# BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

# NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN - DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

# THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

## I. NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

**Câu 1:** **[2D3-3] [ĐỀ SỞ BẮC GIANG 2018]** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 (x+1)e^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{e^2-1}{4}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=2-e$. **B.** $I=e-2$. **C.** $I=\frac{e}{2}$. **D.** $I=\frac{e-1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Xét tích phân $\int_0^1 (x+1)e^x f(x)\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=(x+1)e^x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=f'(x)\mathrm{d}x \\ v=xe^x \end{cases}$

Nên $\int_0^1 (x+1)e^x f(x)\mathrm{d}x = f(x).xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 xe^x.f'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 xe^x.f'(x)\mathrm{d}x$ .

Do đó $\int_0^1 xe^x.f'(x)\mathrm{d}x = -\frac{e^x-1}{4}$. Lại có (theo BĐT tích phân)

$$\left(\int_0^1 x.e^x f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_0^1 x^2\left(e^x\right)^2 \mathrm{d}x.\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = \left(\frac{e^2-1}{4}\right)^2 \Rightarrow \int_0^1 xe^x f'(x)\mathrm{d}x \ge \frac{1-e^2}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $f'(x)=k.xe^x$.

Suy ra $\int_0^1 kx^2\left(e^x\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1-e^2}{4} \Rightarrow k=-1 \Rightarrow f'(x)=-xe^x$

Do đó $\int f'(x)\mathrm{d}x = \int -xe^x\mathrm{d}x = (1-x)e^x + C \Rightarrow f(1)=C=0$.

Vậy $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)e^x\mathrm{d}x = e-2$.

**Câu 2:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và thoả mãn $f\left(x\right)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$ với $x\in\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Tính $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x$.

**A.** $\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $-\frac{9}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x$

Với $x\in\left[\frac{1}{2};2\right]$, $f\left(x\right)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x\Leftrightarrow\frac{f\left(x\right)}{x}+2\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=3$ .

$$\Rightarrow\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x+2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}3\mathrm{d}x\quad(1)$$

Đặt $t=\frac{1}{x}\Rightarrow\mathrm{d}t=-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\Rightarrow-\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

$$2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=2I\ .$$

$$\left(1\right)\Rightarrow3I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}3\mathrm{d}x\Rightarrow I=\frac{3}{2}.$$

**Câu 3: [2D3-3] [Sở GD&ĐT Hà Tĩnh - Lần 1 - năm 2018]** Cho $\int\limits_0^1 f\;\;x\;\;dx=2018$. Tính tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f\;\;\sin 2x\;\;\cos 2x dx$

**A.** $2018$. **B.** $-1009$. **C.** $-2018$. **D.** $1009$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $t=\sin 2x \Rightarrow dt=2\cos 2xdx$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0; x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f\ \ \sin 2x\ \ \cos 2xdx=\frac{1}{2}\int_0^1 f\ \ t\ \ dt=\frac{1}{2}.2018=1009$$

**Câu 4:** **[2D3-3] [Sở GD&ĐT Phú Thọ, lần 1 năm 2018]** Biết $F\left(x\right)=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{2x+3}$ ( $a,b,c\in\mathbb{Z}$) là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{20x^2+30x+11}{\sqrt{2x+3}}$ trên khoảng $\left(-\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Tính $T=a+b+c$.

**A.** $T=11$. **B.** $T=10$. **C.** $T=9$. **D.** $T=8$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

$f\left(x\right)=\dfrac{20x^2+30x+11}{\sqrt{2x+3}}$. Đặt $\sqrt{2x+3}=t\Rightarrow 2x+3=t^2\begin{cases}x=\dfrac{t^2-3}{2}\\ \mathrm{d}x=t\mathrm{d}t\end{cases}$

$$I=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{20\left(\dfrac{t^2-3}{2}\right)^2+15\left(t^2-3\right)+11}{t}t.\mathrm{d}t$$

$$=\int\left(5t^4-15t^2+11\right)\mathrm{d}t=t\left(t^4-5t^2+11\right)+C=\sqrt{2x+3}\left(4x^2+2x+5\right)+C$$

$\Rightarrow a=4;b=2;c=5\Rightarrow a+b+c=11$

**Câu 5:** **[2D3-3] [Sở GD&ĐT Phú Thọ, lần 1 năm 2018]** Biết $\displaystyle\int_0^6\frac{\sqrt{2x+4}\,\mathrm{d}x}{2x+5\sqrt{2x+4}+8}=a+b\ln\frac{5}{3}+c\ln\frac{4}{3}$ $(a,b,c\in\mathbb{Q})$. Tính $T=a+b+c$.

**A.** $T=-3$. **B.** $T=-5$. **C.** $T=-4$. **D.** $T=-7$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

$\displaystyle\int_0^6\frac{\sqrt{2x+4}}{2x+5\sqrt{2x+4}+8}\mathrm{d}x=\int_0^6\frac{2x+4}{2x+4+5\sqrt{2x+4}+4}\mathrm{d}\left(\sqrt{2x+4}\right)=\int_2^4\frac{t^2}{t^2+5t+4}\mathrm{d}t$ với $t=\sqrt{2x+4}$.

$$=\int_2^4\left(1-\frac{5t+4}{(t+1)(t+4)}\right)\mathrm{d}t=\int_2^4 1\mathrm{d}t+\frac{1}{3}\int_2^4\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t-\frac{16}{3}\int_2^4\frac{1}{t+4}\mathrm{d}t=2+\frac{1}{3}\ln\frac{5}{3}-\frac{16}{3}\ln\frac{4}{3}.$$

Suy ra $a=2,\ b=\dfrac{1}{3},\ c=-\dfrac{16}{3} \Rightarrow a+b+c=-3$.

**Câu 6:** **[2D3-3]** Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}$.

Tính tích phân $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=3$. **B.** $I=4$. **C.** $I=6$. **D.** $I=8$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

Xét $\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ Đặt $t=-x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$; Đổi cận: $x=-\dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow t=\dfrac{3\pi}{2}$; $x=0 \Rightarrow t=0$.

Suy ra $\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{0} f(-t)\mathrm{dt}=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-t)\mathrm{dt}=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)\mathrm{d}x$.

Theo giả thiết ta có:

$f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x} \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\left(f(x)+f(-x)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2-2\cos x}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)\mathrm{d}x=2\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}|\sin x|\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)\mathrm{d}x=2\int\limits_{0}^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x-2\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=6$.

**Câu 7:[SỞ GD VŨNG TÀU-LẦN 2-NĂM 2018]** Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;2018]$ và :

$f(2018-x)=f(x)\ \forall x\in[1;2018]$, $\int\limits_{1}^{2017} f(x)dx=10$. Tính $I=\int\limits_{1}^{2017} x.f(x)dx$.

**A.** $I=10100$. **B.** $I=20170$. **C.** $I=20180$. **D.** $I=10090$.

**Lời giải**

**Chọn.D.**

Đặt $t=2018-x \Rightarrow dt=-dx$.

$x=1 \Rightarrow t=2017, x=2017 \Rightarrow t=1$

$$I=-\int_{2017}^{1}(2018-t)f(2018-t)dt=\int_{1}^{2017}(2018-t)f(t)dt$$

$$=2018\int_{1}^{2017}f(x)dx-\int_{1}^{2017}xf(x)dx$$

$$\Rightarrow I=2018.10-I \Rightarrow I=10090.$$

**Câu 8:[2D3-3]** Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;\pi]$ và : $f(\pi-x)=f(x)\ \forall x\in[0;\pi], \int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{\pi}{2}$ .

Tính $I=\int_0^{\pi}x.f(x)dx$ .

**A.** $I=\frac{\pi}{2}$. **B.** $I=\frac{\pi^2}{2}$. **C.** $I=\frac{\pi}{4}$. **D.** $I=\frac{\pi^2}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn.D.**

Đặt $t=\pi-x \Rightarrow dt=-dx$.

$x=0 \Rightarrow t=\pi, x=\pi \Rightarrow t=0$

$$I=-\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\pi-t)dt$$

$$=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(t)dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi}f(x)dx-\int_0^{\pi}xf(x)dx$$

$$\Rightarrow I=\pi.\frac{\pi}{2}-I \Rightarrow I=\frac{\pi^2}{4}.$$

**Câu 9:[2D3-3]** Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$ và : $f(a+b-x)=f(x)\ \forall x\in[a;b]$ ;

$\int_a^b f(x)dx=a+b$ Tính $I=\int_a^b x.f(x)dx$ .

**A.** $I=\dfrac{(a+b)}{2}$. **B.** $I=\dfrac{(a+b)^2}{4}$. **C.** $I=\dfrac{(a+b)}{4}$. **D.** $I=\dfrac{(a+b)^2}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn.D.**

Đặt $t=a+b-x\Rightarrow dt=-dx$.

$x=a\Rightarrow t=b, x=b\Rightarrow t=a$.

$$I=-\int_b^a (a+b-t)f(a+b-t)dt$$

$$=\int_a^b (a+b-t)f(t)dt$$

$$=(a+b)\int_a^b f(x)dx-\int_a^b xf(x)dx$$

$$\Rightarrow I=(a+b).(a+b)-I\Rightarrow I=\frac{(a+b)^2}{2}.$$

**Câu 10: [2D3-3] [Chuyên ĐH Vinh lần 2 – 2018]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=x.f'(x)-2x^3-3x^2$. Tính giá trị $f(2)$.

**A.** $5$. **B.** $20$. **C.** $10$. **D.** $15$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Cách 1:** + $\forall x\in[1;2]$: $f(x)=x.f'(x)-2x^3-3x^2 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{f'(x)}{x}-2x-3$.

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{x}-\frac{f(x)}{x^2}=2x+3 \Leftrightarrow \left(f(x).\frac{1}{x}\right)'=2x+3.$$

Vậy $\displaystyle\int\left(f(x).\frac{1}{x}\right)'\mathrm{d}x=\int(2x+3)\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{f(x)}{x}=x^2+3x+C$.

+ Vì $f(1)=4\Rightarrow C=0$. Do đó $f(x)=x^3+3x^2 \Rightarrow f(2)=20$.

**Cách 2:** Từ giả thiết $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2 \Rightarrow \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=2x+3$

$$\Rightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\left(x^2+3x\right)'.$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' dx=\int_1^2 \left(x^2+3x\right)' dx \Rightarrow \dfrac{f(2)}{2}-\dfrac{f(1)}{1}=\left.\left(x^2+3x\right)\right|_1^2 \Rightarrow f(2)=20.$$

**Nhận xét:** *Đặc điểm chung của các bài toán này là đi từ khai thác đạo hàm của một thương, tích các hàm hoặc đạo hàm của hàm hợp. Ta có thể nêu một số dạng tổng quát sau:*

1) Cho trước các hàm $g(x),u(x),v(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a;b], g(x)\neq 0, \forall x\in[a;b]$ và hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$ thỏa mãn: $f(x)g'(x)+f'(x)g(x)=u(x)v'(x)+u'(x)v(x)$. Khi đó,

$$\left(f(x)g(x)\right)'=\left(u(x)v(x)\right)' \Rightarrow f(b)-f(a)=\dfrac{u(b)v(b)}{g(b)}-\dfrac{u(a)v(a)}{g(a)}.$$

2) Cho trước các hàm $g(x),u(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a;b], g(x)\neq 0, \forall x\in[a;b]$ và hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$ thỏa mãn: $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=u'(x)g^2(x)$.

Khi đó, $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=u'(x) \Rightarrow f(b)-f(a)=u(b)g(b)-u(a)g(a)$.

3) Cho trước các hàm $g(x),u(x),v(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$ và hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$ thỏa mãn: $u'(x)f'(x)f(u(x))=v'(x)g'(x)g(v(x))$. Khi đó,

$$\left(f(u(x))\right)'=\left(g(v(x))\right)' \Rightarrow f(u(b))-f(u(a))=g(v(b))-g(v(a)).$$

**Câu 11:** **[2D3-3]** Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=7t(\text{m/s})$. Đi được $5(\text{s})$, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-70\left(\text{m/s}^2\right)$. Tính quãng đường $S(\text{m})$ đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

**A.** $S=87,50(\text{m})$. **B.** $S=94,00(\text{m})$. **C.** $S=95,70(\text{m})$. **D.** $S=96,25(\text{m})$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Vận tốc ô tô tại thời điểm bắt đầu phanh là: $v_1(5)=35(m/s)$.

Vận tốc của chuyển động sau khi phanh là: $v_2(t)=-70t+C$. Do $v_2(0)=35$ $\Rightarrow C=35$ $\Rightarrow v_2(t)=-70t+35$.

Khi xe dừng hẳn tức là $v_2(t)=0 \Rightarrow -70t+35=0$ $\Rightarrow t=\frac{1}{2}$.

Quãng đường $S(m)$ đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn là:

$$S(m)=\int_0^5 7t.dt+\int_0^{\frac{1}{2}}(-70t+35)dt \; =96,25(m).$$

**Câu 12:** **[2D3-2]** Giả sử $\int_1^2 (2x-1)\ln x\mathrm{d}x=a\ln 2+b$, $(a;b\in\mathbb{Q})$. Tính $a+b$.

**A.** $\frac{5}{2}$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $\frac{3}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt

$$\begin{cases} u=\ln x \\ dv=(2x-1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{x}dx \\ v=x^2-x \end{cases}$$

$\int_1^2 (2x-1)\ln x\mathrm{d}x==\left[(x^2-x)\ln x\right]\Big|_1^2-\int_1^2 \frac{x^2-x}{x}\mathrm{d}x=2\ln 2-\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^2=2\ln 2-\frac{1}{2}$ nên $a=2$, $b=-\frac{1}{2}$.

Vậy $a+b=\frac{3}{2}$.

**Câu 13:** **[2D3-3] [Chuyên Lê Hồng Phong - TP HCM - năm 2018]**

Biết $\int_0^1 \frac{x^3+3x}{x^2+3x+2}dx=a+b\ln 2+c\ln 3$ với $a,b,c$ là các số hữu tỉ , tính $S=2a+b^2+c^2$.

**A.** $S=515$. **B.** $S=164$. **C.** $S=436$. **D.** $S=-9$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Xét : $I=\int_0^1 \frac{x^3+3x}{x^2+3x+2}dx=\int_0^1\left[x-3+\frac{10x+6}{(x+1)(x+2)}\right]dx=\int_0^1\left[x-3+\frac{-4}{x+1}+\frac{14}{x+2}\right]dx$

$$I=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1-3x\Big|_0^1-4\ln|x+1|\Big|_0^1+14\ln|x+2|\Big|_0^1=\frac{1}{2}-3-4\ln 2+14\ln 3-14\ln 2$$

$$I=\frac{-5}{2}-18\ln 2+14\ln 3\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{-5}{2}\\ b=-18\Rightarrow S=2a+b^2+c^2=515.\\ c=14\end{cases}$$

**Câu 14:[2D3-3] [SGD Thanh Hóa- KSCL 14/4- Mã đề 101]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

và thỏa mãn $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=\int_1^{16}\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x$.

**A.** $I=3$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\frac{5}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Đặt $t=\sin^2 x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\sin x\cos x\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{\mathrm{d}t}{2t}=\cot x\mathrm{d}x$

$$1=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(t)\frac{\mathrm{d}t}{2t}=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=2$$

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow\begin{cases}2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x\\ x=t^2\end{cases}$

$$1=\int_1^{16}\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=\int_1^4\frac{f(t)}{t^2}2t\mathrm{d}t=2\int_1^4\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow\int_1^4\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

Đặt $t=4x\Rightarrow\mathrm{d}t=4\mathrm{d}x$

$$I=\int_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f(t)}{\frac{t}{4}}\frac{\mathrm{d}t}{4}=\int_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x+\int_1^4\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$$

**Phân tích:**

Dạng bài này là dạng bài toán tìm tích phân của hàm $f\left(x\right)$ nào đó không biết, nhưng sẽ cho thêm điều kiện, mỗi 1 điều kiện là 1 đoạn trong cận tích phân cần tìm, yêu cầu là đưa các tích phân đã biết về giống dạng chưa biết.

**Câu 15:** **[2D3-3]** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{e}^{e^2}\frac{f\left(\ln x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x=1$ và $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}f\left(\cos x\right)\tan x\mathrm{d}x=2$. Tính $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x$.

**A.** $3$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $2$. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Đặt $t=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{x}$

$$1=\int_{e}^{e^2}\frac{f\left(\ln x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int_{1}^{2}\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=\int_{1}^{2}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x$$

Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$

$$2=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}f\left(\cos x\right)\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=-\int_{1}^{\frac{1}{2}}\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x$$

Do đó

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x=3$$

**Câu 16:** **[2D3-3]** **(THPT Gang Thép Thái Nguyên Lần 3 – 2018)** Tính tích phân

$I=\int_{0}^{\pi/4}\ln(\tan x+1)\mathrm{d}x$ ta được kết quả là $I=\frac{a\pi}{b}\ln 2+c$ với với $a,b,c\in\mathbb{N},b\neq 0,(a,b)=1$ .

Khi đó $P=abc$ nhận giá trị

**A.** 9. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $x=\frac{\pi}{4}-t$, ta có

$$I=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\left(\tan(\frac{\pi}{4}-t)+1\right)dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{1-\tan t}{1+\tan t}+1\right)dt$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dt-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\tan t+1\right)dt$$

$$=\frac{\pi}{4}\ln 2-I$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi}{8}\ln 2\Rightarrow a=1,b=8,c=0\Rightarrow P=0$$

**Câu 17:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và $f\left(0\right)=0$, $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$, $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$. Tính $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x$?

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f'\left(x\right)\mathrm{d}\left(f\left(x\right)\right)=\frac{\pi}{4}$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}\left(\cos x\right)=-\cos x.f\left(x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f'\left(x\right)\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

Mặt khác ta tính được: $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

Vậy $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}[f'(x)]^2\mathrm{d}x-2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f'(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}[f'(x)-\cos x]^2\mathrm{d}x=0$

Suy ra $f'\left(x\right)=\cos x\Rightarrow f\left(x\right)=\sin x+C$.

Do $f\left(0\right)=0\Rightarrow C=0$.

Vậy $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

**Câu 18:** **[2D3-3] [THPT chuyên Phan Bội Châu, tỉnh Nghệ An, lần 3, năm 2018 - Câu 35]**

Biết rằng $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{1}{2e^x+1}\text{dx}=\ln^a 2+b\ln 3+\ln 5^c$. Trong đó $a$, $b$, $c$ là các số nguyên. Khi đó $S=a+b-c$ bằng bao nhiêu.

**A.** $S=4$. **B.** $S=3$. **C.** $S=5$. **D.** $S=2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{1}{2e^x+1}\text{dx}=\int\limits_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x\left(2e^x+1\right)}\text{dx}$

Đặt $e^x=t \Rightarrow \text{dt}=\text{e}^x\text{dx}$

Đổi cận: khi $x=0$ thì $t=1$, khi $x=\ln 2$ thì $t=2$.

Vậy $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x\left(2e^x+1\right)}\text{dx}=\int\limits_1^2 \frac{1}{t\left(2t+1\right)}\text{dt}=\int\limits_1^2 \frac{2t+1-2t}{t\left(2t+1\right)}\text{dt}=\int\limits_1^2\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{2t+1}\right)\text{dt}$

$=\left[\ln t-\ln\left(2t+1\right)\right]\Big|_1^2=\left(\ln 2-\ln 5\right)-\left(\ln 1-\ln 3\right)=\ln 2+\ln 3+\ln 5^{-1}$

Vậy $S=3$.

**Hướng 2.** Phân tích

$$\int\limits_0^{\ln 2}\frac{1}{2e^x+1}dx=\int\limits_0^{\ln 2}\frac{\left(2e^x+1\right)-2e^x}{2e^x+1}dx=\int\limits_0^{\ln 2}\left(1-\frac{2e^x}{2e^x+1}\right)dx=\left[x-\ln\left(2e^x+1\right)\right]\Big|_0^{\ln 2}$$

**Câu 19:** Biết rằng $\int\limits_0^{\ln 2}\frac{1}{\sqrt{2e^{2x}+1}}\text{dx}=\frac{1}{2}\ln 2^a+\frac{1}{b}\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$. Trong đó $a$, $b$ là các số nguyên. Khi đó $S=a+2b$ bằng bao nhiêu.

**A.** $S=-2$. **B.** $S=3$. **C.** $S=1$. **D.** $S=0$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\int\limits_0^{\ln 2}\frac{1}{\sqrt{2e^{2x}+1}}\text{dx}=\int\limits_0^{\ln 2}\frac{2e^{2x}}{2e^{2x}\sqrt{2e^{2x}+1}}\text{dx}$

Đặt $\sqrt{2e^{2x}+1}=t \Rightarrow 2e^{2x}=t^2-1 \Rightarrow \text{d}\left(2e^{2x}\right)=\text{d}\left(t^2-1\right) \Rightarrow 4e^{2x}\text{dx}=2t\text{dt}$

Đổi cận: khi $x=0$ thì $t=\sqrt{3}$, khi $x=\ln 2$ thì $t=3$.

Vậy $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{2e^{2x}}{2e^{2x}\sqrt{2e^{2x}+1}}\text{dx} = \int\limits_{\sqrt{3}}^{3} \frac{t}{t\left(t^2-1\right)}\text{dt}$

$\frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{3}}^{3}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\text{dt} \; = \frac{1}{2}\left[\ln\left(t-1\right)-\ln\left(t+1\right)\right]\Big|_{\sqrt{3}}^{3}$

$\frac{1}{2}\left[\ln 2-\ln 4\right]-\frac{1}{2}\left[\ln\left(\sqrt{3}-1\right)-\ln\left(\sqrt{3}+1\right)\right] \; = \frac{1}{2}\ln 2^{-1}+\frac{1}{2}\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$

Vậy $S=3$.

**Câu 20:** Biết rằng $\int\limits_0^1 \frac{\left(x^2+x\right)e^x}{x+e^{-x}}\text{dx} = \text{a.e} + \text{b}\ln\left(e+c\right)$. Trong đó $a$, $b$, $c$ là các số nguyên. Khi đó $S=a+2b-c$ bằng bao nhiêu.

**A.** $S=-1$. **B.** $S=-2$. **C.** $S=1$. **D.** $S=0$.

**Lời giải.**

**Chọn B**

Ta có $\int\limits_0^1 \frac{\left(x^2+x\right)e^x}{x+e^{-x}}\text{dx} = \int\limits_0^1 \frac{xe^x\left(x+1\right)e^x}{xe^x+1}dx$

Đặt $xe^x+1=t \Rightarrow \text{dt}=\left(x+1\right)\text{e}^x\text{dx}$

Đổi cận: khi $x=0$ thì $t=1$, khi $x=1$ thì $t=e+1$.

Vậy $\int\limits_0^1 \frac{\left(x^2+x\right)e^x}{x+e^{-x}}\text{dx} = \int\limits_1^{e+1} \frac{\left(t-1\right)}{t}dt = \left(t-\ln|t|\right)\Big|_1^{e+1} = e-\ln\left(e+1\right)$

Vậy $S=-2$.

**Câu 21: [THPT Lương Thế Vinh, Hà Nội, Lần 2 năm 2018]** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[1;+\infty\right)$ thỏa mãn $f\left(1\right)=1$ và $f'\left(x\right)\geq 3x^2+2x-5 \;\; \forall x\in\left[1;+\infty\right)$. Tìm số nguyên dương $m$ lớn nhất sao cho $\min\limits_{x\in[3;10]} f\left(x\right)\geq m$ với mọi hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa đề bài.

**A.** $m=15$. **B.** $m=20$. **C.** $m=25$. **D.** $m=30$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Do giả thiết cho một bất đẳng thức liên quan đến $y=f'\left(x\right)$ nên ta sẽ lấy tích phân hai vế để được một bất đẳng thức liên quan đến $y=f\left(x\right)$.

Ta có

$\int_1^t f'(x)\mathrm{d}x \ge \int_1^t (3x^2+2x-5)\mathrm{d}x \Rightarrow f(t)-f(1)\ge t^3+t^2-5t+3 \quad \forall t\ge 1$.

Suy ra

$f(x)\ge x^3+x^2-5x+4 \Rightarrow \min\limits_{x\in[3;10]} f(x) \ge \min\limits_{x\in[3;10]}\left(x^3+x^2-5x+4\right)=25$.

Vậy $m=25$.

**Câu 22:** Cho các hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x)+xf'(x)\ge x^{2018} \quad \forall x\in[0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $\frac{1}{2019.2020}$. **B.** $\frac{1}{2019.2021}$. **C.** $\frac{1}{2020.2021}$. **D.** $\frac{1}{2018.2020}$.

