \\ &= \frac{1+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{x+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot (\sqrt{x}-1) \\ &= \frac{x+1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\text{b) } A = 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x}} = 2 \Rightarrow (\sqrt{x}-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ (ktm)}$$

Vậy không có x thỏa mãn điều kiện bài toán

$$\text{c) } P = (A-4)\sqrt{x} = x - 4\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x}-2)^2 - 3 \geq -3, \forall x > 0, x \neq 1$$

Dấu “=” xảy ra khi

$$(\sqrt{x}-2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ (TM)}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng -3 khi $x = 4$.

Bài 2. Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một ô tô đi từ A đến B cách nhau 90 km với vận tốc dự định. Khi từ B trở về A ô tô đi nhanh hơn vận tốc lúc đi là 5 km/giờ. Do đó thời gian về ít hơn thời gian đi là 15 phút. Tính vận tốc dự định đi từ A đến B.

Lời giải

Gọi vận tốc dự định đi từ A đến B của ô tô là x (km/h, $x > 0$).

Vận tốc của ô tô khi đi từ B về đến A là $x+5$ (km/h)

Đi và về đều là quãng đường AB dài 90 km.

$$\text{Thời gian đi từ A đến B là } \frac{90}{x} \text{ (h)}$$

$$\text{Thời gian từ B về A là } \frac{90}{x+5} \text{ (h)}$$

Vì thời gian về ít hơn thời gian đi là 15 phút = $\frac{1}{4}$ (h) ta có phương trình

$$\begin{aligned} \frac{90}{x} &= \frac{90}{x+5} + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{90.4(x+5)}{4x(x+5)} &= \frac{90.4x}{4.x(x+5)} + \frac{x(x+5)}{4.x(x+5)} \\ \Leftrightarrow 360x+1800 &= 360x+x^2+5x \\ \Leftrightarrow x^2+15x-1800 &= 0 \end{aligned}$$

Giải phương trình ta có $\begin{cases} x=40 \\ x=-45 \text{ (KTM)} \end{cases}$

Vậy vận tốc dự định của ô tô là 40 (km/h).

Bài 3.

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-2} + 2(x-y) = 8 \\ 2\sqrt{x-2} + 5(x-y) = 19 \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d) y = mx - m - 2$ (m là tham số) và parabol $(P): y = -x^2$.

a. Với $m = -2$, tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) .

b. Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1 - x_2| = \sqrt{20}$

Lời giải

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-2} + 2(x-y) = 8 \\ 2\sqrt{x-2} + 5(x-y) = 19 \end{cases}$

ĐK: $x \geq 2$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \sqrt{x-2} + 2(x-y) = 8 \\ 2\sqrt{x-2} + 5(x-y) = 19 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2\sqrt{x-2} + 4(x-y) = 16 \\ 2\sqrt{x-2} + 5(x-y) = 19 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x-y = 3 \\ 2\sqrt{x-2} + 5.3 = 19 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x-y = 3 \\ \sqrt{x-2} = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x-y = 3 \\ x-2 = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y = 3 \\ x = 6 \text{ (TM)} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(6;3)$.

2) a) Với $m = -2$ ta có phương trình đường thẳng $(d) y = -2x$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P)

$$-x^2 = -2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=2 \Rightarrow y=-4 \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) là $(0;0)$, $(2;-4)$

b) + Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) : $x^2 + mx - m - 2 = 0$ (1)

Ta có: $\Delta = m^2 + 4m + 8 = (m+2)^2 + 4 \geq 4 > 0 \forall m$

Nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m hay (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m

+ Khi đó theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 \cdot x_2 = -m - 2 \end{cases}$

+ Ta có :

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{20} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 20 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 20$$

$$\Rightarrow m^2 + 4m + 8 = 20 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 = 0 \Leftrightarrow (m-2)(m+6) = 0$$

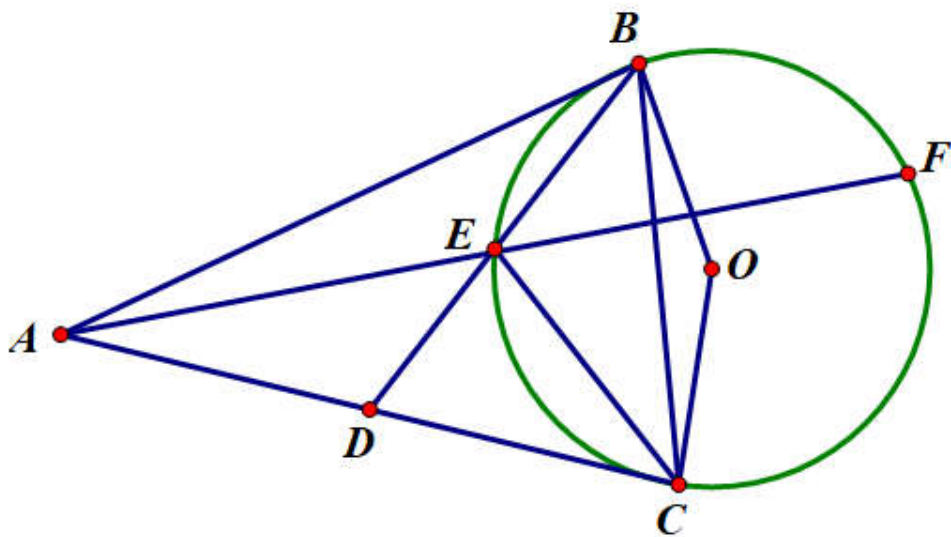
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -6 \end{cases}$$

Vậy $m = 2; m = -6$ là giá trị cần tìm.