**Câu 23:[THPT Lương Thế Vinh, Hà Nội, Lần 2 năm 2018]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1}-\frac{2x}{f^2(x)}=0$ và $f(0)=1$. Tích phân $\int\limits_0^{\sqrt{7}} x.f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{2\sqrt{7}}{3}$. **B.** $\frac{15}{4}$. **C.** $\frac{45}{8}$. **D.** $\frac{5\sqrt{7}}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Phân tích: Nhận thấy $\left(e^{f^3(x)}\right)'=3.f'(x).f^2(x)$ nên ý tưởng là quy đồng chuyển vế để tích phân 2 vế

Ta có: $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1}-\frac{2x}{f^2(x)}=0 \Leftrightarrow 3.f^2(x).f'(x).e^{f^3(x)}=2x.e^{x^2+1}$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $\int 3.f^2(x).f'(x).e^{f^3(x)}\mathrm{d}x=\int 2x.e^{x^2+1}\mathrm{d}x=\int e^{x^2+1}\mathrm{d}\left(x^2+1\right)$

$\Leftrightarrow e^{f^3(x)}-e^{x^2+1}+C=0$

Mặt khác: $f(0)=1 \Rightarrow C=0$ nên $f^3(x)=x^2+1 \Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$

Tính: $\int\limits_0^{\sqrt{7}} x.f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\sqrt{7}} x.\sqrt[3]{x^2+1}.\mathrm{d}x=\frac{45}{8}$.

**Câu 24:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0, \int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{11}$ và $\int\limits_0^1 x^4 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{55}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $-\dfrac{1}{7}$. **B.** $\dfrac{1}{7}$. **C.** $-\dfrac{1}{55}$. **D.** $\dfrac{1}{11}$

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có $\int\limits_0^1 x^4 f(x)\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^5}{5}f(x)\right]\Bigg|_0^1 - \int\limits_0^1 \dfrac{x^5}{5}f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_0^1 x^5 f'(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{11}$

mà $\int\limits_0^1 \left(x^5\right)^2\mathrm{d}x = \dfrac{1}{11}$ nên $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 x^5 f'(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \left(x^5\right)^2\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 \left[f'(x) - x^5\right]^2 dx = 0$.

Suy ra $f'(x) = x^5 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{6}x^6 + C$.

Vì $f(1) = 0$ nên $C = -\dfrac{1}{6}$. Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \dfrac{x^6 - 1}{6}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{7}$.

**Câu 25:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2} - 2\ln 2$ và $\int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = 2\ln 2 - \dfrac{3}{2}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\dfrac{1 - 2\ln 2}{2}$. **B.** $\dfrac{3 - 2\ln 2}{2}$. **C.** $\dfrac{3 - 4\ln 2}{2}$. **D.** $\dfrac{1 - \ln 2}{2}$

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có $\int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}\left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right) = \left[\left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right)f(x)\right]\Bigg|_0^1 - \int\limits_0^1 \left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right)f'(x)\mathrm{d}x$

Suy ra $\int\limits_0^1 \left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right)f'(x)\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2} - 2\ln 2$.

Mặt khác $\int\limits_0^1 \left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right)^2\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(1 - 2\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x = \left[x - 2\ln|x+1| - \dfrac{1}{(x+1)}\right]\Bigg|_0^1 = \dfrac{3}{2} - 2\ln 2$.

Do đó $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 \left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right)f'(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right)^2\mathrm{d}x = 0$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^3 \left[f'(x) + \dfrac{1}{x+1} - 1\right]^2\mathrm{d}x = 0$.

$\Rightarrow f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1} \Rightarrow f(x) = x - \ln(x+1) + C$, vì $f(1) = 0$ nên $C = \ln 2 - 1$.

Ta được $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[x - \ln(x+1) + \ln 2 - 1\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \ln 2$.

**Câu 26:** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4x.f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$.

Tích phân $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

**A.** $I = \frac{\pi}{20}$. **B.** $I = \frac{\pi}{16}$. **C.** $I = \frac{\pi}{6}$. **D.** $I = \frac{\pi}{4}$.

**Lời giải:**

**Chọn A.**

Vì $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $4x.f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$ nên ta có

$$\int_0^1 \left[4x.f(x^2) + 3f(1-x)\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 4x.f(x^2)\mathrm{d}x + \int_0^1 3f(1-x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \quad (1).$$

Mà $\int_0^1 4x.f(x^2)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}(x^2) \xrightarrow{t=x^2} 2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 2I$

và $\int_0^1 3f(1-x)\mathrm{d}x = -3\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}(1-x) \xrightarrow{u=1-x} 3\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = 3I$

Đồng thời $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \xrightarrow{x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.

Do đó, $(1) \Leftrightarrow 2I + 3I = \frac{\pi}{4}$ hay $I = \frac{\pi}{20}$.

**Câu 27:** Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $3f'(x) + 2f^2(x) = 0$. Tính $f(1)$ biết rằng $f(0) = 1$.

A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{3}{5}$. D. $\frac{4}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

***Nhận xét***: Từ giả thiết bài toán ta biến đổi về công thức đạo hàm và sử dụng định nghĩa tích phân.

***Phân tích***: Từ giả thiết $3f'(x) + 2f^2(x) = 0$ và $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra:

$$\int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \int_0^1 \frac{-2}{3}dx \Rightarrow \frac{-1}{f(1)} + \frac{1}{f(0)} = \frac{-2}{3} \Rightarrow f(1) = \frac{3}{5}.$$

**Câu 28:** Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(x)+xf'(x)=2x$ và $f(1)=2$. Giá trị $f(2)$ bằng:

A. $\frac{5}{2}$. B. $2$. C. $e$. D. $\frac{e}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Từ giả thiết $f(x)+xf'(x)=2x \Rightarrow (xf(x))'=2x \Rightarrow \int (xf(x))'dx = \int 2xdx$

Suy ra $xf(x)=x^2+C$, thay $x=1$ vào hai vế ta được

$1.f(1)=1^2+C \Rightarrow 2=1+C \Rightarrow C=1.$

Khi đó $xf(x)=x^2+1 \Rightarrow f(x)=\frac{x^2+1}{x}$. Vậy $f(2)=\frac{5}{2}$.

**Câu 29:** Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=2e^x$ và $f(0)=1$. Giá trị $f(2)$ bằng:

A. $e$. B. $\ln 2$. C. $e^2$. D. $1$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Từ $f(x)+f'(x)=2e^x \Rightarrow e^x f(x)+e^x f'(x)=2e^{2x} \Rightarrow (e^x f(x))'=2e^{2x}$

Suy ra $\int (e^x f(x))'dx = \int 2e^{2x}dx \Rightarrow e^x f(x)=e^{2x}+C$. Thay $x=0$ vào hai vế ta được $C=0$.

Suy ra $f(x)=e^x$. Vậy $f(2)=e^2$.

**Câu 30:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=-2\ln 2$ và $x(x+1)f'(x)+f(x)=x^2+x$. Giá trị $f(2)=a+b\ln 3$, $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $a^2+b^2$.

**A.** $\frac{25}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có $x\left(x+1\right)f'\left(x\right)+f\left(x\right)=x^2+x \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1}f'\left(x\right)+\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2}f\left(x\right)=\dfrac{x}{x+1}$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{x}{x+1}f\left(x\right)\right]'=\dfrac{x}{x+1}$.

Lấy tích phân từ 1 đến 2 hai vế ta được $\int\limits_1^2 \left[\dfrac{x}{x+1}f\left(x\right)\right]' \mathrm{d}x=\int\limits_1^2 \dfrac{x}{x+1}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1}f\left(x\right)\Big|_1^2=\left(x-\ln\left|x+1\right|\right)\Big|_1^2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}f\left(2\right)-\dfrac{1}{2}f\left(1\right)=\left(2-\ln 3\right)-\left(1-\ln 2\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{3}f\left(2\right)+\ln 2=1-\ln 3+\ln 2 \Leftrightarrow f\left(2\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}\ln 3$. Suy ra $a=\dfrac{3}{2}$ và $b=-\dfrac{3}{2}$.

Vậy $a^2+b^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{2}$.

**Câu 31:** Biết $\int\limits_1^2 \left(\sqrt[3]{x-\dfrac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^8}-\dfrac{1}{x^{11}}}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{c}$, với $a,b,c$ nguyên dương, $\dfrac{a}{b}$ tối giản và $c<a$.

Tính $S=a+b+c$.

**A.** $S=51$. **B.** $S=67$. **C.** $S=39$. **D.** $S=75$.

**Lời giải**

Chọn B

Ta có $I=\int\limits_1^2 \left(\sqrt[3]{x-\dfrac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^8}-\dfrac{1}{x^{11}}}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 \sqrt[3]{x-\dfrac{1}{x^2}}\left(1+\dfrac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt[3]{x-\dfrac{1}{x^2}} \Rightarrow 3t^2\mathrm{d}t=\left(1+\dfrac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x$ nên $I=\int\limits_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}} 3t^3\mathrm{d}t=\dfrac{21}{32}\sqrt[3]{14}$.

Suy ra $S=67$.

**Câu 32:[Sở Bắc Ninh Lần 2-2018]** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $x\in\left(0;+\infty\right)$ đồng thời thỏa mãn điều kiện:

$f\left(x\right)=x\left(\sin x+f'\left(x\right)\right)+\cos x$ và $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(x\right)\sin x\mathrm{d}x=-4$. Khi đó, $f\left(\pi\right)$ nằm trong khoảng nào?

**A.** $\left(6;7\right)$. **B.** $\left(5;6\right)$. **C.** $\left(12;13\right)$. **D.** $\left(11;12\right)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ giả thiết: $f(x)=x(\sin x+f'(x))+\cos x \Leftrightarrow f(x)=x\sin x+x f'(x)+\cos x$

$\Leftrightarrow f'(x).x-x'.f(x)=-x\sin x-\cos x \Leftrightarrow f'(x).x-x'.f(x)=(\cos x)'x-x'\cos x$ (*).

Vì $x\in(0;+\infty)$, ta chia $2$ vế của (*) cho $x^2$ ta được

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x).x-x'.f(x)}{x^2}=\frac{(\cos x)'x-x'\cos x}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(\frac{\cos x}{x}\right)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=\frac{\cos x}{x}+c$$

$\Leftrightarrow f(x)=\cos x+cx$.

Mặt khác lại có $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\sin x dx=-4$.

Xét $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\sin x dx=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(\cos x\sin x+c x\sin x)dx=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\, d(\cos x)+c\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x\sin x\, dx$

$$=-\left(\frac{\cos^2 x}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}+c(x\cos x+\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=-2c.$$

Mà $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\sin x dx=-4 \Leftrightarrow -2c=-4 \Leftrightarrow c=2 \Rightarrow f(x)=\cos x+2x$.

Ta có: $f(\pi)=-1+2\pi \approx 5,28$.

**Tổng quát:**

Gặp những bài toán mà giả thiết cho dạng $a(x).f(x)+b(x).f'(x)=g(x)$ (1)

Ta sẽ nhân một lượng thích hợp để đưa $(1)$ về dạng $u'(x).f(x)+u(x).f'(x)=h'(x)$ (2)

Với $\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{a(x)}{b(x)}$, kết hợp với giả thiết ta tìm được $u(x)$ suy ra biểu thức nhân thêm là

$\frac{u(x)}{b(x)}$.

Khi có $(2)$ ta sẽ tìm được $f(x)$.

**Câu 33:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'\left(x\right)+2xf\left(x\right)=2x.e^{-x^2}$ và $f\left(0\right)=1$. Tính $f\left(1\right)$.

**A.** $e$.　　**B.** $\frac{1}{e}$.　　**C.** $\frac{2}{e}$.　　**D.** $-\frac{2}{e}$.

**Câu 34:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left(x+2\right)f\left(x\right)+\left(x+1\right)f'\left(x\right)=\mathrm{e}^x$ và $f\left(0\right)=\frac{1}{2}$. Tính $f\left(2\right)$.

**A.** $f\left(2\right)=\frac{\mathrm{e}}{3}$.　　**B.** $f\left(2\right)=\frac{\mathrm{e}}{6}$.　　**C.** $f\left(2\right)=\frac{\mathrm{e}^2}{3}$.　　**D.** $f\left(2\right)=\frac{\mathrm{e}^2}{6}$.

**Câu 35:** Biết $\int\limits_1^2\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}-1}\mathrm{d}x=a\sqrt{5}+b\sqrt{2}+c$, với $a,b,c$ là các số hữu tỷ. Tính $P=a+b+c$.

**A.** $P=-\frac{5}{2}$　　**B.** $P=\frac{7}{2}$　　**C.** $P=\frac{5}{2}$　　**D.** $P=2$

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có $\int\limits_1^2\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}-1}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_1^2=\frac{5}{3}\sqrt{5}-\frac{2}{3}\sqrt{2}+\frac{3}{2}$.

Vậy $a=\frac{5}{3},b=-\frac{2}{3};c=\frac{3}{2}\Rightarrow P=\frac{5}{2}$.

**Câu 36:** Cho tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\ln\left(\sin x\right)}{\cos^2 x}dx=a\sqrt{3}\ln\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{b}\ln 2+\frac{\pi}{c}\left(a,b,c\in\mathbb{Z}\right)$. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$.

**A.** $-3$　　**B.** $-2$　　**C.** $-1$　　**D.** $1$

**Lời giải**

**Chọn B.**

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(\sin x\right)\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{\cos x}{\sin x}dx\\ v=\tan x\end{cases}$

Suy ra $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\ln\left(\sin x\right)}{\cos^2 x}dx=\tan x.\ln\left(\sin x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}dx=\sqrt{3}\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}$

$$=\sqrt{3}\ln\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\ln 2+\frac{\pi}{-6}\Rightarrow a=1;b=3;c=-6$$

Do đó $S=a+b+c=-2$

**Câu 37:** Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1).\cos^2 xdx=\frac{\pi^2}{a}+\frac{\pi}{b}+\frac{1}{c}(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$.

**A.** $1$ **B.** $-2$ **C.** $2$ **D.** $-1$

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{1}{2}+x\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos 2x\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}+J$$

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\cos 2x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{cases}$

Suy ra $J=\frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}$

Do đó $I=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\Rightarrow a=8;b=-4;c=-2\Rightarrow S=2$

**Câu 38:** Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\tan^2 xdx=a\pi^2+b\pi+c\ln 2(a,b,c\in\mathbb{Q})$. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$.

**A.** $-\frac{9}{32}$ **B.** $\frac{7}{31}$ **C.** $-\frac{5}{16}$ **D.** $\frac{1}{32}$

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{16}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

Đặt $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\tan x\mathrm{d}x\end{cases}$

Suy ra $J=x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}+\ln\left(\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy $I=-\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\Rightarrow S=-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{5}{16}$

**Câu 39:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(-2\right)=1$, $\int\limits_1^2 f\left(2x-4\right)\mathrm{d}x=1$. Tính $I=\int\limits_{-2}^0 x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=1$. **B.** $I=0$. **C.** $I=-4$. **D.** $I=4$.

**Câu 40: [THPT Chuyên Hùng Vương Phú Thọ Lần 4 - Năm 2017 - 2018]** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2\left(x\right)-2\sqrt{2}.f\left(x\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}$. Tính $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

**A.** $\frac{\pi}{4}$. **B.** $0$. **C.** $1$. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

+) Ta có $2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{d}x=\left[x-\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-2}{2}$.

+) Từ đó

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2\left(x\right)-2\sqrt{2}.f\left(x\right).\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}.$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2\left(x\right)-2\sqrt{2}.f\left(x\right).\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}+\frac{\pi-2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ f(x) - \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right]^2 \mathrm{d}x = 0.$$

Do $\left[ f(x) - \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right]^2 \geq 0,\ \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ f(x) - \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right]^2 \mathrm{d}x \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

+) Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x = -\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$.

**Nhận xét**: để đảm bảo tính khả tích, ta cần thêm điều kiện “ $y = f(x)$ liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$”

ở đề bài. Khi đó điều kiện “xác định” không cần nữa.

**Câu 41:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 \left[ f^2(x) - 6.f(x).e^x \right]\mathrm{d}x = \frac{9(1-e^2)}{2}$. Tính $\int_0^1 (x+1)f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $e - 1$. **B.** $2e + 5$. **C.** $e$. **D.** $3e$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

+) Ta có

$$\int_0^1 \left[ f^2(x) - 6.f(x).e^x \right]\mathrm{d}x = \frac{9(1-e^2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[ f^2(x) - 6.f(x).e^x \right]\mathrm{d}x + \int_0^1 9e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{9(1-e^2)}{2} + \int_0^1 9e^{2x}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[ f(x) - 3e^x \right]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 3e^x.$$

+) Vậy $\int_0^1 (x+1)f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 3(x+1)e^x\mathrm{d}x = 3xe^x\Big|_0^1 = 3e$.

**Câu 42:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ thỏa mãn

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f^2\left(x\right)-2.f\left(x\right).\left(3-x\right)\right]\mathrm{d}x=-\frac{109}{12}$$. Tính $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{f\left(x\right)}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

**A.** $\ln\frac{2}{9}$. **B.** $\ln\frac{5}{9}$. **C.** $\ln\frac{7}{9}$. **D.** $\ln\frac{8}{9}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

+) Ta có

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f^2\left(x\right)-2.f\left(x\right).\left(3-x\right)\right]\mathrm{d}x=-\frac{109}{12}$$

$$\Leftrightarrow\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f^2\left(x\right)-2.f\left(x\right).\left(3-x\right)\right]\mathrm{d}x+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(3-x\right)^2\mathrm{d}x=-\frac{109}{12}+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(3-x\right)^2\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f\left(x\right)-\left(3-x\right)\right]^2\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow f\left(x\right)=3-x.$$

+) Vậy $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{f\left(x\right)}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3-x}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}\right)dx=\left(\ln\left|x-1\right|-2\ln\left|x+1\right|\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\ln\frac{2}{9}$.

**Câu 43:** Cho hàm số $f\ x$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn điều kiện

$4x.f(x^2)+3.f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$. Tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng.

**A.** $I=\frac{\pi}{4}$. **B.** $I=\frac{\pi}{6}$. **C.** $I=\frac{\pi}{20}$. **D.** $I=\frac{\pi}{16}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Lấy tích phân hai vế ta có: $\int_0^1 4x.f(x^2)\mathrm{d}x+\int_0^1 3f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^1 f(x^2)d(x^2) - 3\int_0^1 f(1-x)d(1-x) = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^1 f(t)d(t) + 3\int_0^1 f(u)d(u) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow 5\int_0^1 f(x)d(x) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x)d(x) = \frac{\pi}{20}$$

**Câu 44: [ THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước, lần 4, năm 2018 - Câu 47]**

Cho $\int_0^1 x\left[\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}\right]dx = \frac{a^2\ln 2 - bc\ln 3 + c}{4}$, với $a,b,c \in \mathbb{N}$. Tính $T = a+b+c$.

**A.** $T = 13$. **B.** $T = 15$. **C.** $T = 17$. **D.** $T = 11$.

**Lời giải.**

**Chọn A.**

Phân tích: Biểu thức trong tích phân có tổng của hàm logarit và hàm phân thức nên ta tách thành 2 tích phân dạng thường gặp. Một là tích phân của hàm đa thức và hàm logarit ta dùng tích phân từng phần, một là tích phân của hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất cơ bản.

Ta có $I = \int_0^1 x\left[\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}\right]dx = \int_0^1 x\ln(x+2)dx + \int_0^1 \frac{x}{x+2}dx$

$$= \int_0^1 \ln(x+2)d\left(\frac{1}{2}x^2-2\right) + \int_0^1\left(1-\frac{2}{x+2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2-4}{2}\ln(x+2)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2-4}{2}.\frac{1}{x+2}dx + \left(x-2\ln(x+2)\right)\Big|_0^1$$

$$= -\frac{3}{2}\ln 3 + 2\ln 2 - \left(\frac{x^2}{4}-x\right)\Big|_0^1 + 1 - 2\ln 3 + 2\ln 2 = -\frac{7}{2}\ln 3 + 4\ln 2 + \frac{7}{4} = \frac{4^2\ln 2 - 2.7\ln 3 + 7}{4}.$$

Ta có $a = 4$, $b = 2$, $c = 7$. Vậy $T = a+b+c = 4+2+7 = 13$.

**Câu 45:** Cho $I = \int_0^3 x\left(\ln(x+1) - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{abc\ln 2 - b\ln 5 - c}{4}$, với $a,b,c \in \mathbb{N}$. Tính $T = a+b+c$.

**A.** $T = 13$. **B.** $T = 15$. **C.** $T = 10$. **D.** $T = 11$.

**Lời giải.**

**Chọn C.**

Ta có $I=\int\limits_0^3 x\left(\ln(x+1)-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\int\limits_0^3 x\ln(x+1)dx-\int\limits_0^3\frac{x}{x^2+1}dx$

$=\int\limits_0^3\ln(x+1)d\left(\frac{x^2-1}{2}\right)-\frac{1}{2}\int\limits_0^3\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{x^2-1}{2}\ln(x+1)\Big|_0^3-\int\limits_0^3\frac{x-1}{2}dx-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^3$

$=4\ln 4-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ln 10=\frac{5.2.3\ln 2-2\ln 5-3}{4}$.

Vậy $T=a+b+c=10$.

**Câu 46:** Cho $I=\int\limits_0^1 x\left(\ln(x+2)-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{ab\ln 2+bc\ln 3-c}{4}$, với $a,b,c\in\mathbb{N}$. Tính $T=abc$

.

**A.** $T=-18$. **B.** $T=16$. **C.** $T=18$. **D.** $T=-16$.

**Lời giải**.

**Chọn A.**

Ta có $I=\int\limits_0^1 x\left(\ln(x+2)-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\int\limits_0^1 x\ln(x+2)dx-\int\limits_0^1\frac{x}{x^2+1}dx$

$=\int\limits_0^1\ln(x+2)d\left(\frac{x^2-4}{2}\right)-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{x^2-4}{2}\ln(x+2)\Big|_0^1-\int\limits_0^1\frac{x^2-4}{2}.\frac{1}{x+2}dx-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1$

$=-\frac{3}{2}\ln 3+2\ln 2+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{3.2\ln 2+2.(-3)\ln 3-(-3)}{4}$

Vậy $T=a.b.c=3.2.(-3)=-18$.

**Câu 47:** Cho $f(x)$ là hàm liên tục và $a>0$. Giả sử rằng với mọi $x\in[0;a]$, ta có $f(x)>0$ và

$f(x)f(a-x)=1$. Tính $\int\limits_0^a\frac{dx}{1+f(x)}$ được kết quả bằng:

**A.** $\frac{a}{3}$. **B.** $2a$. **C.** $a\ln(a+1)$. **D.** $\frac{a}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có: $I=\int\limits_0^a\frac{dx}{1+\frac{1}{f(a-x)}}=\int\limits_0^a\frac{f(a-x)}{f(a-x)+1}dx$.

Đặt: $a-x=t$ thì $dx=-dt$.

Đổi cận

| $x$ | $0$ | $a$ |
|---|---|---|
| $t$ | $a$ | $0$ |

Ta được: $I=-\int\limits_a^0 \frac{f(t)}{f(t)+1}dt=\int\limits_0^a \frac{f(x)}{f(x)+1}dx$.

Do đó: $I+I=\int\limits_0^a \frac{dx}{1+f(x)}+\int\limits_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)}=\int\limits_0^a \frac{(1+f(x))dx}{1+f(x)}=\int\limits_0^a dx=a$. Vậy: $I=\frac{a}{2}$.

**Câu 48:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x)-2f(x)=\tan^2 x$. Tính $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $1-\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{2}-1$. **C.** $1+\frac{\pi}{4}$. **D.** $2-\frac{\pi}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

$3f(-x)-2f(x)=\tan^2 x\,(1)$

Thay $x=-x.(1)\Rightarrow 3f(x)-2f(-x)=\tan^2(-x)=\tan^2 x\,(2)$

$(1).2+(2).3=5\tan^2 x=5f(x)$

$\Rightarrow f(x)=\tan^2 x$

$$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\left(1+\tan^2 x\right)-1\right]\mathrm{d}x$$

$$I=2(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=2-\frac{\pi}{2}.$$

**Câu 49:** **(Sở GD & ĐT Đồng Tháp 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $\int\limits_0^1 x\left(f'(x)-2\right)\mathrm{d}x=f(1)$. Giá trị của $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $-1$. **D.** $-2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \left(f'(x) - 2\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) - 2x \end{cases}$

Khi đó $f(1) = \int\limits_0^1 x\left(f'(x) - 2\right)dx = x\left(f(x) - 2x\right)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \left(f(x) - 2x\right)dx = f(1) - 2 - I + 1$

Suy ra $I = -1$.

**Câu 50:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $\int\limits_0^1 x\left(f'(x) - 4\right)dx = f(1)$.

Giá trị của $I = \int\limits_0^1 f(x)dx$ bằng

**A.** $0$. **B.** $-2$. **C.** $-1$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \left(f'(x) - 4\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) - 4x \end{cases}$

Khi đó $f(1) = \int\limits_0^1 x\left(f'(x) - 4\right)dx = x\left(f(x) - 4x\right)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \left(f(x) - 4x\right)dx = f(1) - 4 - I + 2$

Suy ra $I = -2$.

**Câu 51:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 (x+1)f'(x)dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$.

Tính $I = \int\limits_0^1 f(x)dx$

**A.** $I = -12$. **B.** $I = 8$. **C.** $I = 12$. **D.** $I = -8$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $\begin{cases} u = x + 1 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$

Khi đó $10 = \int\limits_0^1 (x+1)f'(x)dx = (x+1)f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 f(x)dx = 2f(1) - f(0) - I$

Suy ra $I = -8$.

**Câu 52:** Biết rằng hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(2\right)=16$; $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$. Tính

$I=\int\limits_0^1 xf'\left(2x\right)\mathrm{d}x$

**A.** $I=13$. **B.** $I=12$. **C.** $I=20$. **D.** $I=7$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=f'\left(2x\right)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{1}{2}f\left(2x\right) \end{cases}$

Khi đó $I=\int\limits_0^1 xf'\left(2x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}xf\left(2x\right)\Big|_0^1-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}f\left(2\right)-\dfrac{1}{4}\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=8-1=7$

Suy ra $I=7$.

**Câu 53:** Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$\left(x^2+1\right)f'(x)+2xf(x)=xe^x$ và $f(0)=1$. Giá trị $f(1)$ bằng:

A. $e$. B. $1$. C. $\ln 2$. D. $0$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Từ giả thiết $\left(x^2+1\right)f'(x)+2xf(x)=xe^x \Rightarrow \left(\left(x^2+1\right)f(x)\right)'=xe^x$

Suy ra

$\int\limits_0^1 \left(\left(x^2+1\right)f(x)\right)'dx=\int\limits_0^1 xe^x dx$.

$\Leftrightarrow \left(\left(x^2+1\right)f(x)\right)\Big|_0^1=\int\limits_0^1 xde^x \Leftrightarrow 2f(1)-f(0)=xe^x\Big|_0^1-\int\limits_0^1 e^x dx$

$\Leftrightarrow 2f(1)-f(0)=e-e^x\Big|_0^1 \Leftrightarrow f(1)=1$.

**Câu 54:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thỏa mãn điều kiện $f\left(x\right)+2f\left(1-x\right)=3x^2-6x$,

$\forall x\in\left[0;1\right]$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=-\dfrac{4}{15}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=-\dfrac{2}{15}$. **D.** $I=\dfrac{2}{15}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Đặt $t=1-x$, $\forall x\in[0;1]$ thì $\forall t\in[0;1]$.

Ta có $f(x)+2f(1-x)=3x^2-6x \Leftrightarrow f(x)+2f(1-x)=3(x-1)^2-3$

$\Leftrightarrow f(1-t)+2f(t)=3t^2-3 \Leftrightarrow 2f(x)+f(1-x)=3x^2-3$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} f(x)+2f(1-x)=3x^2-6x \\ 2f(x)+f(1-x)=3x^2-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+2f(1-x)=3x^2-6x \\ 4f(x)+2f(1-x)=6x^2-6 \end{cases}$

$\Rightarrow 3f(x)=3x^2+6x-6 \Leftrightarrow f(x)=(x+1)^2-3,\ \forall x\in[0;1]$.

Khi đó $f(1-x^2)=(2-x^2)^2-3=x^4-4x^2+1$.

Suy ra $I=\int\limits_0^1 f(1-x^2)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 (x^4-4x^2+1)\,\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^5}{5}-\frac{4x^3}{3}+x\right)\right|_0^1=-\frac{2}{15}$.

**Phân tích:**

+ Bước 1: Từ $f(x)+2f(1-x)=3x^2-6x$ ta giải phương trình hàm tìm hàm số $f(x)$.

+ Bước 2: Xác định trực tiếp hàm $f(1-x^2)$ rồi tính $I=\int\limits_0^1 f(1-x^2)\,\mathrm{d}x$.

**Câu 55: [Chuyên Hùng Vương Bình Dương,thi lần 5,năm 2018]**Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục với mọi $x\neq 1$ thỏa mãn $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=x+3, x\neq 1$. Tính $I=\int\limits_2^{e+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

**A.** $I=4e-1$. **B.** $I=e+2$. **C.** $I=4e-2$. **D.** $I=e+3$.

**Lời giải**

Đặt $t=\frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow xt-t=x+1 \Rightarrow x=\frac{t+1}{t-1}$, suy ra $f(t)=\frac{t+1}{t-1}+3=4+\frac{2}{t-1}$ hay $f(x)=4+\frac{2}{x-1}$

Ta có $I=\int\limits_2^{e+1}\left(4+\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(4x+2\ln|x-1|\right)\right|_2^{e+1}=4e-2$.

**Câu 56:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục với mọi $x\neq 0$ thỏa mãn $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x, x\neq 0$.

Tính $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=\frac{9}{2}$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=\frac{4}{3}$.

**Lời giải**

Tương tự ta xác định được $f(x)=-x+\frac{2}{x}$.

Suy ra $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(-1+\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(-x-\frac{2}{x}\right)\right|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{3}{2}$.

**Câu 57: [Đặng Thúc Hứa – Lần 2 – 2018]** Cho $\int_0^1 f(2x+1)\mathrm{d}x=12$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x)\sin 2x\mathrm{d}x=3$. Tính $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $26$. **B.** $22$. **C.** $27$. **D.** $15$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

+ Đặt: $2x+1=t\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2}$.

Với $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=1\Rightarrow t=3\end{cases}$. Do đó: $\int_0^1 f(2x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t\Rightarrow\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=24$.

+ Đặt: $\sin^2 x=u\Rightarrow 2\sin x\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$ hay $\sin 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$.

Với $\begin{cases}x=0\Rightarrow u=0\\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=1\end{cases}$. Do đó: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x)\sin 2x\mathrm{d}x=\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3$.

Vậy $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=27$.

**Câu 58:** Biết $I=\int_1^5\frac{\sqrt{2x-1}}{2x+3\sqrt{2x-1}+1}\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln\frac{3}{5}$, $(a,\,b,\,c\in Z)$. Khi đó, giá trị $P=a^2-ab+2c$

**A.** $10$. **B.** $8$. **C.** $9$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có $2x+3\sqrt{2x-1}+1=2x-1+3\sqrt{2x-1}+2$

Đặt $t=\sqrt{2x-1}\Rightarrow t^2=2x-1\Rightarrow tdt=dx$

Đổi cận $x=1\Rightarrow t=1;\ x=5\Rightarrow t=3$

Khi đó

$$I=\int_1^3 \frac{t^2}{t^2+3t+2}\mathrm{d}t=\int_1^3\left(1+\frac{-3t-2}{(t+1)(t+2)}\right)\mathrm{d}t=\int_1^3\left(1+\frac{1}{t+1}+\frac{-4}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\left(t+\ln|t+1|-4\ln|t+2|\right)\Big|_1^3$$

$$=3+\ln4-4\ln5-(1+\ln2-4\ln3)=2+\ln2+4\ln\frac{3}{5}.\Rightarrow a=2,\ b=1,\ c=4.$$

$$\Rightarrow P=a^2-ab+2c=10$$

**Câu 59:** Biết $\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x}{2x+3\sqrt{2x+1}+3}=a+b\ln2+c\ln\frac{5}{3}\ (a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tính $T=2a+b+c$.

**A.** $T=4$. **B.** $T=2$. **C.** $T=1$. **D.** $T=3$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$I=\int_0^4\frac{\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x}{2x+3\sqrt{2x+1}+3}=\int_0^4\frac{\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)\left(\sqrt{2x+1}+2\right)}=\int_0^4\frac{2\left(\sqrt{2x+1}+1\right)-\left(\sqrt{2x+1}+2\right)\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)\left(\sqrt{2x+1}+2\right)}$$

$$=\int_0^4\frac{2\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{2x+1}+2\right)}-\int_0^4\frac{\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}.$$

Đặt $u=\sqrt{2x+1}\Rightarrow u\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$. Với $x=0\Rightarrow u=1$, với $x=4\Rightarrow u=3$.

Suy ra $I=\displaystyle\int_1^3\frac{2u\mathrm{d}u}{u+2}-\int_1^3\frac{u\mathrm{d}u}{u+1}=\int_1^3\left(2-\frac{4}{u+2}\right)\mathrm{d}u-\int_1^3\left(1-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u$

$$=\left(u-4\ln|u+2|+\ln|u+1|\right)\Big|_1^3=2-4\ln\frac{5}{3}+\ln2$$

$$\Rightarrow a=2,\ b=1,\ c=1\Rightarrow T=2.1+1-4=1.$$

**Câu 60:** Biết $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

**A.** $P=44$. **B.** $P=42$. **C.** $P=46$. **D.** $P=48$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $I=\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}}=\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}$.

Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x(x+1)}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}}=2\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Khi $x=1$ thì $t=\sqrt{2}+1$, khi $x=2$ thì $t=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

$$I=\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}=2\int\limits_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}=-2\frac{1}{t}\Bigg|_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=-2\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2$$
$$=\sqrt{32}-\sqrt{12}-\sqrt{4}\Rightarrow a=32,\ b=12,\ c=4.$$

Vậy $P=a+b+c=48$.

**Câu 61:** Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn hệ thức $\begin{cases} f(1)+g(1)=4 \\ g(x)=-x.f'(x);\ f(x)=-x.g'(x) \end{cases}$. Tính $I=\int\limits_1^4 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$.

**A.** $8\ln 2$. **B.** $3\ln 2$. **C.** $6\ln 2$. **D.** $4\ln 2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $f(x)+g(x)=-x[f'(x)+g'(x)]\Rightarrow \int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int -x[f'(x)+g'(x)]\mathrm{d}x$.

$=-x[f(x)+g(x)]+\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x \Rightarrow -x[f(x)+g(x)]=C \Rightarrow f(x)+g(x)=-\frac{C}{x}$

Vì $f(1)+g(1)=-C\Rightarrow C=-4$

$\Rightarrow I=\int\limits_1^4 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int\limits_1^4 \frac{4}{x}\mathrm{d}x=8\ln 2$.

**Câu 62: [2D3-3] [THPT Chuyên Trần Phú, Hải Phòng, lần 2, 2018]** Biết $\int\limits_1^2 \frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\mathrm{d}x=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{35}$, với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Q}$. Tính $P=a+2b+c-7$.

**A.** $-\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{86}{27}$. **C.** $-2$. **D.** $\frac{67}{27}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

$$I=\int_1^2 \frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{x\left(3x-\sqrt{9x^2-1}\right)}{\left(3x+\sqrt{9x^2-1}\right)\left(3x-\sqrt{9x^2-1}\right)}\mathrm{d}x=\int_1^2 \left(3x^2-x\sqrt{9x^2-1}\right)\mathrm{d}x$$

$$\int_1^2 3x^2\mathrm{d}x-\int_1^2 x\sqrt{9x^2-1}\mathrm{d}x=7-\frac{1}{18}.\frac{2}{3}.\sqrt{\left(9x^2-1\right)^3}\Big|_1^2=7-\frac{1}{27}\left(35\sqrt{35}-16\sqrt{2}\right)=7+\frac{16}{27}\sqrt{2}-\frac{35}{27}\sqrt{35}.$$

Do đó $a=7,\ b=\frac{16}{27},\ c=-\frac{35}{27}\Rightarrow a+2b+c-7=-\frac{1}{9}$.

**Câu 63:** Biết $\int_1^2 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$, với $a,\ b,\ c\in\mathbb{N}^*$. Tính $P=a+b+c$.

**A.** $24$. **B.** $12$. **C.** $18$. **D.** $46$.

**Câu 64:** Cho biết $\int_1^2 \ln\left(9-x^2\right)dx=a\ln 5+b\ln 2+c$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=|a|+|b|+|c|$.

**A.** $S=34$. **B.** $S=13$. **C.** $S=18$. **D.** $S=26$.

**Câu 65:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=12$. **B.** $I=112$. **C.** $I=28$. **D.** $I=144$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $u=x$, $\mathrm{d}v=f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x$, $v=2f\left(\frac{x}{2}\right)$

Suy ra $I=\left(2xf\left(\frac{x}{2}\right)\right)\Big|_0^4-2\int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=8f(2)-4\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=112$.

**Câu 66:** Cho $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=a\sqrt{b}-\frac{8}{3}\sqrt{a}+\frac{2}{3}$, $a,b\in\mathrm{N}^*$. Tính $a+2b$

**A**. $a+2b=7$. **B.** $a+2b=8$. **C.** $a+2b=1$. **D.** $a+2b=5$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Theo giả thiết ta có:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=\int_0^1\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)dx=\frac{2}{3}\left((x+2)^{\frac{3}{2}}-(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1=2\sqrt{3}-\frac{8}{3}\sqrt{2}+\frac{2}{3}.$$

Do đó $a=2;b=3$ nên $a+2b=8$.

**Câu 67:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)>0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn:

$g\left(x\right)=1+2018\int\limits_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t, g\left(x\right)=f^2\left(x\right)$. Tính $\int\limits_0^1\sqrt{g\left(x\right)}\mathrm{d}x$.

**A.** $\frac{1011}{2}$. **B.** $\frac{1009}{2}$. **C.** $\frac{2019}{2}$. **D.** 505.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có $g\left(0\right)=1$

$$g\left(x\right)=1+2018\int\limits_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow g'\left(x\right)=2018f\left(x\right)=2018\sqrt{g\left(x\right)}\Rightarrow\frac{g'\left(x\right)}{\sqrt{g\left(x\right)}}=2018\Rightarrow\int\limits_0^t\frac{g'\left(x\right)}{\sqrt{g\left(x\right)}}dx=2018\int\limits_0^t\mathrm{d}x.$$

$$\Rightarrow 2\left(\sqrt{g\left(t\right)}-1\right)=2018t\Rightarrow\sqrt{g\left(t\right)}=1009t+1\Rightarrow\int\limits_0^1\sqrt{g\left(t\right)}dt=\frac{1011}{2}.$$

**Câu 68:** Cho hai hàm $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ có đạo hàm trên đoạn $\left[1;4\right]$ và thỏa mãn hệ thức hệ thức sau với mọi $x\in\left[1;4\right]$

$$\begin{cases} f\left(1\right)=2g\left(1\right)=2 \\ f'\left(x\right)=\frac{1}{x\sqrt{x}}.\frac{1}{g(x)}; g'\left(x\right)=-\frac{2}{x\sqrt{x}}.\frac{1}{f(x)}\end{cases}$$. Tính $I=\int\limits_1^4\left[f(x).g(x)\right]dx$.

**A.** $4\ln 2$. **B.** $4$. **C.** $2\ln 2$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Từ giả thiết ta có $f'(x).g(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}$ và $g'(x).f(x)=-\frac{2}{x\sqrt{x}}$, suy ra

$f'(x).g(x)+g'(x).f(x)=-\frac{1}{x\sqrt{x}}$, hay $\left[f(x).g(x)\right]'=-\frac{1}{x\sqrt{x}}$.

Do đó $f\left(x\right).g\left(x\right)=-\int\frac{1}{x\sqrt{x}}dx=\frac{2}{\sqrt{x}}+C$. Lại có $f\left(1\right).g\left(1\right)=2.1=2$ nên $C=0$.

$$\Rightarrow I=\int\limits_1^4\left[f(x).g(x)\right]dx=\int\limits_1^4\frac{2}{\sqrt{x}}dx=4.$$

**Câu 69: [Chuyên Ngoại Ngữ - Hà Nội - 2018]** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=|1+x|-|1-x|$ trên tập $\mathbb{R}$ và thảo mãn $F(1)=3$. Tính tổng $T=F(0)+F(2)+F(-3)$.

**A.** $8$. **B.** $12$. **C.** $14$. **D.** $10$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $f(x)=\begin{cases}2 & \text{khi } x\geq 1\\ 2x & \text{khi } -1<x<1\\ -2 & \text{khi } x\leq -1\end{cases}$.

Hàm $f(x)$ có nguyên hàm là $F(x)=\begin{cases}2x+m & \text{khi } x\geq 1\\ x^2+n & \text{khi } -1<x<1\\ -2x+p & \text{khi } x\leq -1\end{cases}$.

Vì $F(1)=3$ nên $m=1$.

Hàm $F(x)$ liên tục tại $x=1$ nên suy ra $n=2$.

Hàm $F(x)$ liên tục tại $x=-1$ nên suy ra $p=1$.

Vậy ta có $T=F(0)+F(2)+F(-3)=2+5+7=14$.

**Câu 70:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$, $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$. Tính giá trị của biểu thức $P=f(-2)+f(0)+f(4)$.

**A.** $P=\ln\dfrac{9}{5}+1$. **B.** $P=1+\ln\dfrac{6}{5}$. **C.** $P=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$. **D.** $P=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{6}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có hàm số xác định trên các khoảng $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

Khi đó $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_1 & (x<-1)\\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_2 & (-1<x<1)\\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_3 & (x>1)\end{cases}$.

Dễ thấy $\{-3\}\in(-\infty;-1)$; $\left\{\dfrac{-1}{2};0;\dfrac{1}{2}\right\}\in(-1;1)$; $\{3;4\}\in(1;+\infty)$.

Nên $f(-3)=\frac{1}{2}\ln 2+C_1$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln 3+C_2$; $f(0)=C_2$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-1}{2}\ln 3+C_2$;

$f(3)=\frac{-1}{2}\ln 2+C_3$ và $f(4)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}+C_3$.

Ta có $P=f(0)+f(4)=C_2+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}+C_3=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}+C_2+C_3$.

Mặt khác $f\left(\frac{-1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2\Rightarrow\frac{1}{2}\ln 3+C_2+\frac{-1}{2}\ln 3+C_2=2\Leftrightarrow C_2=1$.

Và $f(-3)+f(3)=0\Rightarrow\frac{1}{2}\ln 2+C_1+\frac{-1}{2}\ln 2+C_3=0\Leftrightarrow C_1+C_3=0$.

$P=f(-2)+f(0)+f(4)=\frac{1}{2}\ln 3+C_1+C_2+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}+C_3=1+\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$.

**Câu 71:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ và $\int\limits_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t=x.\sin(\pi x)$. Tính $f(4)$

**A.** $f(\pi)=\frac{\pi-1}{4}$. **B.** $f(\pi)=\frac{\pi}{2}$. **C.** $f(\pi)=\frac{\pi}{4}$. **D.** $f(\pi)=\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có $\int f(t)\mathrm{d}t=F(t)\Rightarrow F'(t)=f(t)$

$\int\limits_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t=x.\sin(\pi x)\Leftrightarrow F(t)\Big|_0^{x^2}=x.\sin(\pi x)$

$\Leftrightarrow F(x^2)-F(0)=x.\sin(\pi x)\Rightarrow F'(x^2).2x=\sin(\pi x)+\pi x.\cos(\pi x)$

$\Leftrightarrow f(x^2).2x=\sin(\pi x)+\pi x.\cos(\pi x)$

$\Rightarrow f(4)=\frac{\pi}{2}$

**Câu 72: [HSG,Bắc Giang, 2018]** Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}\mathrm{d}x$ với $a\cdot b\neq 0$ và $a^2\neq b^2$.

**A.** $I=\frac{1}{|a|+|b|}$. **B.** $I=\frac{2}{|a|+|b|}$. **C.** $I=\frac{2}{a+b}$. **D.** $\frac{ab}{|a|+|b|}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Do $ab\neq 0\Rightarrow\begin{cases}a\neq 0\\ b\neq 0\end{cases}$ và $a^2\neq b^2\Rightarrow\begin{cases}a\neq b\\ a\neq -b\end{cases}$.

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{1}{2}\sin 2x}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2+\left(a^2-b^2\right)\cos 2x}}\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{a^2+b^2+\left(a^2-b^2\right)\cos 2x}}\mathrm{d}x$ .

Đặt $t=\sqrt{a^2+b^2+\left(a^2-b^2\right)\cos 2x}\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=-2\left(a^2-b^2\right)\sin 2x\mathrm{d}x\Rightarrow\dfrac{-t\mathrm{d}t}{a^2-b^2}=\sin 2x\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}|a|$, $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=\sqrt{2b^2}=\sqrt{2}|b|$.

Khi đó $I=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{a^2+b^2+\left(a^2-b^2\right)\cos 2x}}\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\int_{\sqrt{2}|a|}^{\sqrt{2}|b|}\dfrac{\frac{-t}{a^2-b^2}}{t}\mathrm{d}t=\dfrac{-\sqrt{2}}{2\left(a^2-b^2\right)}\int_{\sqrt{2}|a|}^{\sqrt{2}|b|}\mathrm{d}t$

$=\dfrac{-\sqrt{2}}{2\left(a^2-b^2\right)}\left(\sqrt{2}|b|-\sqrt{2}|a|\right)=\dfrac{1}{|a|+|b|}$ .

**Câu 73:** Tính tích phân $I=\int_0^{2\pi}\sin\left(\sin x+nx\right)\mathrm{d}x$ với $n\in\mathbb{R}$ .

**A.** $I=0$ . **B.** $I=2$ . **C.** $I=1$ . **D.** $\dfrac{1}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn A.**

Xét tích phân $\int_a^b f\left(a+b-x\right)\mathrm{d}x$

Đặt $t=a+b-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$

Đổi cận $x=a\Rightarrow t=b$, $x=b\Rightarrow t=a$. Khi đó $\int_a^b f\left(a+b-x\right)\mathrm{d}x=\int_a^b f\left(t\right)dt=\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$

Ta có $I=\int_0^{2\pi}\sin\left(\sin x+nx\right)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sin\left(\sin\left(2\pi-x\right)+n\left(2\pi-x\right)\right)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sin\left(-\left(\sin x+nx\right)\right)\mathrm{d}x$

$=-\int_0^{2\pi}\sin\left(\sin x+nx\right)\mathrm{d}x=-I$ .

Do $I=-I\Rightarrow I=0$

**Câu 74:** Tính tích phân $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x$ với $m$, $n\in\mathbb{N}$ và $m^2\neq n^2$ .

**A.** $I=0$ . **B.** $I=2$ . **C.** $I=1$ . **D.** $\frac{1}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left[\cos((m-n)x)+\cos((m+n)x)\right]\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m-n}\sin((m-n)x)+\frac{1}{m+n}\sin((m+n)x)\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0$

Do $\sin((m-n)\pi)=\sin((m+n)\pi)=\sin((m-n)(-\pi))=\sin((m+n)(-\pi))=0$

**Câu 75:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f'(x)\geq x+\frac{1}{x},\forall x\in\mathbb{R}^+$ và $f(1)=1.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(2).$

**A.** 3. **B.** 2. **C.** $\frac{5}{2}+\ln 2.$ **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Theo giả thiết $f'(x)\geq x+\frac{1}{x},\forall x\in\mathbb{R}^+$ nên lấy tích phân hai vế với cận từ $1$ đến $2$ ta được:

$$\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x\geq\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}+\ln 2.$$

Mà $\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\big|_1^2=f(2)-f(1)=f(2)-1$ nên $f(2)-1\geq\frac{3}{2}+\ln 2.$

Suy ra $f(2)\geq\frac{5}{2}+\ln 2.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $f'(x)=x+\frac{1}{x},x>0.$

Suy ra $f(x)=\frac{x^2}{2}+\ln x+C,$ mà $f(1)=1$ nên $C=\frac{1}{2}.$

Do đó $f(x)=\frac{x^2}{2}+\ln x+\frac{1}{2}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(2)=\frac{5}{2}+\ln 2$ khi $f(x)=\frac{x^2}{2}+\ln x+\frac{1}{2}$.

**Câu 76: [Trường THPT Quỳnh Lưu 1, tỉnh Nghệ An, lần 2, năm 2018 ]**

Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3)f^2(x)$ và $f(0)=\frac{-1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)+f(2018)=\frac{a}{b}$ với $\left(a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*\right)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\frac{a}{b}<-1$. **B.** $\frac{a}{b}>1$. **C.** $a+b=1010$. **D.** $b-a=3029$.

**Lời giải.**

**Chọn D**

Do $f(x)\neq 0$ nên ta chia cả hai vế của $f'(x)=(2x+3)f^2(x)$ cho $f^2(x)$ ta được

$\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3$. nguyên hàm hai vế ta được $\frac{-1}{f(x)}=x^2+3x+C\Rightarrow f(x)=\frac{-1}{x^2+3x+C}$.

Mà $f(0)=\frac{-1}{2}\Rightarrow C=2\Rightarrow f(x)=\frac{-1}{(x+1)(x+2)}=\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$.

Khi đó $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)+f(2018)=\frac{-1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{-1}{3}+\frac{1}{4}+....+\frac{-1}{2019}+\frac{1}{2020}$

$=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2020}=\frac{-1009}{2020}$. Vậy $a=-1009;b=2020$.

**Câu 77:** Cho hàm số $y=f(x)$ dương có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\sqrt{3}\right]$ biết rằng $f'(x)-f(x)\sqrt{x^2+1}=0$ và $f\left(\sqrt{3}\right)=e^3$. Tính $I=\int_0^{\sqrt{3}}\ln\left[f(x)\right]\mathrm{d}x$

**A.** $2\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt{3}-\frac{7}{3}$. **C.** $3\sqrt{3}+\frac{7}{3}$. **D.** $3\sqrt{3}-2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $f'(x)-\sqrt{x^2+1}f(x)=0\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\sqrt{x^2+1}$

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left[f(x)\right]\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x\\ v=x\end{cases}$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta được

$$I=\int_0^{\sqrt{3}}\ln\left[f(x)\right]dx=x\ln\left[f(x)\right]\Big|_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{xf'(x)}{f(x)}dx=x\ln\left[f(x)\right]\Big|_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}x\sqrt{x^2+1}\,dx$$

$$=x\ln\left[f(x)\right]\Big|_0^{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+1}\,d\left(x^2+1\right)$$

$$=x\ln\left[f(x)\right]\Big|_0^{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}\Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$=3\sqrt{3}-\frac{7}{3}$$

**Câu 78: [THPT QUỲNH LƯU 2, NGHỆ AN, lần 1, 2018]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)+2xf(x)=2x.e^{-x^2}$ và $f(0)=1$. Tính $f(1)$.