Bài 4.

- Một hộp sữa hình trụ có đường kính đáy là 12 cm, chiều cao 10 cm. Tính diện tích vật liệu dùng để tạo nên vỏ hộp như vậy (không tính phần mép nối).
- Cho đường tròn tâm $(O; R)$, từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C lần lượt là các tiếp điểm).
 - Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.
 - Gọi D là trung điểm của AC, BD cắt đường tròn tại E , đường thẳng AE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F . Chứng minh $AB^2 = AF \cdot AE$.
 - Chứng minh $BC = CF$.

Lời giải



- Ta có bán kính đáy là 6cm. Diện tích đáy là: $\pi \cdot 6^2 = 36\pi$ (cm²).
 Diện tích xung quanh là: $2\pi \cdot 6 \cdot 10 = 120\pi$ (cm²).
 Diện tích vật liệu dùng để tạo nên vỏ hộp sữa là: $2 \cdot 36\pi + 120\pi = 192\pi$ (cm²)

2) a) Vì AB, AC lần lượt là các tiếp tuyến của $(O; R)$ nên $\begin{cases} AB \perp BO \\ AC \perp CO \end{cases}$ (tính chất tiếp tuyến)

suy ra $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $ABOC$ có $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180^\circ$ mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Xét đường tròn (O) có $\widehat{ABE} = \widehat{AFB}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BE)

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle AFB$ có

+ \widehat{BAF} chung

+ $\widehat{ABE} = \widehat{AFB}$ (cmt)

Suy ra $\triangle ABE \sim \triangle AFB$ (g.g)

Suy ra $\frac{AB}{AF} = \frac{AE}{AB}$ (cặp cạnh tương ứng).

Suy ra $AB^2 = AE \cdot AF$.

c) Xét đường tròn (O) có

$\widehat{DCE} = \widehat{DBC}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung EC)

Xét $\triangle DEC$ và $\triangle DCB$ có

+ \widehat{CDB} chung

+ $\widehat{DCE} = \widehat{DBC}$ (cmt)

Suy ra $\triangle DEC \sim \triangle DCB$ (g.g)

Suy ra $\frac{DC}{DB} = \frac{DE}{DC} \Rightarrow DC^2 = DB \cdot DE$

Mà $AD = DC \Rightarrow AD^2 = DE \cdot DB \Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{DB}{AD}$

Xét $\triangle DAE$ và $\triangle DBA$ có

+ \widehat{ADB} chung

+ $\frac{AD}{DE} = \frac{DB}{AD}$

Suy ra $\triangle DAE \sim \triangle DBA$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{DAE} = \widehat{DBA}$ (cặp góc tương ứng).

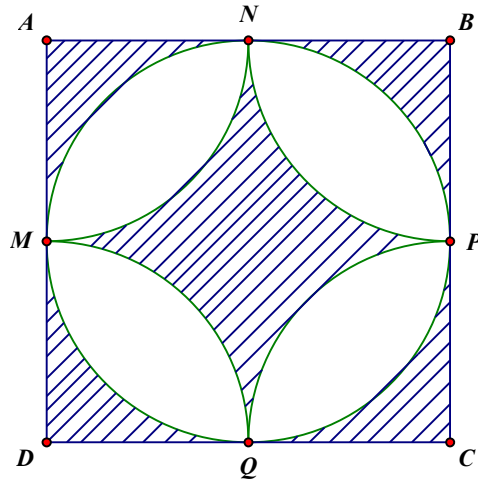
Mà $\widehat{DAE} = \widehat{AFB}$, mà hai góc này ở vị trí so le trong, do đó $AC \parallel BF$

Suy ra $\widehat{CBF} = \widehat{BCA}$ (hai góc so le trong).

Mà $\widehat{BCA} = \widehat{BFC}$ (góc nội tiếp và tạo bởi hai tiếp tuyến và dây cung cùng chắn một cung) nên $\widehat{CBF} = \widehat{CFB}$ suy ra $\triangle CBF$ cân tại C , do đó $CB = CF$

Bài 5.

Một viên gạch hình vuông cạnh a (cm) có hoa văn như hình vẽ. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, AB, BC, CD . Tìm độ dài a biết diện tích phần gạch chéo là $200(4 - \pi)$ (cm²)



Lời giải

Nhận xét rằng phần gạch trắng tạo bởi 8 hình viên phân bằng nhau.

Gọi $R = \frac{a}{2}$ là bán kính hình tròn. Diện tích một hình viên phân là:

$$S = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{4}(\pi - 2) = \frac{a^2}{16}(\pi - 2)(cm^2)$$

Vậy diện tích hình gồm 8 hình viên phân bằng $\frac{a^2}{2}(\pi - 2)(cm^2)$

Diện tích hình gạch chéo bằng: $a^2 - \frac{a^2}{2}(\pi - 2) = \frac{a^2(4 - \pi)}{2}(cm^2)$

Vì diện tích phần gạch chéo là $200(4 - \pi)(cm^2)$ nên ta có:

$$\frac{a^2}{2}(4 - \pi) = 200(4 - \pi) \Leftrightarrow a = 20(cm)$$

Vậy $a = 20(cm)$