**A.** $e$. **B.** $\frac{1}{e}$. **C.** $\frac{2}{e}$. **D.** $-\frac{2}{e}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

$f'(x)+2xf(x)=2x.e^{-x^2}\Leftrightarrow e^{x^2}.f'(x)+2x.e^{x^2}.f(x)=2x\Leftrightarrow\left(e^{x^2}.f(x)\right)'=2x$.

Lấy tích phân cả hai vế ta được:

$$\int_0^1\left(e^{x^2}.f(x)\right)'dx=\int_0^1 2xdx\Leftrightarrow e^{x^2}.f(x)\Big|_0^1=x^2\Big|_0^1\Leftrightarrow e.f(1)-f(0)=1$$

$$\Leftrightarrow e.f(1)=2\Leftrightarrow f(1)=\frac{2}{e}.$$

**Câu 79:** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x)=x^4+x^2$. Biết $f(0)=2$ Tính $f^2(2)$.

**A.** $f^2(2)=\frac{313}{15}$. **B.** $f^2(2)=\frac{332}{15}$. **C.** $f^2(2)=\frac{324}{15}$. **D.** $f^2(2)=\frac{323}{15}$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có $\int_0^2\left(x^4+x^2\right)dx=\int_0^2 f'(x).f(x)dx=\int_0^2 f(x)d\left[f(x)\right]=\frac{1}{2}\left(f^2(2)-f^2(0)\right)$

Suy ra $f^2(2)=2\int_0^2\left(x^4+x^2\right)dx+f^2(0)=\frac{332}{15}$.

**Câu 80:** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x)=x.e^x$ Biết $f(1)=e$ Tính $f^2(2)$.

**A.** $f^2(2)=16.$ **B.** $f^2(2)=3e^2.$ **C.** $f^2(2)=4e^2.$ **D.** $f^2(2)=9.$

**Câu 81:** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x)=x.\sin x$ Biết $f(0)=\frac{\pi}{4}$. Tính $f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

**A.** $f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=4e^{\frac{\pi}{2}}.$ **B.** $f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=2e^{\frac{\pi}{2}}.$ **C.** $f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}.$ **D.** $f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=9e^{\frac{\pi}{2}}.$

**Câu 82: Chuyên Lào cai 2018)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$; $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính $\int_{-1}^1 f(|2x-1|)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{2}{3}$. **B.** $I=4$. **C.** $I=\frac{3}{2}$. **D.** $I=6$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $I=\int_{-1}^1 f(|2x-1|)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x-1)\mathrm{d}x$.

Tính $I_1=\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)\mathrm{d}x$

Đặt $t=1-2x \Rightarrow \mathrm{d}t=-2\mathrm{d}x$; Đổi cận: $x=-1 \Rightarrow t=3$; $x=\frac{1}{2} \Rightarrow t=0$.

$I_1=\int_3^0 f(t)\left(-\frac{1}{2}\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{2}\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=3$.

Tính $I_2=\int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x-1)\mathrm{d}x$

Đặt $t=2x-1 \Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$; Đổi cận: $x=\frac{1}{2} \Rightarrow t=0$; $x=1 \Rightarrow t=1$.

$I_1=\int_0^1 f(t)\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$.

Vậy $I=I_1+I_2=4$.

**Câu 83:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, có $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}, f(0)=1$. Biết rằng $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2-2x$. Tìm tất cả các giá trị của $m$ để phương trình $f(x)=m$ có $2$ nghiệm thực phân biệt.

**A.** $1<m<e$ **B.** $0<m<e$ **C.** $m>e$ **D.** $1<m\le e$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=2-2x\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int(2-2x)\,\mathrm{d}\,x\Leftrightarrow\ln|f(x)|=2x-x^2+c\Leftrightarrow\ln f(x)=2x-x^2+c$$

(do $f(x)>0$)

$f(0)=1\Rightarrow\ln(f(0))=\ln 1=C\Rightarrow C=0$.

$\Rightarrow\ln f(x)=2x-x^2\Rightarrow f(x)=\mathrm{e}^{2x-x^2}\Rightarrow f'(x)=(2-2x).\mathrm{e}^{2x-x^2}=0\Rightarrow x=1$

Ta có bảng biến thiên

| x | - ∞ | | 1 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | - | |
| y | 0 | ↗ | e | ↘ | 0 |

$\Rightarrow 0<m<\mathrm{e}$

**Câu 84:** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x}+2$, với $a$, $b$ là hai số hữu tỉ thỏa điều kiện $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=2-3\ln 2$. Tính $T=a+b$.

**A.** $T=-1$. **B.** $T=2$. **C.** $T=-2$. **D.** $T=0$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có: $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+2\right)\mathrm{d}x = \left(-\frac{a}{x}+b\ln|x|+2x\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} = -a+2-(-2a-b\ln 2+1)$

$=(a+1)+b\ln 2$, suy ra $(a+1)+b\ln 2 = 2-3\ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}$. Vậy $T=a+b=-2$.

**Câu 85: [SGD Quảng Nam - 2018]** Cho hàm số chẵn $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(2x)}{1+2^x}\mathrm{d}x=8$. Tính $\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $2$. **B.** $4$. **C.** $8$. **D.** $16$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Vì $f(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ nên ta có $f(-x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Đặt $I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(2x)}{1+2^x}\mathrm{d}x$. Ta có: $I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(2x)}{1+2^x}\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\frac{f(2x)}{1+2^x}\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\frac{f(2x)}{1+2^x}\mathrm{d}x$.

Xét $I_1=\int\limits_{-1}^{0}\frac{f(2x)}{1+2^x}\mathrm{d}x$.

Đặt $x=-t \Rightarrow I_1=\int\limits_{-1}^{0}\frac{f(2x)}{1+2^x}\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{0}\frac{f(-2t)}{1+2^{-t}}\mathrm{d}(-t)=\int\limits_{0}^{1}\frac{2^t f(2t)}{1+2^t}\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{1}\frac{2^x f(2x)}{1+2^x}\mathrm{d}x$.

Do đó ta có $I=\int\limits_{0}^{1} f(2x)\mathrm{d}x$.

Đặt $u=2x$. Ta có $I=\int\limits_{0}^{1} f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

Kết hợp với giả thiết ta được $\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x=16$.

Mở rộng: Làm tương tự ta có bài toán tổng quát:

Cho hàm số chẵn $y=f(x)$ liên tục trên $[-a;a]$. Với $k$ là một số thực khác $0$, $m$ là một số thực dương thì $\int\limits_{-a}^{a}\frac{f(kx)}{1+m^x}\mathrm{d}x=\frac{1}{k}\int\limits_{0}^{ka} f(x)\mathrm{d}x$.

**Câu 86: [SGD Quảng Nam - 2018]** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f(x)$ và $f'(x)$ đều nhận giá trị dương trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=2$, $\int_0^1\left[f'(x).[f(x)]^2+1\right]dx=2\int_0^1\sqrt{f'(x)}.f(x)dx$. Tính $\int_0^1[f(x)]^3dx$.

**A.** $\frac{15}{4}$. **B.** $\frac{15}{2}$. **C.** $\frac{17}{2}$. **D.** $\frac{19}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Vì $f(x)$ và $f'(x)$ đều nhận giá trị dương trên đoạn $[0;1]$ nên từ $\int_0^1\left[f'(x).[f(x)]^2+1\right]dx=2\int_0^1\sqrt{f'(x)}.f(x)dx$ suy ra $\int_0^1\left[\sqrt{f'(x)}.f(x)-1\right]^2dx=0$.

Mà $\left[\sqrt{f'(x)}.f(x)-1\right]^2\geq 0$ nên $\sqrt{f'(x)}.f(x)=1,\ \forall x\in[0;1]$ hay $f'(x).[f(x)]^2=1,\ \forall x\in[0;1]$.

Vậy $\int f'(x).[f(x)]^2dx=\int dx\Rightarrow\frac{[f(x)]^3}{3}=x+C$ (*)

Trong (*) thay $x=0$ được $C=\frac{8}{3}$, suy ra $[f(x)]^3=3x+8$.

Vậy $\int_0^1[f(x)]^3dx=\int_0^1(3x+8)dx=\frac{19}{2}$.

**Câu 87:** giá trị của tích phân $\int_0^{100}x(x-1)(x-2)...(x-100)dx$ bằng

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 100. **D.** Kết quả khác.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Đặt $x=100-t\Rightarrow dx=-dt$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=100;\quad x=100\Rightarrow t=0$

Khi đó $I=\int_{100}^{0}(100-t)(99-t)...(-t)(-dt)=\int_0^{100}(100-t)(99-t)...(-t)dt$

$$=\int_0^{100}(t-100)(t-99)...t.dt$$

$$=-\int_{0}^{100}(x-100)(x-99)...x.dt=-I$$

Suy ra $I+I=0\Leftrightarrow I=0.$

**Câu 88:** Tính tích phân $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}\mathrm{d}x$ với $a\cdot b\neq 0$ và $a^2\neq b^2$.

**A.** $I=\dfrac{1}{|a|+|b|}$. **B.** $I=\dfrac{2}{|a|+|b|}$. **C.** $I=\dfrac{2}{a+b}$. **D.** $\dfrac{ab}{|a|+|b|}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Do $ab\neq 0\Rightarrow\begin{cases}a\neq 0\\ b\neq 0\end{cases}$ và $a^2\neq b^2\Rightarrow\begin{cases}a\neq b\\ a\neq -b\end{cases}$.

Ta có $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{2}\sin 2x}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2+(a^2-b^2)\cos 2x}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{a^2+b^2+(a^2-b^2)\cos 2x}}\mathrm{d}x$ .

Đặt $t=\sqrt{a^2+b^2+(a^2-b^2)\cos 2x}\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=-2(a^2-b^2)\sin 2x\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{-t\mathrm{d}t}{a^2-b^2}=\sin 2x\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}|a|$, $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\sqrt{2b^2}=\sqrt{2}|b|$.

Khi đó $I=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{a^2+b^2+(a^2-b^2)\cos 2x}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\sqrt{2}|a|}^{\sqrt{2}|b|}\frac{\frac{-t}{a^2-b^2}}{t}\mathrm{d}t=\frac{-\sqrt{2}}{2(a^2-b^2)}\int_{\sqrt{2}|a|}^{\sqrt{2}|b|}\mathrm{d}t$

$$=\frac{-\sqrt{2}}{2(a^2-b^2)}\left(\sqrt{2}|b|-\sqrt{2}|a|\right)=\frac{1}{|a|+|b|}.$$

**Câu 89:** Tính tích phân $I=\int_{0}^{2\pi}\sin(\sin x+nx)\mathrm{d}x$ với $n\in\mathbb{R}$ .

**A.** $I=0$ . **B.** $I=2$ . **C.** $I=1$ . **D.** $\dfrac{1}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn A.**

Xét tích phân $\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$

Đặt $t=a+b-x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$

Đổi cận $x=a \Rightarrow t=b$, $x=b \Rightarrow t=a$. Khi đó $\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Ta có $I=\int_0^{2\pi}\sin(\sin x+nx)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sin(\sin(2\pi-x)+n(2\pi-x))\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sin(-(\sin x+nx))\mathrm{d}x$

$=-\int_0^{2\pi}\sin(\sin x+nx)\mathrm{d}x=-I$.

Do $I=-I \Rightarrow I=0$

**Câu 90:** Tính tích phân $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x$ với $m$, $n\in\mathbb{N}$ và $m^2\neq n^2$ .

**A.** $I=0$ .  **B.** $I=2$ .  **C.** $I=1$ .  **D.** $\frac{1}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left[\cos((m-n)x)+\cos((m+n)x)\right]\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m-n}\sin((m-n)x)+\frac{1}{m+n}\sin((m+n)x)\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0$

Do $\sin((m-n)\pi)=\sin((m+n)\pi)=\sin((m-n)(-\pi))=\sin((m+n)(-\pi))=0$

**Câu 91: [Nguyễn Khuyến, Bình Dương, 18/3,2018]** Biết $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^4 x}dx=\frac{a\sqrt{b}}{c}$, trong đó $a,b,c$ là các số tự nhiên đôi một nguyên tố cùng nhau. Khi đó giá trị của $T=2a^2-3b^2+4c^2$ bằng bao nhiêu?

**A.** $T=-15$.  **B.** $T=14$.  **C.** $T=-13$.  **D.** $T=17$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^4 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}.\frac{dx}{\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(1+\tan^2 x\right).\frac{dx}{\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(1+\tan^2 x\right).d\left(\tan x\right)$

$=\left(\tan x+\frac{\tan^3 x}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{3}\Rightarrow a=2,b=3,c=1$

Vậy $T=2a^2-3b^2+4c^2=2.2^2-3.3^2+4.1^2=-15$.

**Câu 92:** Biết $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\frac{a\sqrt{b}-c}{d}$, trong đó $a,b$ và $c,d$ là các cặp số tự nhiên nguyên tố cùng nhau. Khi đó giá trị của $T=ab+cd$ bằng bao nhiêu?

**A.** $T=6$. **B.** $T=246$. **C.** $T=-13$. **D.** $T=17$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 x\frac{1}{\cos^4 x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 x.\frac{1}{\cos^2 x}.\frac{1}{\cos^2 x}dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 x.\left(1+\tan^2 x\right).d\left(\tan x\right)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\tan^2 x+\tan^4 x\right).d\left(\tan x\right)=\left(\frac{\tan^5 x}{5}+\frac{\tan^3 x}{3}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{42\sqrt{3}-8}{15}$

$\Rightarrow a=42,b=3,c=8,d=15\Rightarrow T=246$

**Câu 93:** Biết $\int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}}\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}dx=\frac{a\ln b}{c}$, trong đó $a,b,c$ là các số tự nhiên đôi một nguyên tố cùng nhau.

Khi đó giá trị của $T=4a^3+3b^2-2c$ bằng bao nhiêu?

**A.** $T=5$. **B.** $T=29$. **C.** $T=7$. **D.** $T=17$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có $I=\int\limits_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}}\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}dx=\int\limits_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}}\frac{1}{2\sin\frac{x}{4}.\cos\frac{x}{4}}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}}\frac{1}{\tan\frac{x}{4}.\cos^2\frac{x}{4}}dx$

$=2\int\limits_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}}\frac{1}{\tan\frac{x}{4}}d\left(\tan\frac{x}{4}\right)=2\ln\left(\tan\frac{x}{4}\right)\Big|_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}}=\ln 3$

$\Rightarrow a=1,b=3,c=1\Rightarrow T=29$

**Câu 94:** Nếu $\int\limits_a^x\frac{f(t)dt}{t^2}+6=2\sqrt{x}$ với $x>0$ thì hệ số $a$ bằng

**A.** $9$. **B.** $19$. **C.** $5$. **D.** $6$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Gọi $F(t)$ là một nguyên hàm của $\frac{f(t)}{t^2}$, suy ra $F'(t)=\frac{f(t)}{t^2}$.

Ta có $\int\limits_a^x\frac{f(t)dt}{t^2}+6=2\sqrt{x}\Rightarrow F(t)|_a^x+6=2\sqrt{x}\Rightarrow F(x)-F(a)+6=2\sqrt{x}$

$\Rightarrow F'(x)=2.\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow\frac{f(x)}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow f(x)=x\sqrt{x}$

$\Rightarrow\int\limits_a^x\frac{f(t)dt}{t^2}=\int\limits_a^x\frac{t\sqrt{t}}{t^2}dt=\int\limits_a^x\frac{1}{\sqrt{t}}dt=2\sqrt{t}\,|_a^x=2\sqrt{x}-2\sqrt{a}=2\sqrt{x}-6$ (gt)

Vậy $\sqrt{a}=3\Rightarrow a=9$.

**Câu 95:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{1}{11}$ và $\int\limits_0^1x^4f(x)dx=-\frac{1}{55}$. Tích phân $\int\limits_0^1f(x)dx$ bằng?

**A.** $\frac{-1}{7}$. **B.** $\frac{1}{7}$. **C.** $\frac{-1}{55}$. **D.** $\frac{1}{11}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta xét $I=\int\limits_0^1x^4f(x)dx$.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^4 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \dfrac{x^5}{5} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{x^5}{5} f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{5}\int_0^1 x^5 f'(x)dx \Rightarrow -\frac{1}{55} = -\frac{1}{5}\int_0^1 x^5 f'(x)dx \Rightarrow \int_0^1 x^5 f'(x)dx = \frac{1}{11}$$

Mà $\int_0^1 x^{10} dx = \dfrac{1}{11}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(x^{10} - 2x^5 f'(x) + \left(f'(x)\right)^2\right)dx = 0 \Rightarrow f'(x) = x^5 \Rightarrow f(x) = \frac{x^6}{6} + C$$

Vì $f(1) = 0$ nên $f(x) = \dfrac{x^6 - 1}{6}$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x^6 - 1}{6}dx = \frac{-1}{7}.$$

**Câu 96:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f(0) = 0$; $f'(x) \le 10$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tìm GTLN mà $f(3)$ có thể đạt được?

**A.** 30. **B.** 10. **C.** 60. **D.** 20.

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì $10 - f'(x) \ge 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên: $\int_0^3 \left[10 - f'(x)\right]dx \ge 0 \Leftrightarrow \left[10x - f(x)\right]\Big|_0^3 \ge 0$

$\Leftrightarrow \left[10.3 - f(3)\right] - \left[10.0 - f(0)\right] \ge 0 \Rightarrow f(3) \le 30$

Vậy GTLN mà $f(3)$ có thể đạt được là 30.

**Câu 97:** Cho biểu thức $S = \ln\left(1 + \int_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 - \sin 2x)e^{2\cot x}dx\right)$, với số thực $m \ne 0$. Khẳng định đúng là.

**A.** $S = 5$.

**B.** $S = 2\cot\left(\dfrac{\pi}{4+m^2}\right) + 2\ln\left(\sin\dfrac{\pi}{4+m^2}\right)$.

**C.** $S = 9$.

**D.** $S = \tan\left(\dfrac{\pi}{4+m^2}\right) + \ln\left(\dfrac{\pi}{4+m^2}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn. B.**

Ta có $\int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}(2-\sin 2x)e^{2\cot x}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}2e^{2\cot x}dx-\int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xe^{2\cot x}dx=I-J$ .

Đặt $\begin{cases}u=e^{2\cot x}\\ dv=\sin 2xdx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}du=-\dfrac{2}{\sin^2 x}.e^{2\cot x}dx\\ v=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}=\sin^2 x\end{cases}$

$J=\sin^2 x.e^{2\cot x}\Big|_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}2e^{2\cot x}dx=1-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4+m^2}\right).e^{2\cot\frac{\pi}{4+m^2}}-I$ .

Vậy $S=\ln\left(\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4+m^2}\right)e^{2\cot\frac{\pi}{4+m^2}}\right)=2\cot\left(\dfrac{\pi}{4+m^2}\right)+2\ln\left(\sin\dfrac{\pi}{4+m^2}\right)$.

**Cách 2:**

Thay $m=1$ ta có $S\approx 1,689976611$, kiểm tra chỉ có đáp án $B$ thỏa mãn

**Câu 98: [Hàn Thuyên,tỉnh Bắc Ninh,lần 3,năm 2018]** Cho hàm số $y=f(x)$, liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $\int\limits_0^1(x+1)f'(x)dx=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)dx$ .

**A.** $I=-12$. **B.** $I=8$. **C.** $I=12$. **D.** $I=-8$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Đặt $\begin{cases}u=x+1\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=f(x)\end{cases}$.

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần và giả thiết bài toán, ta được:

$10=\int\limits_0^1(x+1)f'(x)dx=(x+1)f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)dx=\left[2f(1)-f(0)\right]-I=2-I$

$\Rightarrow I=2-10=-8$.

**Câu 99:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int_0^4 xf'\left(\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=12$. **B.** $I=112$. **C.** $I=28$. **D.** $I=144$.

**Lời giải**

**Chọn B**

*) Đặt $t=\frac{x}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=2t\\dx=2dt\end{cases}$; với $x=0\Rightarrow t=0; x=4\Rightarrow t=2$.

*) $I=\int_0^2 2tf'(t)2\mathrm{dt}=4\int_0^2 tdf(t)=4tf(t)|_0^2-4\int_0^2 f(t)\mathrm{dt}$

$=4.2.f(2)-4.\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4.2.16-4.4=112$.

**Câu 100:** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, $F(x)$ và $f(x)$ là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\int_{-1}^2 F(x+1)dx=1; F(3)=3$. Tính $I=\int_0^3 xf(x)dx$

**A.** $I=8$. **B.** $I=9$. **C.** $I=10$. **D.** $I=11$.

**Lời giải**

**Chọn A**

*) Ta có : $1=\int_{-1}^2 F(x+1)dx=\int_{-1}^2 F(x+1)d(x+1)=\int_0^3 F(t)dt\Rightarrow\int_0^3 F(x)dx=1$.

*) $I=\int_0^3 xf(x)dx=\int_0^3 xdF(x)=xF(x)|_0^3-\int_0^3 F(x)dx=3F(3)-1=8$.

**Câu 101:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1)-2f(0)=2, \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=5$. Tính $I=\int_0^3 (6-x)f'\left(\frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=61$. **B.** $I=63$. **C.** $I=65$. **D.** $I=67$.

**Lời giải**

**Chọn B**

*) Đặt $t=\frac{x}{3}\Rightarrow\begin{cases}x=3t\\dx=3dt\end{cases}$; với $x=0\Rightarrow t=0; x=3\Rightarrow t=1$.

*) $I=\int_0^1 (6-3t).f'(t).3dt=9\int_0^1 (2-t)df(t)=9\left[(2-t)f(t)\right]|_0^1-9\int_0^1 f(t)d(2-t)$

$$=9\left[f(1)-2f(0)\right]+9\int_0^1 f(t)\,dt=9.2+9.5=63.$$

.

**Câu 102:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x)+2018f(x)=x\sin x$. Tính

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx?$$

**A.** $\frac{1}{1009}$. **B.** $\frac{2}{2019}$. **C.** $\frac{1}{2019}$. **D.** $\frac{1}{2018}$.

**Lời giải.**

**Chọn B**

Theo giả thiết $f(-x)+2018f(x)=x\sin x.\Rightarrow f(x)+2018f(-x)=x\sin x.$

suy ra $\left(2018^2-1\right)f(x)=2017x\sin x\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2019}x.\sin x$.

Do đó $I=\frac{1}{2019}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x.\sin x.dx=-\frac{1}{2019}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x.d(\cos x)$

$$=-\frac{1}{2019}\left(x\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.dx\right)=\frac{1}{2019}\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{2019}.$$

**Câu 103:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{3}{x+1}$; $f(0)=1$ và $f(1)+f(-2)=2$. Giá trị của $f(-3)$ bằng

**A.** $1+2\ln 2$. **B.** $1-\ln 2$. **C.** 1. **D.** $2+\ln 2$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{3}{x+1}\mathrm{d}x=3\ln|x+1|+C$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}3\ln(x+1)+C_1 & khi\ \ x\ge -1\\ 3\ln(-x-1)+C_2 & khi\ \ x<-1\end{cases}$$

Theo giả thiết:

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)+f(-2)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ 3\ln 2+C_1+C_2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=1-3\ln 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} 3\ln(x+1)+1 \text{ khi } x\ge -1 \\ 3\ln(-x-1)+1-3\ln 2 \text{ khi } x<-1 \end{cases}$$

Vậy $f(-3)=3\ln 2+1-3\ln 2=1$.

**Câu 104:** Biết $\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{1-x\tan x}{x^2\cos x+x}\mathrm{d}x=\ln\frac{\pi-a}{\pi-b}$, $(a,b\in\mathbb{Z})$. Tính $P=a+b$.

**A.** $P=2$. **B.** $P=-4$. **C.** $P=4$. **D.** $P=-2$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có: $\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{1-x\tan x}{x^2\cos x+x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{\cos x-x\sin x}{x\cos x(x\cos x+1)}\mathrm{d}x$

Đặt $t=x\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=(\cos x-x\sin x)\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow t=-\frac{\pi}{3}$; $x=\pi\Rightarrow t=-\pi$

Do đó: $\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{1-x\tan x}{x^2\cos x+x}dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{-\pi}\frac{dt}{t(t+1)}=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{-\pi}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln|t|\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{-\pi}-\ln|t+1|\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{-\pi}$

$=\ln\pi-\ln\frac{\pi}{3}-\ln(\pi-1)+\ln\left(\frac{\pi}{3}-1\right)=\ln\frac{\pi-3}{\pi-1}\Rightarrow a=3;\ b=1$.

Vậy $P=4$.

**Câu 105:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0)=-1$ và $\left[f'(x)\right]^2=f''(x)$. Đặt $T=f(1)-f(0)$, hãy chọn khẳng định đúng?

**A.** $-2\le T<-1$. **B.** $-1\le T<0$. **C.** $0\le T<1$. **D.** $1\le T<2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ giả thiết ta có $\int \frac{f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}\text{dx}=\int 1\text{dx} \Leftrightarrow \int \frac{d\left[f'(x)\right]}{\left[f'(x)\right]^2}\text{dx}=\int 1\text{dx} \Leftrightarrow \frac{-1}{f'(x)}=x+c$

Mà $f'(0)=-1$ nên $\begin{cases} c=-1 \\ f'(x)=-\frac{1}{x+1} \end{cases} \Rightarrow T=\int_0^1 -\frac{1}{x+1}=-\ln 2$

**Câu 106:** Biết rằng $\int_2^3 \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x-1}}dx=\frac{a-4\sqrt{b}}{c}$ với $a,b,c$ là các số nguyên dương. Tính $T=a+b+c$.

**A.** $T=31$. **B.** $T=29$. **C.** $T=33$. **D.** $T=27$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

$$\int_2^3 \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x-1}}dx=\int_2^3 \frac{x^2-\sqrt{x-1}^2}{x+\sqrt{x-1}}dx=\int_2^3\left(x-\sqrt{x-1}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_2^3$$

$=\frac{19-4\sqrt{8}}{6}$. Vậy $a+b+c=19+8+6=33$.

**Câu 107:** Cho hàm số *f(x)* liên tục trên $[0;3]$ và $\int_0^1 f(x)dx=2$; $\int_0^3 f(x)dx=8$. Giá trị của tích phân $\int_{-1}^1 f(|2x-1|)dx$ là:

**A.** 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có: $|2x-1|=\begin{cases} -2x+1, \forall x\le \frac{1}{2} \\ 2x-1, \forall x\ge \frac{1}{2} \end{cases}$ nên

$$\int_{-1}^1 f(|2x-1|)dx=\int_{-1}^{0,5} f(-2x+1)dx+\int_{0,5}^1 f(2x-1)dx=E+F$$

$E=\int_{-1}^{0,5} f(-2x+1)\,\text{dx}=\frac{1}{2}\int_0^3 f(t)dt$ ta đổi biến $t=-2x+1$,

$F=\frac{1}{2}\int_{0,5}^1 f(2x-1)dx=\int_0^1 f(t)dt$, ta đổi biến $t=2x-1$, Vậy $\int_{-1}^{1} f(|2x-1|)dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{3} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(x)dx = 1+4=5$

**Câu 108 (SGD VĨNH PHÚC)** Gọi $S(t)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

$y=\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}$, $y=0$, $x=0$, $x=t\ (t>0)$. Tìm $\lim\limits_{t\to\infty} S(t)$.

**A.** $-\ln 2-\frac{1}{2}$. **B.** $\ln 2-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}-\ln 2$. **D.** $\ln 2+\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Vì trên $[0;t]$, $y=\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}>0$ nên ta có diện tích hình phẳng

$$S(t)=\int_0^t \frac{1}{(x+1)(x+2)^2}\mathrm{d}x=\int_0^t\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x+3}{(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^t\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\ln\frac{x+1}{x+2}+\frac{1}{x+2}\right)\Bigg|_0^t=\ln\frac{t+1}{t+2}+\frac{1}{t+2}+\ln 2-\frac{1}{2}.$$

Vì $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{t+1}{t+2}\right)=1 \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty}\ln\left(\frac{t+1}{t+2}\right)=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t+2}=0$

Nên $\lim\limits_{t\to\infty}S(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(\ln\frac{t+1}{t+2}+\frac{1}{t+2}+\ln 2-\frac{1}{2}\right)=\ln 2-\frac{1}{2}$.

**Câu 109:** Cho hàm số $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=4$, trong đó hàm số $y=f(x)$ là hàm số chẵn trên $[-1;1]$. Tính

$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x$.

**A.** $2$. **B.** $16$. **C.** $8$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

**Cách 1.**

Đặt $t=-x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=-1\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=-1$.

Ta được: $I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+2^x}f(x)\mathrm{d}x=-\int_{1}^{-1}\frac{1}{1+2^{-t}}f(-t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\frac{2^t}{1+2^t}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\frac{2^x}{1+2^x}f(x)\mathrm{d}x$.

Do đó: $2I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{1+2^x}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}\frac{2^x}{1+2^x}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=4\Rightarrow I=2$.

**Cách 2.**

Chọn $h(x)=x^2$ là hàm số chẵn. Ta có: $\int\limits_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$. Do đó: $f(x)=\frac{4}{\frac{2}{3}}h(x)=6x^2$.

Khi đó: $\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\frac{6x^2}{2^x+1}\mathrm{d}x=2$.

**Lời bình:** Với cách làm này, chỉ cần học sinh nắm rõ nguyên tắc tìm một hàm số đại diện cho lớp hàm số thỏa mãn giả thiết bài toán là có thể dễ dàng tìm được kết quả bài toán bằng máy tính hoặc bằng phương pháp cơ bản với hàm số $y=f(x)$ khá đơn giản. Đối với bài toán này ta có thể chọn hàm số $h(x)=1$ cho đơn giản.

**Câu 110:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_3^8(x+3)f'(x)\mathrm{d}x=25$ và $33f(8)-18f(3)=83$.

Giá trị $\int_3^8 f(x)\mathrm{d}x$ là:

**A.** $I=83$. **B.** $I=38$. **C.** $I=\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có $\int_3^8(x+3)f'(x)\mathrm{d}x=25$.

Đặt $\begin{cases}u=x+3\\ \mathrm{d}v=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}\Rightarrow A=(x+3)f(x)\Big|_3^8-\int_3^8 f(x)\mathrm{d}x$

$=11f(8)-6f(3)-\int_3^8 f(x)\mathrm{d}x$

Ta có $33.f(8)-18f(3)=83\Rightarrow 11f(8)-6f(3)=\frac{83}{3}$.

Suy ra $A=\frac{83}{3}-\int_3^8 f(x)\mathrm{d}x$. Mà $A=25\Rightarrow\int_3^8 f(x)\mathrm{d}x=\frac{83}{3}-25=\frac{8}{3}$.

**Câu 111:** Giá trị $I=\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}}^{\frac{9}{\sqrt[3]{4}}}x^2\sin(\pi x^3)e^{\cos(\pi x^3)}\mathrm{d}x$ gần bằng số nào nhất trong các số sau đây:

**A.** $0,046$. **B.** $0,036$. **C.** $0,037$ **D.** $0,038$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có:

$$I=\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}}^{\frac{9}{\sqrt[3]{4}}} x^2\sin\left(\pi x^3\right)e^{\cos\left(\pi x^3\right)}dx=\frac{1}{3\pi}\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}}^{\frac{9}{\sqrt[3]{4}}} e^{\cos\left(\pi x^3\right)}d\sin\left(\pi x^3\right)=\frac{1}{3\pi}e^{\cos\left(\pi x^3\right)}\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}}^{\frac{9}{\sqrt[3]{4}}}=\frac{1}{3\pi}\left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$
$$\approx -0,371$$

**Câu 112:** Biết $I=\int_2^4\frac{(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)}{x^2-2x+2}dx=\frac{1}{4}\left(\ln^c a-\ln^c b\right)$ , với $a,b,c$ là các số nguyên dương.

Tính $a+b^2+c^3$ .

**A.** $3$. **B.** $22$. **C.** $14$. **D.** $20$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có: $I=\int_2^4\frac{(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)}{x^2-2x+2}dx=\frac{1}{2}\int_2^4\ln\left(x^2-2x+2\right)d\left(\ln\left(x^2-2x+2\right)\right)$

$=\frac{1}{4}\ln^2\left(x^2-2x+2\right)\Big|_2^4=\frac{1}{4}\left(\ln^2 10-\ln^2 2\right)$.

Vậy $a=10,b=2,c=2\Rightarrow a+b^2+c^3=22$ .

**Câu 113:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2)=-2$, $\int_0^2 f(x)dx=1$.

Tính tích phân $I=\int_0^4 f'\left(\sqrt{x}\right)dx$.

**A.** $I=-10$. **B.** $I=-5$. **C.** $I=0$. **D.** $I=-18$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $\sqrt{x}=t\Rightarrow dx=2tdt$ . Đổi cận : $x\in[0;4]\Rightarrow t\in[0;2]$

$I=\int_0^2 t.f'(t)dt$ sử dụng phương pháp tính tích phân từng phần ta được :

$I=2\left[tf(t)\Big|_0^2-\int_0^2 f(t).\mathrm{d}t\right]=-10.$ ( Vì tích phân không phụ thuộc vào biến số nên $\int_0^2 f(t).\mathrm{d}t=1$).

**Câu 114:** Cho $a$ là số thực dương. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x\left(\ln(ax)+\frac{1}{x}\right)$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{a}\right)=0$ và $F(2018)=e^{2018}$. Mệnh đề nào sau đây ***đúng?***

**A.** $a\in\left(\frac{1}{2018};1\right)$. **B.** $a\in\left(0;\frac{1}{2018}\right]$. **C.** $a\in[1;2018)$. **D.** $a\in[2018;+\infty)$.

**Lời giải.**

**Chọn A.**

**Câu 115:** Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x)=\frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}}$ thỏa mãn $F(1)=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất $m$ của $F(x)$.

**A.** $m=-\frac{1}{2}$. **B.** $m=\frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$. **C.** $m=\frac{2^{2017}+1}{2^{2018}}$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

**Lời giải.**

**Chọn B.**

Ta có $F(x)=\int\frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}}dx=\frac{2017}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^{2018}}=-\frac{1}{2}.\frac{1}{(x^2+1)^{2017}}+C$.

Do $F(1)=0$ nên $C=\frac{1}{2^{2018}}$ $F(x)=-\frac{1}{2}.\frac{1}{(x^2+1)^{2017}}+\frac{1}{2^{2018}}\geq-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2018}}=\frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$.

**Câu 116:** Biết rằng $\int_0^1 x\cos 2x dx=\frac{1}{4}(a\sin 2+b\cos 2+c)$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

**A.** $a+b+c=1$. **B.** $a-b+c=0$. **C.** $2a+b+c=-1$. **D.** $a+2b+c=1$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\cos 2xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{cases}$.

$$\int_0^1 x\cos 2xdx = \frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \sin 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2 + \frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\left(2\sin 2 + \cos 2 - 1\right).$$

Suy ra $a = 2, b = 1, c = -1 \Rightarrow a - b + c = 0$

**Câu 117:** Giả sử tích phân $I = \int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}dx = a + b.\ln 3 + c.\ln 5$. Lúc đó:

**A.** $a+b+c=\frac{4}{3}$. **B.** $a+b+c=\frac{5}{3}$. **C.** $a+b+c=\frac{7}{3}$. **D.** $a+b+c=\frac{8}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét $I = \int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}dx$

Đặt $t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2 = 3x+1 \Rightarrow 2tdt = 3dx$

| x | 1 | 5 |
|---|---|---|
| t | 2 | 4 |

Do đó $I = \frac{2}{3}\int_2^4 \frac{t}{1+t}dt = \frac{2}{3}\left(t - \ln\left(t+1\right)\right)\Big|_2^4 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3}\ln 3 - \frac{4}{3}\ln 5 \Rightarrow a+b+c = \frac{4}{3}$.

**Câu 118:** Cho hàm số $f(x) = \frac{a}{(x+1)^3} + bxe^x$. Tìm $a$ và $b$ biết rằng $f'(0) = -22$

và $\int_0^1 f(x)dx = 5$.

**A.** $a=-2, b=-8$. **B.** $a=2, b=8$. **C.** $a=8, b=2$. **D.** $a=-8, b=-2$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $f'(x) = -\frac{3a}{(x+1)^4} + b(x+1)e^x$

Suy ra $f'(0) = -22 \Leftrightarrow -3a + b = -22$ (1)

Ta có $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left[\frac{a}{(x+1)^3} + bxe^x\right]dx = \left[-\frac{a}{2(x+1)^2} + b(x-1)e^x\right]\Bigg|_0^1 = \frac{3}{8}a + b$.

Theo bài ra $\int_0^1 f(x)dx = 5 \Leftrightarrow \frac{3}{8}a + b = 5$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} -3a + b = -22 \\ \frac{3}{8}a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 2 \end{cases}$.

**Câu 119:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x) + 2018f(x) = x\sin x$. Tính

$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$?

**A.** $\frac{1}{1009}$. **B.** $\frac{2}{2019}$. **C.** $\frac{1}{2019}$. **D.** $\frac{1}{2018}$.

**Lời giải.**

**Chọn B**

Theo giả thiết $f(-x) + 2018f(x) = x\sin x. \Rightarrow f(x) + 2018f(-x) = x\sin x.$

suy ra $(2018^2 - 1)f(x) = 2017x\sin x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2019}x.\sin x$.

Do đó $I = \frac{1}{2019}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x.\sin x.dx = -\frac{1}{2019}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x.d(\cos x)$

$= -\frac{1}{2019}\left( x\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x.dx \right) = \frac{1}{2019}\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{2019}$.

**Câu 120:** Biết rằng trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ hàm số $f(x) = \frac{25x^2 - 7x - 4}{\sqrt{2x-1}}$ có một nguyên hàm

$F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-1}$ ( trong đó $a,b,c$ là các số nguyên). Tổng $S = a + b + c$ bằng

**A.** $-3$. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

**Lời giải.**

**Chọn B**

Ta tính được $F'(x)=\dfrac{5ax^2+(-2a+3b)x-b+c}{\sqrt{2x-1}}$. Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$

nên ta có $F'(x)=f(x),\forall x$ thuộc khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ suy ra

$\dfrac{5ax^2+(-2a+3b)x-b+c}{\sqrt{2x-1}}=\dfrac{25x^2-7x-4}{\sqrt{2x-1}}$.

Đồng nhất hệ số ta được $a=5,b=1,c=-3.$

**Câu 121:** Biết rằng trên khoảng $(1;+\infty)$ hàm số $f(x)=\dfrac{15x^2-9x-3}{2\sqrt{x-1}}$ có một nguyên hàm $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{x-1}$ (trong đó $a,b,c$ là các số nguyên). Tổng $S=a+b+c$ bằng

**A.** 3. **B.** $-3$. **C.** $-4$. **D.** 4.

**Lời giải.**

**Chọn B**

Ta tính được $F'(x)=\dfrac{5ax^2+(-4a+3b)x-2b+c}{2\sqrt{x-1}}$. Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$

nên ta có $F'(x)=f(x),\forall x$ thuộc khoảng $(1;+\infty)$ hay

$\dfrac{5ax^2+(-4a+3b)x-2b+c}{2\sqrt{x-1}}=\dfrac{15x^2-9x-9}{2\sqrt{x-1}}$

Đồng nhất hệ số ta được $a=3,b=1,c=-7$.

**Câu 122:** Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

**A.** $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{2}{15}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có: $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$ $(1)$.

Đặt $t=1-x$, thay vào $(1)$, ta được: $2f(1-t)+3f(t)=\sqrt{t}$ hay $2f(1-x)+3f(x)=\sqrt{x}$ $(2)$.

Từ $(1)$ & $(2)$, ta được: $f(x)=\dfrac{3}{5}\sqrt{x}-\dfrac{2}{5}\sqrt{1-x}$.

Do đó, ta có: $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{3}{5}\int\limits_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \dfrac{2}{5}\int\limits_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{15} = \dfrac{2}{15}$.

**Câu 123:** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^2}(x^3 - 4x)$. Số cực trị của hàm $F(x)$ là

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn B.**

$F' = f(x)$. Ta có $F' = 0 \Leftrightarrow e^{x^2}(x^3 - 4x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Vậy hàm số $F(x)$ có 3 cực trị

**Câu 124:** Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4;4]$, biết $\int\limits_{-2}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_1^2 f(-2x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

**A.** $I = -10$. **B.** $I = -6$. **C.** $I = 6$. **D.** $I = 10$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Vì $f(x)$ là hàm lẻ nên ta có $f(-x) = -f(x)$.

Ta có: $\int\limits_{-2}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x = 2 \xrightarrow{t=-x} -\int\limits_2^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 2 \Leftrightarrow \int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2 = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$\int\limits_1^2 f(-2x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_1^2 f(2x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{u=2x} -\dfrac{1}{2}\int\limits_2^4 f(u)\,\mathrm{d}u = 4 \Leftrightarrow \int\limits_2^4 f(u)\,\mathrm{d}u = -8 \Leftrightarrow \int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = -8$.

Do đó: $\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 - 8 = -6$.

**Câu 125: [Trường chuyên Thái Bình,tỉnh Thái Bình,lần 4,năm 2018]** Cho $\int\limits_0^1 \dfrac{(x^2 + x)e^x}{x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x = ae + b\ln(e + c)$ với $a$, $b$, $c \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a + 2b - c$.

**A.** $P=-1$. **B.** $P=1$. **C.** $P=-2$. **D.** $P=0$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có: $\int\limits_0^1 \frac{\left(x^2+x\right)e^x}{x+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{xe^x\left(x+1\right)e^x}{e^x x+1}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{\left(xe^x+1-1\right)\left(x+1\right)e^x}{e^x x+1}\mathrm{d}x$

$=\int\limits_0^1\left(1-\frac{1}{xe^x+1}\right)\mathrm{d}\left(xe^x+1\right)=\left[xe^x+1-\ln\left(xe^x+1\right)\right]\Big|_0^1=e-\ln\left(e+1\right)$. Suy ra $a=1$, $b=-1$, $c=1$

.

Vậy, $P=a+2b-c=0$.

**Câu 126: [2D3-3][Trường chuyên Thái Bình,tỉnh Thái Bình,lần 4,năm 2018]** Cho tích phân

$\int\limits_1^e \frac{\left(x+1\right)\ln x+2}{1+x\ln x}\mathrm{d}x = ae+b\ln\left(\frac{e+1}{e}\right)$ trong đó $a$, $b$ là các số nguyên. Khi đó tỉ số $\frac{a}{b}$ bằng:

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có: $\int\limits_1^e \frac{\left(x+1\right)\ln x+2}{1+x\ln x}\mathrm{d}x = \int\limits_1^e\left(1+\frac{\ln x+1}{1+x\ln x}\right)\mathrm{d}x = \left[x+\ln\left(1+x\ln x\right)\right]\Big|_1^e = e+\ln\left(e+1\right)-1$

$=e+\ln\left(\frac{e+1}{e}\right)$. Suy ra: $a=b=1\Rightarrow\frac{a}{b}=1$.

**Câu 127: [Trường chuyên Thái Bình,tỉnh Thái Bình,lần 4,năm 2018]** Cho tích phân

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x = a\pi+b\ln 2$, với $a$, $b\in Q$. Khi đó $a+b$ bằng:

**A.** 1. **B.** $2$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có: $\frac{\sin x}{2\sin x+\cos x}=\frac{A(2\sin x+\cos x)+B(2\cos x-\sin x)}{2\sin x+\cos x}=\frac{(2A-B)\sin x+(A+2B)\cos x}{2\sin x+\cos x}$

$\Rightarrow\begin{cases}2A-B=1\\A+2B=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{2}{5}\\B=-\frac{1}{5}\end{cases}.$

Khi đó: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\frac{2\cos x-\sin x}{2\sin x+\cos x}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\ln|2\sin x+\cos x|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{\pi}{5}-\frac{1}{5}\ln 2.$

Suy ra: $a=\frac{1}{5}$, $b=-\frac{1}{5}$. Vậy, $a+b=0$.

**Câu 128: [Trường chuyên Thái Bình,tỉnh Thái Bình,lần 4,năm 2018]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(5)=10$, $\int_0^5 xf'(x)\mathrm{d}x=30$ .Tính $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $-20$. **B.** $70$. **C.** $20$. **D.** $-30$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Xét $I_1=\int_0^5 xf'(x)\mathrm{d}x=30$

Đặt $\begin{cases}u=x\\\mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\v=f(x)\end{cases}$

Vậy $\Rightarrow I_1=\int_0^5 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^5-\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x=5f(5)-\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x$

Mà $I_1=30$ và $f(5)=10$ vậy $\Rightarrow\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x=20$.

**Câu 129: [Trường chuyên Thái Bình,tỉnh Thái Bình,lần 4,năm 2018]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=15$, $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=60$ .Tính $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $-30$. **B.** $70$. **C.** $30$. **D.** $-50$.

**Lời giải**

Chọn A.

Xét $I_1=\int_0^5 x f'(x)\mathrm{d}x=60$

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$

Vậy $\Rightarrow I_1=\int_0^2 x f'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(2)-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$

Mà $I_1=60$ và $f(2)=15$ vậy $\Rightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=-30$.

**Câu 130: [Trường chuyên Thái Bình,tỉnh Thái Bình,lần 4,năm 2018]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(4)=13$, $\int_0^4 x f'(x)\mathrm{d}x=24$ .Tính $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $-11$. **B.** $-28$. **C.** $76$. **D.** $28$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Xét $I_1=\int_0^4 x f'(x)\mathrm{d}x=24$

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$

Vậy $\Rightarrow I_1=\int_0^4 x f'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^4-\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=4f(4)-\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$

Mà $I_1=24$ và $f(4)=13$ vậy $\Rightarrow \int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=28$.

**Câu 131: [Trường chuyên Thái Bình,tỉnh Thái Bình,lần 4,năm 2018]** Cho hàm số $f(x)=x^4-4x^3+2x^2-x+1, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f^2(x)f'(x)dx$

**A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $2$. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** $-2$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có $\int_0^1 f^2(x)f'(x)dx = \int_0^1 f^2(x)df(x) = \left.\frac{f^3(x)}{3}\right|_0^1 = \frac{f^3(1)-f^3(0)}{3} = -\frac{2}{3}$

**Câu 132: [Trường chuyên Thái Bình,tỉnh Thái Bình,lần 4,năm 2018]** Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+3x-2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f^3(x)f'(x)dx$

**A.** $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{15}{4}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $-\frac{15}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có $\int_0^1 f^3(x)f'(x)dx = \int_0^1 f^3(x)df(x) = \left.\frac{f^4(x)}{4}\right|_0^1 = \frac{f^4(1)-f^4(0)}{4} = -\frac{15}{4}$

**Câu 133: [Trường chuyên Thái Bình,tỉnh Thái Bình,lần 4,năm 2018]** Cho hàm số $f(x)=x^6-5x^4+3x^2+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f^{2017}(x)f'(x)dx$.

**A.** $\frac{1}{2018}$. **B.** $\frac{1}{1009}$. **C.** $-\frac{1}{2018}$. **D.** $-\frac{1}{1009}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có $\int_0^1 f^{2017}(x)f'(x)dx = \int_0^1 f^{2017}(x)df(x) = \left.\frac{f^{2018}(x)}{2018}\right|_0^1 = \frac{f^{2018}(1)-f^{2018}(0)}{2018} = -\frac{1}{2018}$

**Câu 134: [Trường chuyên Thái Bình,tỉnh Thái Bình,lần 4,năm 2018]** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{1}{1+\sin 2x}$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$, biết $F(0)=1$; $F(\pi)=0$. Tính $P=F\left(\frac{-\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

**A.** $P=2-\sqrt{3}$. **B.** $P=0$. **C.** Không tồn tại $P$. **D.** $P=1$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

**Cách 1:**

Ta có $F\left(x\right)=\int\frac{1}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x$

$$=\begin{cases}-\frac{1}{2}\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C_1 \text{ khi } x\in\left(-\frac{\pi}{4}+k2\pi;\frac{3\pi}{4}+k2\pi\right)\\ -\frac{1}{2}\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C_2 \text{ khi } x\in\left(\frac{3\pi}{4}+k2\pi;\frac{7\pi}{4}+k2\pi\right)\end{cases}$$

Để $\begin{cases}F\left(0\right)=1\\F\left(\pi\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=\frac{3}{2}\\C_2=\frac{1}{2}\end{cases}$. Vậy $F\left(x\right)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3}{2}\text{ khi } x\in\left(-\frac{\pi}{4}+k2\pi;\frac{3\pi}{4}+k2\pi\right)\\ -\frac{1}{2}\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\text{ khi } x\in\left(\frac{3\pi}{4}+k2\pi;\frac{7\pi}{4}+k2\pi\right)\end{cases}$.

Khi đó $P=F\left(\frac{-\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)=1$

**Cách 2:**

Ta có $P=F\left(\frac{-\pi}{12}\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)=-\left[F\left(0\right)-F\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]+\left[F\left(\pi\right)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right]+F\left(0\right)-F\left(\pi\right)$

$$=-\int_{-\frac{\pi}{12}}^{0}\frac{1}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi}\frac{1}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x+1.$$

Ta có $\frac{1}{1+\sin 2x}=\frac{1}{\left(\sin x+\cos x\right)^2}=\frac{1}{2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ nên

$$\int_{-\frac{\pi}{12}}^{0}\frac{1}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{12}}^{0}=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right);$$

$$\int_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi}\frac{1}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi}=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right).$$

Vậy $P=1$.

**Câu 135: [Trường chuyên Thái Bình,tỉnh Thái Bình,lần 4,năm 2018]** Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\left|2x-4\right|$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{2\right\}$ thỏa mãn $f\left(1\right)=1$ và $f\left(3\right)=-2$. Giá trị của biểu thức $F\left(-1\right)+F\left(4\right)$ bằng

**A.** $-6$. **B.** $7$. **C.** $-14$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có $F(x)=\int|2x-4|\mathrm{d}x=\begin{cases}\int(2x-4)\,\mathrm{d}x \text{ khi } x>2\\ \int-(2x-4)\,\mathrm{d}x \text{ khi } x<2\end{cases}=\begin{cases}(x-2)^2+C_1 \text{ khi } x>2\\ -(x-2)^2+C_2 \text{ khi } x<2\end{cases}$.

Do $\begin{cases}F(1)=1\\ F(3)=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1+C_2=1\\ 1+C_1=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=-3\\ C_2=2\end{cases}$ nên $F(x)=\begin{cases}(x-2)^2-3 \text{ khi } x>2\\ -(x-2)^2+2 \text{ khi } x<2\end{cases}$.

Vậy $F(-1)+F(4)=-9+2+4-3=-6$.

**Câu 136: [Trường chuyên Thái Bình,tỉnh Thái Bình,lần 4,năm 2018]** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$, $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-2)+f(0)+f(4)$ bằng

**A.** $2\ln2-2\ln3-\ln5$.

**B.** $6\ln2-2\ln3-\ln5$.

**C.** $-\ln5+2\ln3+2\ln2+1$.

**D.** $2\ln3-\ln5+6$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Có $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$.

Khi đó $f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)+\mathrm{C}_1 \quad \text{khi } x<-1\cup x>1\\ \ln\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)+\mathrm{C}_2 \quad \text{khi } -1<x<1\end{cases}$.

Có $f(-3)+f(3)=0\Leftrightarrow\ln2+C_1+\ln2+C_1=0\Leftrightarrow C_1=\ln2$.

Có $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\Leftrightarrow\ln3+C_2-\ln3+C_2=2\Leftrightarrow C_2=1$.

Khi đó: $f(x)=\begin{cases}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)+\ln2 \text{ khi } x<-1\cup x>1\\ \ln\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)+1 \quad \text{khi } -1<x<1\end{cases}$.

Vậy $f(-2)+f(0)+f(4)=\ln3+\ln2+1+\ln3-\ln5+\ln2=-\ln5+2\ln3+2\ln2+1$.

**Câu 137:** Một vật chuyển động với vận tốc $10\text{m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t)=t^2+3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $3$ giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

**A.** $\frac{45}{2}$m. **B.** $\frac{201}{4}$m. **C.** $\frac{81}{4}$m. **D.** $\frac{65}{2}$m.

**Lời giải**

Chọn B

$v(t)=\int a(t)\text{dt}=\int(t^2+3t)\text{dt}=\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+C$

Do $v_0=10m/s\Rightarrow C=10\ \Rightarrow v(t)=\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+10$

$S=\int_0^3\left(\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+10\right)\text{dt}=\frac{201}{4}\ (\text{m})$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $3$ giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc là $\frac{201}{4}$m

**Câu 138:** Một ô tô đang chạy với tốc độ $10(m/s)$ thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với $v(t)=-5t+10(\text{m/s})$, trong đó $t$ là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét.

**A.** $8m$. **B.** $10m$. **C.** $5m$. **D.** $20m$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Thời điểm đạp phanh ứng với $t=0$.

Thời điểm xe dừng hẳn ứng với $v(t)=5t-10=0 \Leftrightarrow t=2$.

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe được phanh đến khi dừng hẳn bằng. $\int_0^2 v(t)dt=10\,(m)$.

**Câu 139:** Một vật chuyển động với vận tốc $10\text{m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t)=t^2+3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $3$ giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

**A.** $\frac{45}{2}$ m. **B.** $\frac{201}{4}$ m. **C.** $\frac{81}{4}$ m. **D.** $\frac{65}{2}$ m.

**Lời giải**

Chon B

$v(t)=\int a(t)\text{d}t=\int\left(t^2+3t\right)\text{d}t=\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+C$

Do $v_0=10m/s\Rightarrow C=10\ \Rightarrow v(t)=\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+10$

$S=\int_0^3\left(\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+10\right)\text{d}t=\frac{201}{4}\ (\text{m})$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $3$ giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc là $\frac{201}{4}$m

**Câu 140:** Biết rằng trên khoảng $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$ hàm số $f(x)=\frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ có một nguyên hàm $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-3}$ (trong đó $a,b,c$ là các số nguyên). Tổng $S=a+b+c$ bằng

**A.** 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

**Lời giải.**

**Chọn B**

Ta có: $F'(x)=(2ax+b)\sqrt{2x-3}+(ax^2+bx+c).\frac{1}{\sqrt{2x-3}}=\frac{(2ax+b)(2x-3)+(ax^2+bx+c)}{\sqrt{2x-3}}$

Từ đó rút gọn tử thức ta được: $F'(x)=\frac{5ax^2-(6a-3b)x-3b+c}{\sqrt{2x-3}}$

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên ta có:

$F'(x)=f(x)\Leftrightarrow\frac{5ax^2-(6a-3b)x-3b+c}{\sqrt{2x-3}}=\frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$

Đồng nhất hệ số hai vế ta được hệ sau: $\begin{cases}5a=20\\-6a+3b=-30\\-3b+c=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=-2\\c=1\end{cases}$

Suy ra $S=a+b+c=3$.

**Câu 141:** Cho đa thức bậc bốn y = f (x) đạt cực trị tại x = 1 và x = 2. Biết $\lim_{x\to 0}\frac{2x+f'(x)}{2x}=2$. Tích phân $\int_0^1 f'(x)dx$

**A.** $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** 1

**Lời giải**

**Chọn B**

**Phương pháp:**

Từ giả thiết biến đổi để có f'(0 ) = 0

Từ đó tìm được hàm f'(x) và tính tích phân.

**Cách giải:**

Ta có $\lim_{x\to 0}\frac{2x+f'(x)}{2x}=2$ mà $\lim_{x\to 0}2x=0$ nên $\lim_{x\to 0}\left(2x+f'(x)\right)=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}f'(x)=0\Rightarrow f'(0)=0$ (vì nếu $\lim_{x\to 0}\left(2x+f'(x)\right)\neq 0$ thì $\lim_{x\to 0}\frac{2x+f'(x)}{2x}=\infty\neq 2$)

Từ đó x = 0; x = 1; x = 2 là ba cực trị của hàm số đã cho. Hay phương trình f'(x) = 0 có ba nghiệm x = 0; x = 1; x = 2

Vì f(x) là hàm đa thức bậc 4 nên ta giả sử hàm $f'(x)=m.x\left(x-1\right)\left(x-2\right)$

Từ đề bài ta có $\lim_{x\to 0}\frac{2x+mx\left(x-1\right)\left(x-2\right)}{2x}=2\Leftrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{2+m\left(x-1\right)\left(x-2\right)}{2}=2\Rightarrow\frac{2+2m}{2}=2\Leftrightarrow m=1$

Nên $f'(x)=x\left(x-1\right)\left(x-2\right)=x^3-3x^2+2x$

Từ đó $\int_0^1 f'(x)dx=\int_0^1\left(x^3-3x^2+2x\right)dx=\frac{1}{4}$.

**Chọn B.**

## II. DIỆN TÍCH THỂ TÍCH

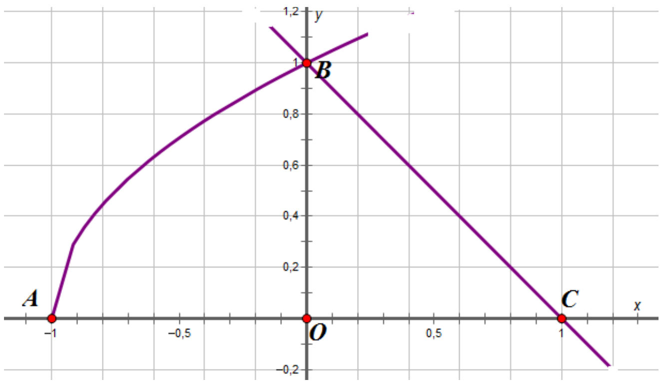
**Câu 142:** Cho hình $(H)$ là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x+1}, y=1-x$ và trục Ox.

Diện tích của hình $(H)$ (H) bằng

A. $\frac{4}{3}$.  B. $\frac{7}{6}$.  C. $\frac{3}{2}$.  D. $\frac{5}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn B.**



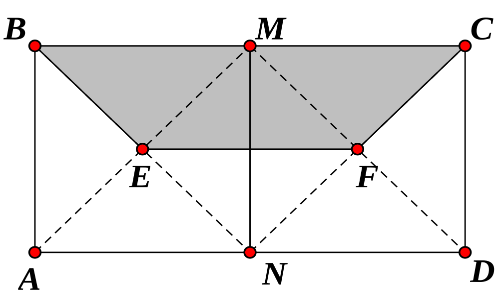

Gọi $\left(H_1\right)$ là sình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x+1}; y=0; x=0$ *(Tam giác cong* $OAB$*).*

$\left(H_2\right)$ là sình phẳng giới hạn bởi các đường $y=1-x; y=0; x=0$ *(Tam giác* $OBC$*).*

Diện tích hình hình phẳng cần tính là:

$$S=S_{\left(H_1\right)}+S_{\left(H_2\right)}=\int_{-1}^{0}\sqrt{x+1}dx+\int_{0}^{1}\left(1-x\right)dx=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3\Big|_{-1}^{0}+\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$$

**Câu 143:** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=4$, $AD=8$ (như hình vẽ).




Gọi $M, N, E, F$ lần lượt là trung điểm của $BC$, $AD$, $BN$ và $NC$. Tính thể tích $V$ của vật thể tròn xoay khi quay hình tứ giác $BEFC$ quanh trục $AB$.

A. $100\pi$.  B. $96\pi$.  C. $84\pi$.  D. $90\pi$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Chọn hệ trục tọa độ $Oxy$ sao cho $B\equiv O$, $AB\equiv Ox$, $BC\equiv Oy$.

Bài toán trở thành: Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi: $y = x;\ y = 8 - x;\ x = 0; x = 2$ quay quanh trục $Ox$.

$$V = \pi\int_0^2 \left|x^2 - (8-x)^2\right| \mathrm{d}x = \pi\int_0^2 |16x - 64| \mathrm{d}x = 96\pi.$$

Cách khác:

Gọi $I$ là trung điểm $AB$.

Gọi $V_1$ là thể tích khối nón cụt tạo bởi $CFIB$ quay quanh $AB$,

$V_1$ có chiều cao là $2$ , bán kính đáy là $r = 6$ và $R = 8. \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}\pi.2\left(6^2 + 6.8 + 8^2\right) = \frac{296}{3}\pi$

Gọi $V_2$ là thể tích khối nón tạo bởi $BEI$ quay quanh $AB$,

$V_2$ có chiều cao là $2$ và bán kính đáy là $2$.

$\Rightarrow V_2 = \frac{8}{3}\pi$ .

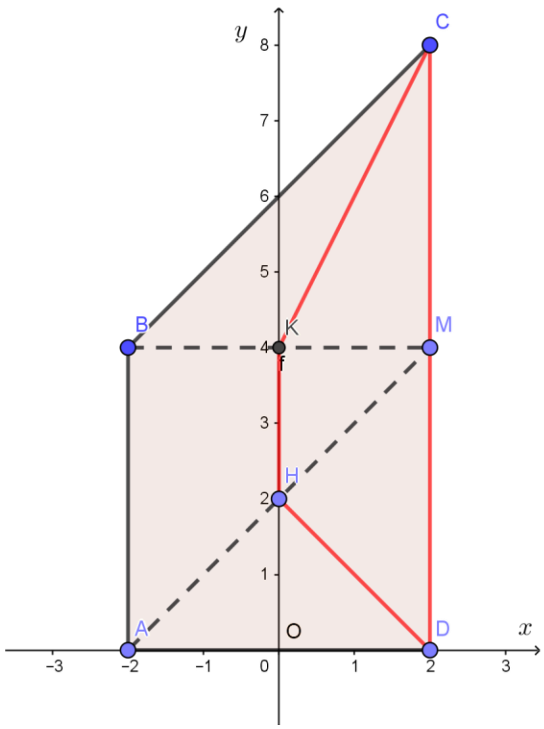
Ta có thể tích cần tính $V = V_1 - V_2 = 96\pi$.

**Câu 144:** Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{D} = 90°$, $CD = 2AB$, $\hat{C} = 45°$. Gọi $M$ là trung điểm $CD$ , gọi $H, K$ lần lượt là trung điểm các cạnh $AM, BM$ . Biết $CD = 8$, tính thể tích $V$ của vật thể tròn xoay khi quay tứ giác $HKCD$ quanh trục $AD$ .

**A.** $96\pi$. **B.** $84\pi$ . **C.** $72\pi$. **D.** $60\pi$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

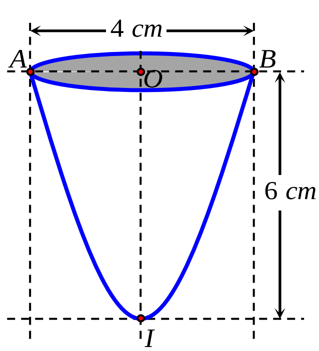



Ta có $AB = 4$, $\Delta BMC$ vuông cân tại $M$ nên $AD = BM = 4$. Gọi $O$ là trung điểm của $AD$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxy$ sao cho $OD \equiv Ox$, $OK \equiv Oy$.

Bài toán trở thành: Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi: $y = 2 - x$; $y = 2x + 4$; $x = 0$; $x = 2$ quay quanh trục $Ox$.

$$V = \pi\int_0^2 \left|(2x+4)^2 - (2-x)^2\right| \mathrm{d}x = \pi\int_0^2 \left|32x^2 + 20x + 12\right| \mathrm{d}x = 72\pi.$$

**Câu 144:** Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây.



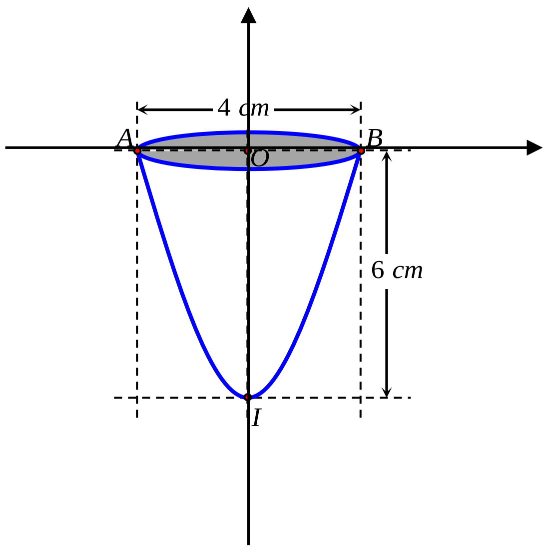

Người ta đo được đường kính của miệng ly là $4cm$ và chiều cao là $6cm$. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích $V\left(cm^3\right)$ của vật thể đã cho.

**A.** $V = \dfrac{72}{5}$. **B.** $V = \dfrac{72}{5}\pi$. **C.** $V = 12\pi$. **D.** $V = 12$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Chọn hệ trục $Oxy$ như hình vẽ.

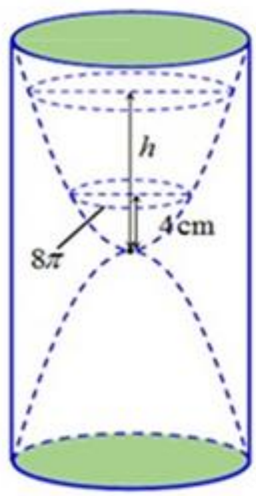



Gọi phương trình của Parabol là $y = ax^2 - 6$. Do $(P)$ qua điểm $B(2;0)$ nên $a = \dfrac{3}{2}$.

Vậy $(P): y = \dfrac{3}{2}x^2 - 6$ suy ra $x = \pm\sqrt{\dfrac{2(y+6)}{3}}$.

Thể tích vật thể cần tính bằng $V = \pi\displaystyle\int_{-6}^{0} \dfrac{2(y+6)}{3}\mathrm{d}y = 12\pi$.

**Câu 145:** Một chiếc đồng hồ cát như hình vẽ, gồm hai phần đối xứng nhau qua mặt nằm ngang và đặt trong một hình trụ. Thiết diện thẳng đứng qua trục của nó là hai parabol chung đỉnh và đối xứng nhau qua mặt nằm ngang. Ban đầu lượng cát dồn hết ở phần trên của đồng hồ thì chiều cao h của mực cát bằng $\dfrac{3}{4}$ chiều cao của bên đó (xem hình).

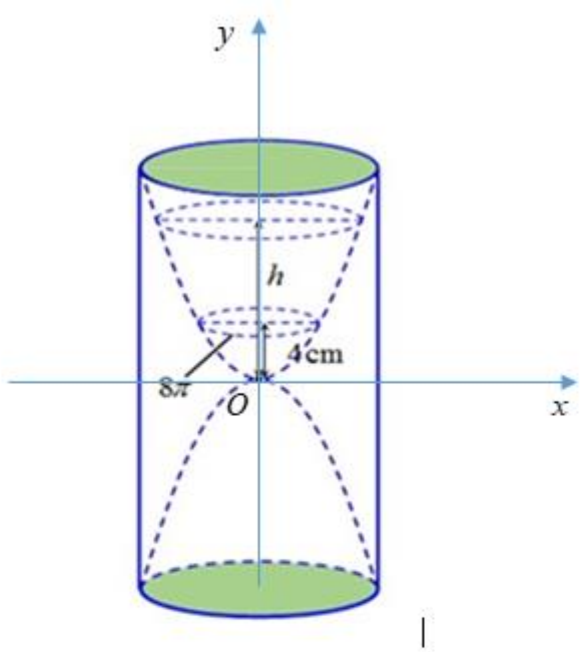



Cát chảy từ trên xuống dưới với lưu lượng không đổi $2{,}90\ \text{cm}^3$/ phút. Khi chiều cao của cát còn $4\,\text{cm}$ thì bề mặt trên cùng của cát tạo thành một đường tròn chu vi $8\pi$ cm (xem hình). Biết sau $30$ phút thì cát chảy hết xuống phần bên dưới của đồng hồ. Hỏi chiều cao của khối trụ bên ngoài là bao nhiêu cm ?

**A.** $8\,\text{cm}$. **B.** $12\,\text{cm}$. **C.** $10\,\text{cm}$. **D.** $9\,\text{cm}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**




Chiều cao khối trụ bằng $\frac{8}{3}h$.

Xét thiết diện chứa trục theo phương thẳng đứng của đồng hồ cát là parabol . Gọi $(P)$ là đường Parabol phía trên. Chọn hệ trục $Oxy$ như hình vẽ .

Đường tròn thiết diện có chu vi bằng $8\pi$ suy ra bán kính của nó bằng $4$.

Do $(P)$ có đỉnh là $O(0;0)$ nên phương trình $(P): y = ax^2$ .

$(P)$ đi qua $A(4;4)$ nên $a = \frac{1}{4}$ . Vậy phương trình $(P): y = \frac{1}{4}x^2$ .

Thể tích phần cát ban đầu chính bằng thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay nhánh phải của $(P)$ quay quanh trục $Oy$ và bằng lượng cát đã chảy trong thời gian $30p$ .

Ta có $V = \pi\int_0^h (2\sqrt{y})^2 dy = 2\pi h^2$ .

Lượng cát chảy trong $30p$ là $2,9.30 = 87(m^3)$ .

Vậy $V = 87 \Rightarrow 2\pi h^2 = 87 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{87}{2\pi}}$ .

Chiều cao hình trụ bên ngoài là $l = 2.\frac{4}{3}h \approx 10cm.$

Chọn đáp án C.

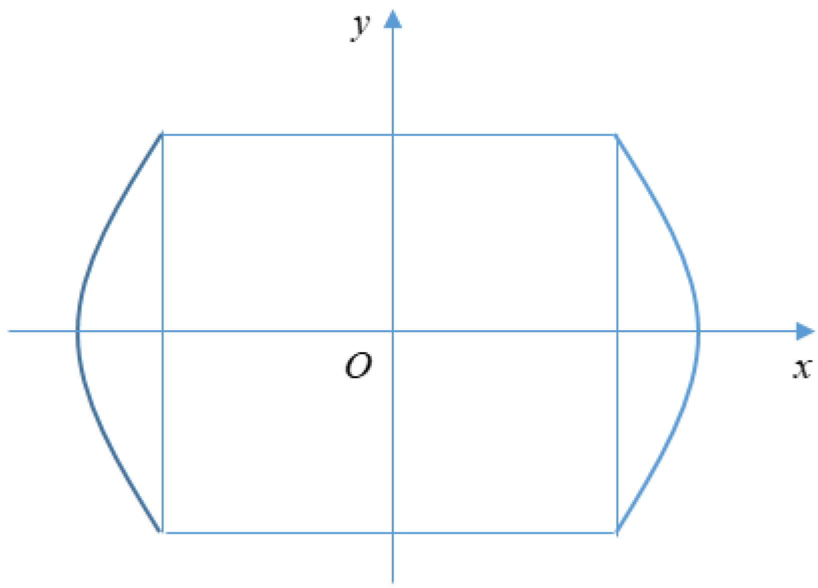
**Câu 146:** Một thùng rượu có bán kính các đáy là $30cm$, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính là $40cm$, chiều cao thùng rượu là $1m$ (hình vẽ).

Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích của thùng rượu là bao nhiêu?

**A.** $425162$ lít. **B.** $21258$ lít. **C.** $212,6$ lít. **D.** $425,2$ lít.

**Lời giải**

**Chọn D.**




+ Đổi dữ liệu sang đơn vị dm : $30cm = 3dm;\ 40cm = 4dm$

+ Chọn hệ toạ độ như hình vẽ

Gọi phương trình $(P): x = ay^2 + by + c$

$(P)$ đi qua các điểm $A(4;0);\ B(3;5)$ và $C(3;-5)$ nên ta có $\begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \\ c = -\dfrac{1}{25} \end{cases}$

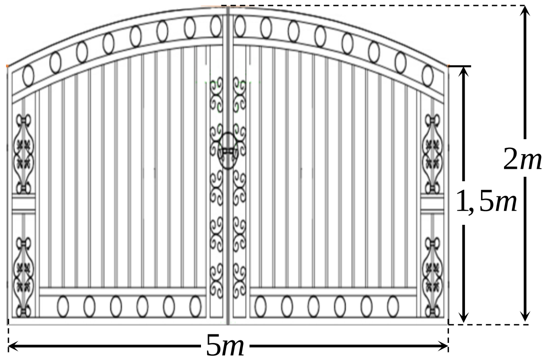
Vậy phương trình của $(P): x = -\dfrac{1}{25}y^2 + 4$

Thể tích của thùng rượu là :

$$V = \pi\int_{-5}^{5}(-\frac{1}{25}y^2 + 4)^2 dy \approx 425,2dm^3 = 425,2l$$

Suy ra đáp án D.

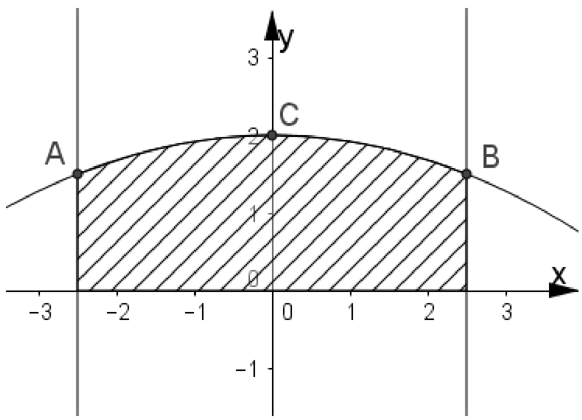
**Câu 147:** Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá $1\left(\mathrm{m}^2\right)$ của rào sắt là $700.000$ đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng phần nghìn).




**A.** 6.520.000 đồng. **B.** 6.320.000 đồng. **C.** 6.417.000 đồng. **D.** 6.620.000 đồng.

**Lời giải**

**Chọn C.**




Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Trong đó $A(-2,5;1,5)$, $B(2,5;1,5)$, $C(0;2)$.

Giả sử đường cong trên là một Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$, với $a;b;c \in \mathbb{R}$.

Do Parabol đi qua các điểm $A(-2,5;1,5)$, $B(2,5;1,5)$, $C(0;2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a(-2,5)^2 + b(-2,5) + c = 1,5 \\ a(-2,5)^2 + b(2,5) + c = 1,5 \\ c = 2 \end{cases} <=> \begin{cases} a = -\dfrac{2}{25} \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Khi đó phương trình Parabol là $y = -\dfrac{2}{25}x^2 + 2$.

Diện tích $S$ của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới bởi đồ thị hàm số $y = -\dfrac{2}{25}x^2 + 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2,5$, $x = 2,5$.

Ta có $S=\int_{-2,5}^{2,5}\left(-\frac{2}{25}x^2+2\right)dx=\frac{55}{6}$.

Vậy ông An phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là $S.(700.000)=\frac{55}{6}.700000\approx 6.417.000$ (đồng).

**Câu 148:** Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục $Ox$ tại điểm có hoành độ $x(0\le x\le\pi)$ là một tam giác đều có cạnh là $2\sqrt{\sin x}$.

**A.** $V=3$ **B.** $V=3\pi$ **C.** $V=2\pi\sqrt{3}$ **D.** $V=2\sqrt{3}$

**Lời giải**

**Chọn D.**

Diện tích thiết diện là $S(x)=\frac{\left(2\sqrt{\sin x}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\sin x$

Áp dụng công thức $V=\int_a^b S(x)dx=\int_0^\pi \sqrt{3}\sin x dx=2\sqrt{3}$. → Chọn **D.**

**Câu 149:** Một mảnh vườn hình elip có trục lớn bằng $100m$, trục nhỏ bằng $80m$. Người ta thiết kế một mảnh nhỏ hình thoi có bốn đỉnh là bốn đỉnh của eip trên để trồng hoa, phần còn lại trồng rau. Biết lợi nhuận thu được là 5000 đồng mỗi $m^2$ trồng rau và 10.000 đồng mỗi $m^2$ trồng hoa. Hỏi thu nhập từ cả mảnh vườn là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn).

**A.** 25.708.000. **B.** 51.416.000. **C.** 31.415.000. **D.** 17.635.000.

**Lời giải**

**Chọn B**

Diện tích phần hoa là: $S_2=4000$

Diện tích phần rau là: $S_1=2000\pi-4000$

Vậy thu nhập đến từ mảnh vườn là: $T=S_1.5000+S_2.10.000=51.416.000$.

**Câu 150:** Ở quảng trường một thành phố A có một miếng đất hình tròn đường kính $30m$. Trong lòng hình tròn đó người ta dự định trồng hoa hồng trên một miếng là hình elip có trục lớn bằng đường kính và trục bé bằng một phần ba đường kính đường tròn trên ( tâm của đường tròn và elip trùng nhau), phần còn lại làm hồ. Biết chi phí để trồng một $1m^2$ hoa hồng là $500.000$ đồng, chi phí làm $1m^2$ hồ là $2.000.000$ đồng. Hỏi thành phố đó phải bỏ ra chi phí là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn).

**A.** 706.858.000 **B.** 514.160.000 **C.** 1.413.717.000 **D.** 680.340.000

**Lời giải**

**Chọn B**

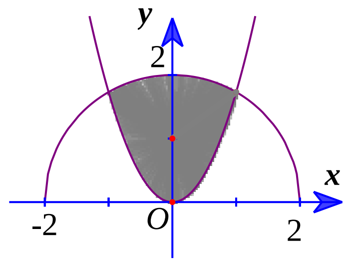
Diện tích hình tròn là: $225\pi$.

Diện tích elip hay diện tích trồng hoa là: $S_1 = ab\pi = 75\pi$

Diện tích phần làm hồ là: $S_2 = 150\pi$.

Vậy chi phí để thành phố phải bỏ ra là: $T = S_1.500.00 + S_2.2.000.000 = 514.160.000$.

**Câu 151:** Cho $(H)$ là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$ và nửa đường tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ với $-2 \le x \le 2$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của $(H)$ bằng




**A.** $\dfrac{2\pi + 5\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{4\pi + 5\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{4\pi + \sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{2\pi + \sqrt{3}}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{3}x^2 = \sqrt{4 - x^2}$, Đk: $-2 \le x \le 2$

$$\Leftrightarrow 3x^4 + x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Hình $(H)$ giới hạn bởi: $\begin{cases} (P): y = \sqrt{3}x^2 \\ (C): y = \sqrt{4 - x^2} \\ x = -1; x = 1 \end{cases}$ có diện tích là:

$$S = \int_{-1}^{1} \left( \sqrt{4 - x^2} - \sqrt{3}x^2 \right) \mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2} \mathrm{d}x}_{I_1} - \underbrace{\int_{-1}^{1} \sqrt{3}x^2 \mathrm{d}x}_{I_2}.$$

* Ta có: $I_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

* Xét $I_1 = \int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ :Đặt $x = 2\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $\mathrm{d}x = 2\cos t\,\mathrm{d}t$.

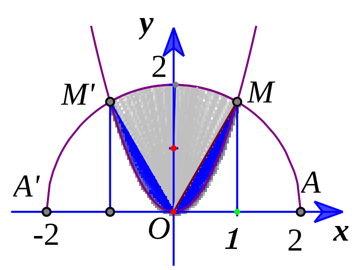
Khi $x = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}$ và $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.

Ta có: $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4\left(1-\sin^2 x\right)}2\cos t\mathrm{d}t = 4\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\mathrm{d}t$ (Do $\cos t \ge 0$ khi $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$)

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t = 2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Vậy $S = 2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi+\sqrt{3}}{3}$.

***Cách khác:***




- Giao điểm của $\left(P\right): y = \sqrt{3}x^2$ và $\left(C\right): y = \sqrt{4-x^2}$ là $M\left(1;\sqrt{3}\right), M'\left(-1;\sqrt{3}\right)$.

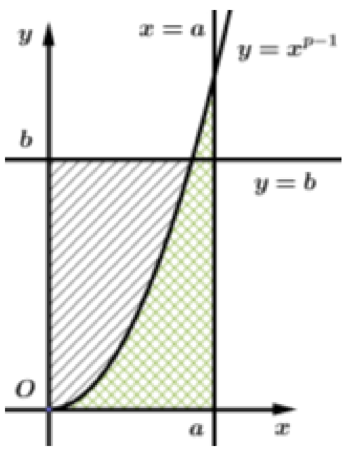
- Có $AOM = 60^\circ \Rightarrow MOM' = 2\times 30^\circ = 60^\circ$. Suy ra diện tích hình quạt $OMM'$ là

$S_1 = \frac{60}{360}.\pi.R^2 = \frac{2\pi}{3}$.

- Gọi $S_2$ là diện tích giới hạn bởi $\begin{cases} OM: y = \sqrt{3}x \\ \left(P\right): y = \sqrt{3}x^2 \\ x = 0, x = 1 \end{cases}$. Suy ra $S_2 = \int_0^1\left(\sqrt{3}x - \sqrt{3}x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

- Diện tích hình $\left(H\right)$ là: $S = S_1 + 2S_2 = \frac{2\pi+\sqrt{3}}{3}$.

**Câu 152: (Chuyên hạ long – Quảng Ninh – Lần 2 – 2018- mã 108)** Cho các số $p,q$ thỏa mãn các điều kiện: $p>1, q>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ và các số dương $a,b$. Xét hàm số $y=x^{p-1}\,(x>0)$ có đồ thị là $(C)$. Gọi $S_1$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C)$, trục hoành, đường thẳng $x=a$; $S_2$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các $(C)$, trục tung, đường thẳng $y=b$; $S$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục tung, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, y=b$. Khi so sánh $S_1+S_2$ và $S$, ta nhận được bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức dưới đây?




**A.** $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\le ab$ **B.** $\frac{a^{p-1}}{p-1}+\frac{b^{q-1}}{q-1}\ge ab$ **C.** $\frac{a^{p+1}}{p+1}+\frac{b^{q+1}}{q+1}\le ab$ **D.** $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\ge ab$

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có $S_1=\int_0^a x^{p-1}dx=\left.\frac{x^p}{p}\right|_0^a=\frac{a^p}{p}$.

Ta lại có: $y=x^{p-1}\,(x>0)\Leftrightarrow x=\sqrt[p-1]{y}=y^{\frac{1}{p-1}}$.

Mặt khác: $p>1, q>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\Leftrightarrow\frac{1-p}{p}=\frac{1}{q}$.

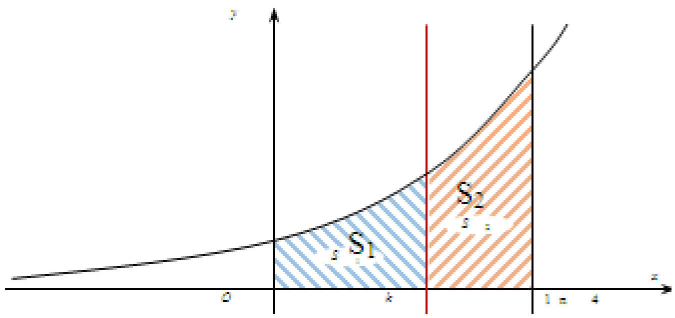
$\Rightarrow S_2=\int_0^b y^{\frac{1}{p-1}}dy=\left.\frac{p-1}{p}.y^{\frac{p}{p-1}}\right|_0^b=\frac{p-1}{p}b^{\frac{p}{p-1}}=\frac{b^q}{q}$.

$S=a.b$

Do $S_1+S_2\ge S\Leftrightarrow\frac{a^P}{p}+\frac{b^q}{q}\ge ab$.

**Câu tương tự:**

**Câu 153:** Cho hình thang cong $(H)$ giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k(0<k<\ln 4)$ chia $(H)$ thành hai phần có diện tích là $S_1$ và $S_2$ như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1.S_2$ lớn nhất.




**A.** $k=\ln\frac{25}{4}$. **B.** $k=\ln\frac{9}{4}$. **C.** $k=\ln\frac{8}{3}$. **D.** $k=\ln\frac{5}{2}$.

**Lời giải:**

**Chọn D**

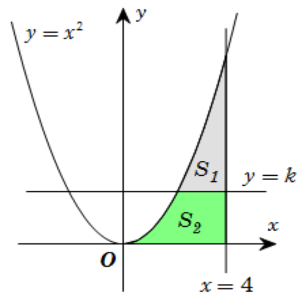
Ta có $S_1=\int_0^k e^x dx=e^k\Big|_0^k=e^k-1$ và $S_2=\int_k^{\ln 4} e^x dx=4-e^k$

Ta có $S_1.S_2=\left(e^k-1\right)\left(4-e^k\right)=-\left(e^k\right)^2+5e^k-4$

$=-\left(e^k-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\geq\frac{9}{4}$

Suy ra $S_1.S_2$ lớn nhất bằng $\frac{9}{4}$ khi $e^k=\frac{5}{2}\Leftrightarrow k=\ln\left(\frac{5}{2}\right)$.

**Câu 154:** Cho hình phẳng $(H)$ giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=0$, $x=0$, $x=4$. Đường thẳng $y=k$ $(0<k<16)$ chia hình $(H)$ thành hai phần có diện tích $S_1$, $S_2$ (hình vẽ). Tìm $k$ để $S_1=S_2$




**A.** $k = 3$. **B.** $k = 4$. **C.** $k = 5$. **D.** $k = 8$

**Lời giải :**

**Chọn B**

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = k \Rightarrow x = \sqrt{k}$

Ta có

- $S_1 + S_2 = \int_0^4 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^4 = \frac{64}{3}$.

- $S_1 = \int_{\sqrt{k}}^4 \left(x^2 - k\right) dx = \left.\left(\frac{x^3}{3} - kx\right)\right|_0^{\sqrt{k}} = -4k + \frac{2k\sqrt{k}}{3} + \frac{64}{3}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow S_1 = \frac{1}{2}\left(S_1 + S_2\right) \Leftrightarrow -4k + \frac{2k\sqrt{k}}{3} + \frac{64}{3} = \frac{32}{3} \Leftrightarrow 2k\sqrt{k} - 12k + 32 = 0$

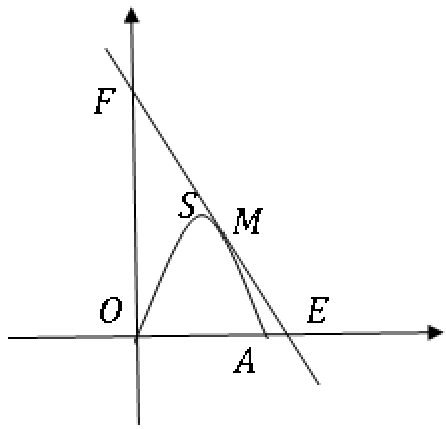
$\xrightarrow{t=\sqrt{k}\ (0<t<4)} 2t^3 - 12t^2 + 32 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow k = 4$.

**Câu 155:** Cho parabol $(P)$: $y = -x^2 + 2x$, có đỉnh $S$ và $A$ là giao điểm khác $O$ của $(P)$ và trục hoành. $M(x_0; y_0)$ là điểm di động trên $SA$ ($M(x_0; y_0)$ không trùng với $S$). Tiếp tuyến $d$ của $(P)$ tại $M$ cắt $Ox$, $Oy$ lần lượt tại $E$ và $F$. $S_1$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P)$, đường thẳng $d$ và trục $0y$, $S_2$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P)$, đường thẳng $d$ và trục $0x$. Khi tổng $S_1 + S_2$ nhỏ nhất, giá trị của $P = x_0 + y_0$ bằng:

**A.** $\frac{23}{9}$ **B.** $\frac{44}{9}$ **C.** $\frac{20}{9}$ **D.** 4

**Lời giải:**

**Chọn C**




Tiếp tuyến tại $M\left(m;2m-m^2\right),1<m\le 2$ có phương trình:

$y=\left(2-2m\right)\left(x-m\right)+2m-m^2 \Leftrightarrow y=\left(2-2m\right)x+m^2$

Ta có: $E\left(0;m^2\right);F\left(\dfrac{m^2}{2m-2};0\right)$ với $1<m\le 2$

Gọi $S$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\left(P\right)$ và trục hoành: $S=\int\limits_0^2\left|-x^2+2x\right|dx=\dfrac{4}{3}$.

$S_{OEF}=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{m^4}{2m-2}\right|=\dfrac{m^4}{4\left(m-1\right)}$

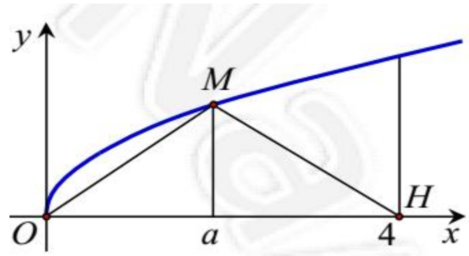
Tathấy, $S_1+S_2=S_{OEF}-S$, $\left(S_1+S_2\right)\min \Leftrightarrow \left(S_{OEF}\right)\min$

Khảo sát hàm $f\left(m\right)=\dfrac{m^4}{4\left(m-1\right)}$ $\forall 1<m\le 2$ ta được $Min_{f(m)}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^3$ khi $m=\dfrac{4}{3}$ .

$\left(S_1+S_2\right)\min=\left(\dfrac{4}{3}\right)^3-\dfrac{4}{3}=\dfrac{28}{27}$ khi $m=\dfrac{4}{3}$. Khi đó $M(\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{9})$ .

Vậy $x_0+y_0=\dfrac{20}{9}$ .

**Câu 156: [Hàn Thuyên,tỉnh Bắc Ninh,lần 3,năm 2018]** Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x=a\left(0<a<4\right)$ cắt đồ thị hàm $y=\sqrt{x}$ tại M. Gọi $V_1$ là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết $V=2V_1$ . Tìm giá trị $a$




**A.** $a=2$. **B.** $a=2\sqrt{2}$. **C.** $a=\frac{5}{2}$. **D.** $a=3$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Gọi $V$ là thể tích khối tròn xoay do $(H):\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=0 \\ x=4 \end{cases}$ quay quanh Ox

$\Rightarrow V=\pi\int\limits_0^4\left(\sqrt{x}\right)^2dx=\pi\int\limits_0^4 x\mathrm{d}x=8\pi$

Gọi $V_1$ là thể tích khối tròn xoay do $(H_1):\Delta OMH$ quay quanh $Ox$

Khi $\Delta OMH$ quay quanh $Ox$ tạo ra 2 khối nón tròn xoay là khối nón đỉnh $O$, trục $ON$, bán kính đáy $NM$ và khối nón đỉnh $H$, trục $HN$, bán kính đáy $NM$

$\Rightarrow V_1=\frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{a}\right)^2a+\frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{a}\right)^2(4-a)$

$\Rightarrow V_1=\frac{1}{3}\pi.a.4$

$V=2V_1\Leftrightarrow 8\pi=2.\frac{4}{3}\pi.a\Leftrightarrow a=3$.

**Câu 157: [Chuyên KHTN, Hà Nội, lần 2, năm 2018 - Câu 9]**

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y=x^2$ và $y=|x-2|$ bằng

**A.** $\frac{13}{12}$. **B.** $\frac{21}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

+) Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=x^2$ và $y=|x-2|$ là $x^2=|x-2|$ suy ra $x=-2$ và $x=1$.

+) Nhận xét rằng đồ thị $y=x^2$ chỉ cắt đồ thị $y=|x-2|$ trên $(-\infty;2]$ (có thể dựa vào đồ thị vẽ ra). Bài toán đưa về tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=x^2$ và $y=2-x$.

+) Ta có $S=\int_{-2}^{1}\left(2-x-x^2\right)dx=\left.\left(2x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\right)\right|_{-2}^{1}=\dfrac{9}{2}$. Chọn **C.**

**Câu 158:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=\dfrac{1}{2}$; $x=1$; $y=0$ và đồ thị hàm số $y=\log_2 x$.

**A.** $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\ln 2}$. **B.** $\dfrac{1}{2\ln 2}$. **C.** $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\ln 2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\ln 2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

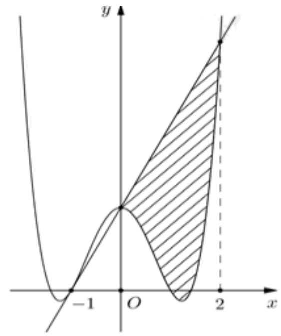
+) Đồ thị $y=\log_2 x$ cắt đường thẳng $x=\dfrac{1}{2}$ tại $A\left(\dfrac{1}{2};-1\right)$ và cắt đường thẳng $x=1$ tại $B(1;0)$.

+) Diện tích hình phẳng cần tính $S=\int_{\frac{1}{2}}^{1}|\log_2 x|dx=-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\log_2 x\,dx$.

+) $S=-\left(x\log_2 x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}+\int_{\frac{1}{2}}^{1}x.\dfrac{1}{x\ln 2}dx$

+) $S=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{1}{2}+\left.\dfrac{x}{\ln 2}\right|_{\frac{1}{2}}^{1}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1-\frac{1}{2}}{\ln 2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\ln 2}$. Chọn **A.**

**Câu 159:** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị $(C)$, biết rằng $(C)$ đi qua điểm $A(-1;0)$. Tiếp tuyến $d$ tại $A$ của $(C)$ cắt $(C)$ tại 2 điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2, diện tích hình phẳng giới hạn bởi $d$, đồ thị $(C)$ và hai đường thẳng $x=0; x=2$ có diện tích bằng $\dfrac{28}{5}$ (phần gạch chéo trong hình vẽ).




Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $d$, đồ thị $(C)$ và hai đường thẳng $x=-1; x=0$ bằng

**A.** $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{1}{9}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{2}{9}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

+) Điểm $A(-1;0)$ thuộc đồ thị $(C) \Rightarrow a+b+c=0$

+) Phương trình tiếp tuyến tại $A(-1;0)$ là $(d): y=y'(1)(x+1) \Leftrightarrow y=(-4a-2b)(x+1)$.

+) Phương trình hoành độ giao điểm của $d$ và đồ thị $(C)$ là

$(-4a-2b)(x+1)=ax^4+bx^2+c$ $(*)$

+) Mà $x=0, x=2$ là nghiệm của (*) suy ra $\begin{cases}-4a-2b=c\\-12a-6b=16a+4b+c\end{cases}(1)$

+) Có $\frac{28}{5}=\int\limits_0^2\left[(-4a-2b)(x+1)-ax^4-bx^2-c\right]\mathrm{dx} \Leftrightarrow 4(-4a-2b)-\frac{32}{3}a-\frac{8}{3}b-2c=\frac{28}{5}$ $(2)$

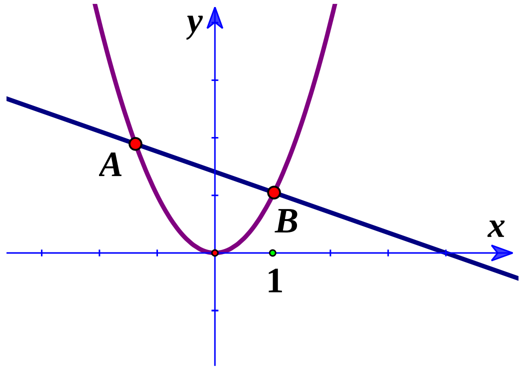
+) Từ $(1),(2)$ ta được $a=1, b=-3, c=2$ suy ra $y=x^4-3x^2+2$.

+) Vậy diện tích cần tính là $S=\int\limits_{-1}^{0}\left|2x+2-x^4+3x^2-2\right|\mathrm{dx}=\frac{1}{5}$. Chọn **A.**

**Câu 160:** Cho parabol $(P): y=x^2$ và hai điểm $A, B$ thuộc $(P)$ sao cho $AB=2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P)$ và đường thẳng $AB$ đạt giá trị lớn nhất bằng:

**A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

**Lời giải**




**Chọn C.**

+) Gọi đường thẳng $d: y = ax + b$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $(P)$ và $d$ là: $x^2 - ax - b = 0$

Đường thẳng cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt $A, B$ khi $\Delta = a^2 + 4b > 0$.

Gọi hai nghiệm của phương trình là $x_1, x_2$; $(x_1 < x_2)$ . Khi đó ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1.x_2 = -b \end{cases}$

Gọi giao điểm của $d$ và $(P)$ là $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

Ta có: $AB = 2 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2\right] + a^2\left[(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2\right] = 4$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 4b) + a^2(a^2 + 4b) = 4 \Leftrightarrow a^2 + 4b = \frac{4}{a^2 + 1} \quad (*)$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $d$ và $(P)$ là:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \left|x^2 - ax - b\right| dx = \int_{x_1}^{x_2} (ax + b - x^2)\, dx = \left(\frac{ax^2}{2} + bx - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{ax_2^2}{2} + bx_2 - \frac{x_2^3}{3} - \left(\frac{ax_1^2}{2} + bx_1 - \frac{x_1^3}{3}\right) = (x_2 - x_1)\left[\frac{a}{2}(x_2 + x_1) + b - \frac{x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2}{3}\right]$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2}\left[\frac{a^2}{2} + b - \frac{a^2 + b}{3}\right] = \sqrt{a^2 + 4b}.\frac{a^2 + 4b}{6} = \frac{\left(\sqrt{a^2 + 4b}\right)^3}{6} = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{a^2 + 1}}\right)^3}{6} = \frac{4}{3}.\frac{1}{\sqrt{(a^2 + 1)^3}}.$$

Vì $a^2 + 1 \ge 1, \forall a \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{(a^2 + 1)^3}} \le 1$ nên $S \le \dfrac{4}{3}$.

**Câu 161:** [THPT Chuyên Trần Phú, Hải Phòng, lần 2, 2018] Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=\sqrt{y},\ \ y=-x+2,\ x=0$ quay quanh $Ox$ có giá trị là kết quả nào sau đây

**A.** $V=\frac{1}{3}\pi$. **B.** $V=\frac{3}{2}\pi$. **C.** $V=\frac{32}{15}\pi$. **D.** $V=\frac{11}{6}\pi$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có $x=\sqrt{y}\Rightarrow\begin{cases}x^2=y\\x;y\ge 0\end{cases}$.

Phương trình hoành độ giao điểm là

$x^2=-x+2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\quad(TM)\\x=-2\,(L)\end{array}\right.$.

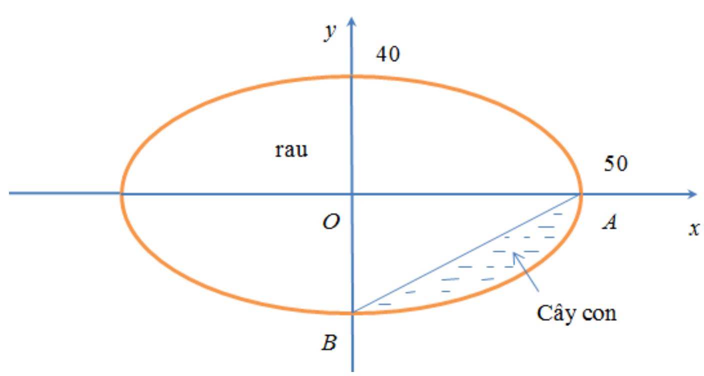
Thể tích cần tìm là: $V=\pi\int\limits_0^1\left[\left(-x+2\right)^2-x^4\right]\mathrm{d}x=\frac{32}{15}\pi$

**Câu 162:** Một mảnh vườn hình elip có trục lớn bằng $100\text{ m}$, trục nhỏ bằng $80\text{ m}$ được chia thành 2 phần bởi một đoạn thẳng nối hai đỉnh liên tiếp của elip. Phần nhỏ hơn trồng cây con và phần lớn hơn trồng rau. Biết lợi nhuận thu được là $2000$ mỗi $\text{m}^2$ trồng cây con và $4000$ mỗi $\text{m}^2$ trồng rau. Hỏi thu nhập từ cả mảnh vườn là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn ).

**A.** $31904000$. **B.** $23991000$. **C.** $10566000$. **D.** $17635000$.

**Lời giải**

**Chọn B**



Chứng minh: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi elip $(E)$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (với $a>b>0$) là $\pi ab$

Thật vậy, phần đường elip nằm trên trục hoành có phương trình $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Do $Ox,Oy$ là trục đối xứng của elip $(E)$ nên diện tích hình phẳng giới hạn bởi elip $(E)$ là

$S=4\int\limits_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$.

Đặt $x=a\sin t$ với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ta được $S=4b\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\,d\left(a\sin t\right)=4ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\pi ab$.

Xét mảnh vườn: $a=50,b=40$

Diện tích trồng cây con là: $S_c=\frac{\pi}{4}.40.50-S_{\Delta OAB}=(\pi-2)500\ \left(\text{m}^2\right)$

Diện tích trồng rau là: $S_r=\pi.40.50-(\pi-2)500=(3\pi+2)500$

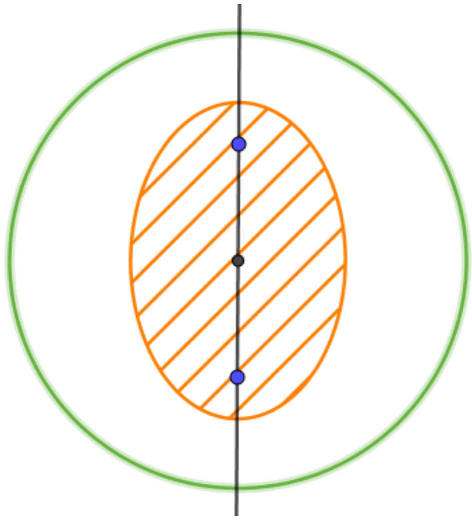
Thu nhập từ mảnh vườn là: $(\pi-2)500.2000+(3\pi+2)500.4000\approx 23991000$.

**Câu 163:** Một quả đào hình cầu có đường kính $6\,\text{cm}$. Hạt của nó là khối tròn xoay sinh ra bởi hình Elip khi quay quanh đường thẳng nối hai tiêu điểm $F_1$, $F_2$. Biết tâm của Elip trùng với tâm của khối cầu và độ dài trục lớn, trục nhỏ lần lượt là $4\,\text{cm}$, $2\,\text{cm}$. Thể tích phần cùi (phần ăn được) của quả đào bằng $\frac{a}{b}\pi\left(\text{cm}^3\right)$ với $a,b$ là các số thực và $\frac{a}{b}$ tối giản, khi đó $a-b$ bằng

**A.** $97$. **B.** $36$. **C.** $5$. **D.** $103$.

**Lời giải**

**Chọn A**



Chọn hệ trục tọa độ $Oxy$ sao cho tâm Elip trùng với gốc tọa độ $O$, hai tiêu điểm nằm trên trục $Ox$. Khi đó phương trình Elip là $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$, xét $y=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ .

Thể tích khối tròn xoay khi quay Elip trên quanh trục lớn là:

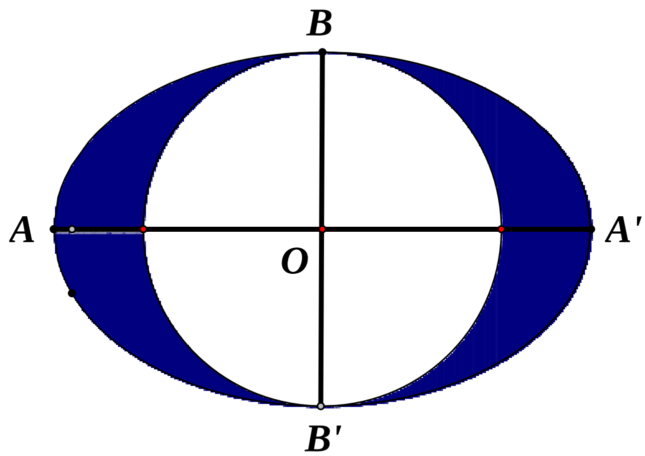
$V_1=2\pi\int_0^2 y^2dx=2\pi\int_0^2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx=\frac{8}{3}\pi$.

Thể tích quả đào hình cầu $V=\frac{4}{3}\pi.3^3=36\pi$.

Do đó thể tích phần cùi của quả đào là $V-V_1=\frac{100}{3}\pi$. Do đó $a-b=97$.

**Câu 164:** Trong mặt phẳng cho đường Elip có độ dài trục lớn là $AA'=8$, độ dài trục nhỏ là $BB'=6$; đường tròn tâm $O$ đường kính là $BB'$ như hình vẽ. Tính thể tích vật thể tròn xoay

có được bằng cách cho miền hình phẳng giới hạn bởi đường Elip và đường tròn (*phần hình phẳng được tô đậm trên hình vẽ*) quay xung quanh trục $AA'$.




**A.** $36\pi$. **B.** $12\pi$. **C.** $16\pi$. **D.** $\dfrac{64}{3}\pi$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gắn hệ trục toạ độ $Oxy$ sao cho $O$ là tâm của đường tròn, $A, A' \in Ox$, $B, B' \in Oy$.

Phương trình elip là $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$, xét $y=3\sqrt{1-\dfrac{x^2}{16}}$.

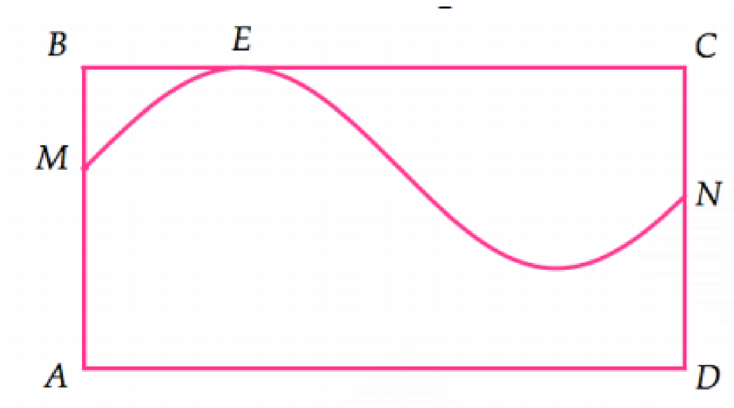
Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay Elip quanh trục $Ox$ là:

$V_1 = 2\pi\int_0^4 9\left(1-\dfrac{x^2}{16}\right)dx = 48\pi$.

Thể tích khối cầu là: $V = \dfrac{4}{3}\pi.3^3 = 36\pi$.

Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là: $V - V_1 = 12\pi$.

**Câu 165:** Từ một tấm tôn hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 30\,cm, AD = \dfrac{55\pi}{3}cm$. Người ta cắt miếng tôn theo đường hình $\sin$ như hình vẽ bên để được hai miếng tôn nhỏ. Biết $AM = 20\,cm$, $CN = 15\,cm$, $BE = 5\pi\,cm$.Tính thể tích của lọ hoa được tạo thành bằng cách quay miếng tôn lớn quanh trục $AD$ (kết quả làm tròn đến hàng trăm).




**A.** $81788cm^3$. **B.** $87388cm^3$. **C.** $83788cm^3$. **D.** $7883cm^3$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Chọn hệ trục $Oxy$ sao cho $A \equiv O$, $D \in Ox, B \in Oy$.

Ta có $BE = 5\pi$ suy ra hàm số tuần hoàn với chu kì $T = 20\pi$.

Suy ra phương trình đồ thị hình $Sin$ cần tìm có dạng: $y = a\sin\left(\frac{x}{10}\right) + b$.

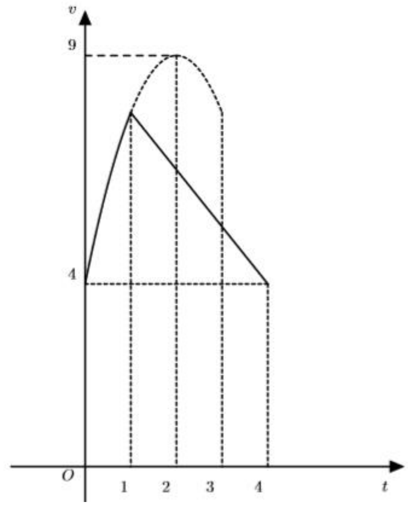
Do đồ thị hình $\sin$ đi qua $M(0;20)$, $N\left(\frac{55\pi}{3};15\right)$ nên ta có:

$$\begin{cases} a\sin\left(\frac{1}{10}.0\right) + b = 20 \\ a\sin\left(\frac{1}{10}.\frac{55\pi}{3}\right) + b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 20 \end{cases}.$$

Ta có phương trình đồ thị hình $\sin$ cần tìm là $y = 10\sin\left(\frac{x}{10}\right) + 20$.

Thể tích cần tìm là: $\pi\int_0^{\frac{55\pi}{3}}\left(10\sin\left(\frac{x}{10}\right) + 20\right)^2 \mathrm{d}x \simeq 83788cm^3$.

**Câu 166: [THPT CHUYÊN LQĐ, LAI CHÂU, lần 1, 2018]** Một vật chuyển động trong bốn giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình vẽ bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại vật chuyển động chậm dần đều. Tính quãng đường $S$ mà vật di chuyển được trong $4$ giờ đó ( kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).




A. $S=23,71\,km$.     B. $S=23,58\,km$.     C. $S=23,56\,km$.     D. $S=23,72\,km$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Với $t\in[0;1]$, gọi $v(t)=at^2+bt+c$. Ta có :

$v(0)=4; v(2)=9;$ hoành độ đỉnh parabol bằng $2$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} c=4 \\ 4a+2b+c=9 \\ -\dfrac{b}{2a}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{5}{4} \\ b=5 \\ c=4 \end{cases}.$$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ $0$ đến $1$ giờ bằng :

$$S_1=\int_0^1\left(-\frac{5}{4}t^2+5t+4\right)dt=\frac{73}{12}\,km.$$

Với $t\in(1;4]$, gọi $v(t)=mt+n$. Ta có hệ phương trình :

$\begin{cases} m+n=\dfrac{31}{4} \\ 4m+n=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-\dfrac{5}{4} \\ n=9 \end{cases}$. Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ $1$ đến $4$ giờ bằng : $S_2=\displaystyle\int_1^4\left(-\frac{5}{4}t+9\right)dt=\frac{141}{8}\,km$

Quãng đường $S$ mà vật di chuyển được trong $4$ giờ bằng : $S=S_1+S_2=23,71\,km$.

**Câu 167:** Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$, $x=a$ với $a\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{1}{2}\left(-3+4\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$ hỏi số $a$ thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $\left(\frac{7}{10};1\right)$. **B.** $\left(\frac{51}{50};\frac{11}{10}\right)$. **C.** $\left(\frac{11}{10};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(1;\frac{51}{50}\right)$

**Lời giải**

**Chọn B.**

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$, $x=a$ là

$$S=\int_0^a\left|\sin x-\cos x\right|\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\sin x-\cos x\right|\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{a}\left|\sin x-\cos x\right|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos x-\sin x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{a}\left(\sin x-\cos x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos x-\sin x\right)\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{4}}^{a}\left(\cos x-\sin x\right)\mathrm{d}x=\sqrt{2}-1-\left(\sin x+\cos x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{a}=2\sqrt{2}-1-\cos a-\sin a\,.$$

Theo bài ra ta có:

$$\left(-3+4\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=-2+4\sqrt{2}-2\cos a-2\sin a\Leftrightarrow\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\sin\frac{5\pi}{12}.$$

$$\Rightarrow a+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}\Leftrightarrow a=\frac{\pi}{3}\approx1,047\Rightarrow a\in\left(\frac{51}{50},\frac{11}{10}\right).$$

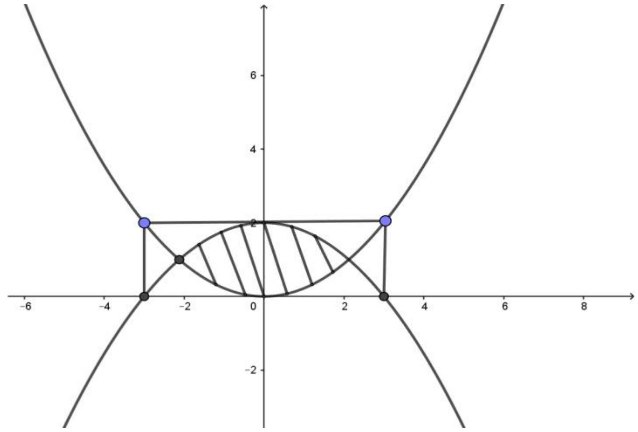
**Câu 168:** **(THPT Nguyễn Đăng Đạo – Bắc Ninh lần 3-2018)** Cho một mảnh vườn hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng là 2m, chiều dài gấp ba chiều rộng. Người ta chia mảnh vườn bằng cách dùng hai đường parabol, mỗi đường parabol có đỉnh là trung điểm mỗi cạnh dài và đi qua hai mút của canh dài đối diện. Tính tỉ số diện tích phần mảnh vườn nằm ở miền trong hai parabol với diện tích phần còn lại.

**A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2+3\sqrt{2}}{7}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



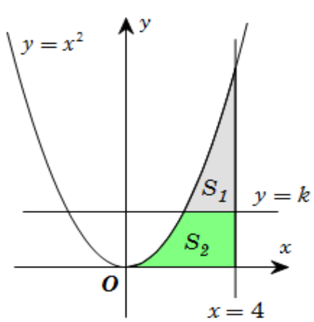

Ta lập được phương trình các parabol là $y=\frac{2}{9}x^2$ và $y=-\frac{2}{9}x^2+2$. Khi đó mảnh vườn nằm ở miền trong hai parabol là hình phẳng giới hạn bởi 2 đường $y=\frac{2}{9}x^2$ và $y=-\frac{2}{9}x^2+2$. Khi đó diện tích của mảnh vườn nằm trong hai parabol là:

$$S=2\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}(-\frac{4}{9}x^2+2)dx=4\sqrt{2}\,m^2 .$$

Diện tích hình chữ nhật là: $12m^2$

Khi đó tỉ số diện tích phần mảnh vườn nằm ở miền trong hai parabol với diện tích phần còn lại là: $\frac{4\sqrt{2}}{12-4\sqrt{2}}=\frac{2+3\sqrt{2}}{7}$

**Câu 169:** Cho hình phẳng $(H)$ giới hạn bởi các đường $y=x^2, y=0, x=0, x=4$. Đường thẳng $y=k\,(0<k<16)$ chia hình $(H)$ thành hai phần có diện tích $S_1, S_2$ như hình vẽ. Tìm $k$ để $S_1=S_2$.




**A.** $8$. **B.** $3$. **C.** $5$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

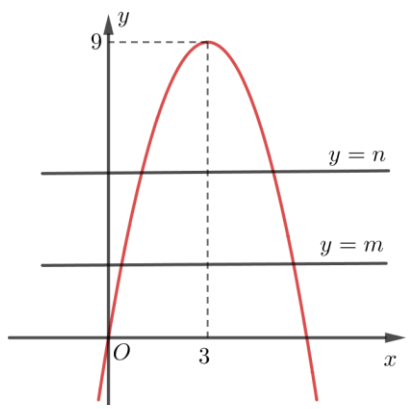
Xét phương trình $x^2 = k \Leftrightarrow x = \sqrt{k} \in (0;4)$.

Khi đó $S_1 = \int_{\sqrt{k}}^{4} \left|x^2 - k\right| dx = \int_{\sqrt{k}}^{4} \left(x^2 - k\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - kx\right)\Big|_{\sqrt{k}}^{4} = \frac{2}{3}k\sqrt{k} - 4k + \frac{64}{3}$.

$S_2 = \int_0^4 x^2 dx - S_1 = \frac{64}{3} - S_1$

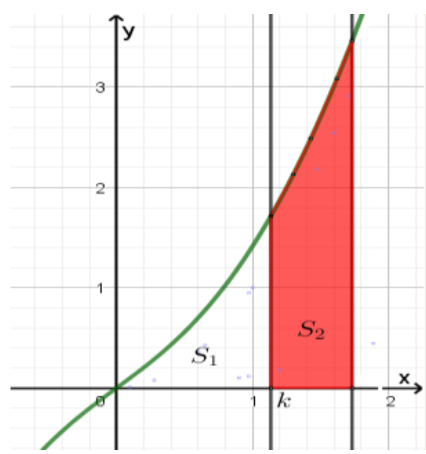
Theo giả thiết ta có $S_1 = S_2 \Leftrightarrow S_1 = \frac{64}{3} - S_1 \Leftrightarrow S_1 = \frac{32}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}k\sqrt{k} - 4k + \frac{32}{3} = 0 \Leftrightarrow k = 4$.

**Câu 170:** Gọi ($H$) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị ($P$) của hàm số $y = 6x - x^2$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y = m, y = n$ chia hình ($H$) thành ba phần có diện tích bằng nhau. Tính $Q = (9-m)^3 + (9-n)^3$




**A.** $Q = 405$. **B.** $Q = 409$. **C.** $Q = 407$. **D.** $Q = 403$.

**Câu 171:** Cho hình cong ($H$) giới hạn bởi các đường $y = x\sqrt{x^2+1}$; $y = 0$; $x = 0$ và $x = \sqrt{3}$. Đường thẳng $x = k$ với $1 < k < \sqrt{3}$ chia hình ($H$) thành 2 phần có diện tích là $S_1$ và $S_2$. Để $S_1 = 6S_2$ thì $k$ gần bằng




**A.** 1,37.

**B.** 1,63.

**C.** 0,97.

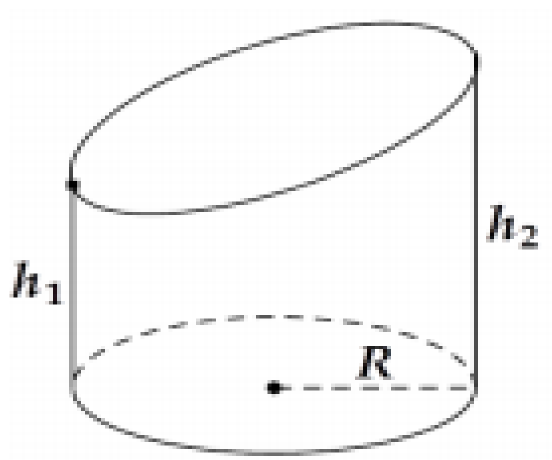
**D.** 1,24.

**Câu 172:** Cho khối trụ có chiều cao $20$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng ta được thiết diện là hình elip có độ dài trục lớn bằng $10$. Thiết diện chia khối trụ ban đầu thành hai nửa, nửa trên có thể tích $V_1$, nửa dưới có thể tích $V_2$. Khoảng cách từ một điểm thuộc thiết diện gần đáy dưới nhất và điểm thuộc thiết diện xa đáy dưới nhất tới đáy dưới lần lượt là $8$ và $14$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

**A.** $\frac{11}{20}$. **B.** $\frac{9}{11}$. **C.** $\frac{9}{20}$. **D.** $\frac{6}{11}$.

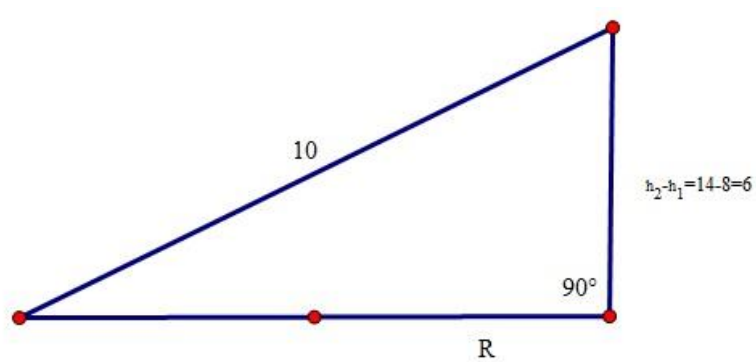
**Lời giải**

**Chọn B.**




Ta có công thức tính nhanh khối trụ cụt có bán kính $R$ là $V = \pi R^2\left(\frac{h_1+h_2}{2}\right)$.

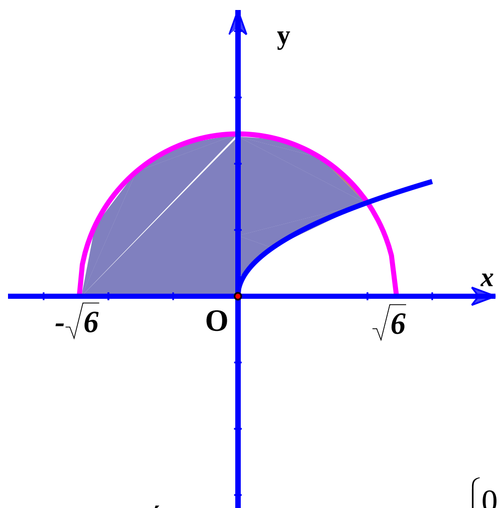
Theo bài ra ta có $h_1 = 8; h_2 = 14$, thiết diện là hình elip có độ dài trục lớn bằng $10$.




Ta dễ dàng tính được bán kính của khối trụ $2R = \sqrt{10^2 - 6^2} \Rightarrow R = 4$.

Khi đó $V = \pi.4^2.20 = 320\pi$ ; $V_2 = \pi.4^2.\left(\frac{8+14}{2}\right) = 176\pi \Rightarrow V_1 = V - V_2 = 144\pi$. $\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{11}$.

**Câu 173:** Gọi $D$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{6-x^2}$ $(-6\le x\le 6)$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ bên). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh bởi khi quay hình phẳng $D$ quanh trục $Ox$.




**A.** $V=8\pi\sqrt{6}-2\pi.$ **B.** $V=8$

**Lời giải**

**Chọn D.**

Tọa độ giao điểm là nghiệm số phương trình $\begin{cases}0\le x\le\sqrt{6}\\ \sqrt{x}=\sqrt{6-x^2}\end{cases}\Leftrightarrow x=2$

Thể tích $V$ của vật thể tròn xoay sinh bởi khi quay quanh hình $D$

$$V=\pi\int_{-\sqrt{6}}^{0}\left(\sqrt{6-x^2}\right)^2dx+\pi\int_0^2\left(\left(\sqrt{6-x^2}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2\right)dx$$

$$V=\pi\int_{-\sqrt{6}}^{0}\left(6-x^2\right)dx+\pi\int_0^2\left(6-x^2-x\right)dx$$

$$V=\pi\left(6x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{6}}^{0}+\pi\left(6x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2$$

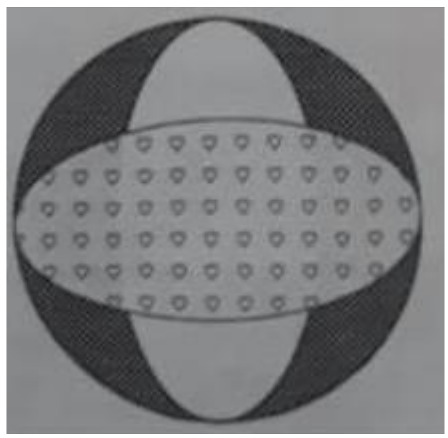
$$V=-\left(-6\sqrt{6}+\frac{6\sqrt{6}}{3}\right)\pi+\left(12-\frac{8}{3}-2\right)\pi$$

$$V=4\pi\sqrt{6}+\frac{22\pi}{3}.$$

Vậy đáp án D.

**Câu 174: [Nguyễn Khuyến, Bình Dương, 18/3,2018]** Cho đường tròn có đường kính bằng $4$ và $2$ đường Elip lần lượt nhận $2$ đường kính vuông góc nhau của đường tròn làm trục lớn, trục bé của mỗi Elip đều bằng $1$. Diện tích $S$ phần hình phẳng bên trong đường tròn và bên ngoài $2$ Elip (phần gạch carô trên hình vẽ) gần với kết quả nào nhất trong $4$ kết quả dưới đây?

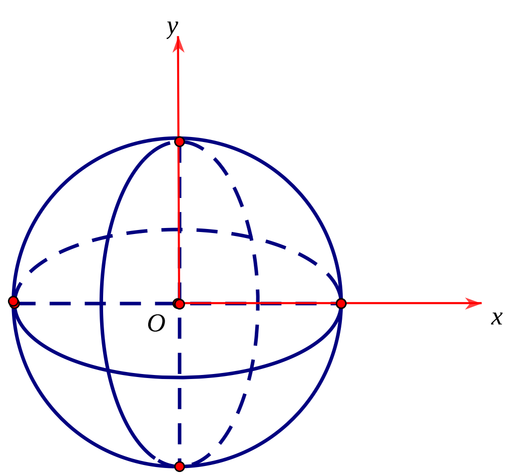
**A.** $S=4,8$. **B.** $S=3,9$. **C.** $S=3,7$. **D.** $S=3,4$.



**Lời giải**

**Chọn C.**

Chọn hệ trục $Oxy$ như hình vẽ.




Phương trình của Elip $(E_1)$ nằm ngang: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

Cung của ( $E_1$ ) nằm trên trục Ox có phương trình : $y=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$

Phương trình Elip ( $E_2$ ) đứng: $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$

Cung của ( $E_2$ ) nằm trên trục Ox có phương trình : $y=2\sqrt{1-x^2}$

Xét phương trình: $\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}=2\sqrt{1-x^2}; x>0$ có nghiệm $x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Cung đường tròn nằm phía trên Ox có phương trình : $y=\sqrt{4-x^2}$

Diện tích cần tính là

$$S=4\left(\int_0^{\frac{2\sqrt{5}}{5}}(\sqrt{4-x^2}-2\sqrt{1-x^2})dx+\int_{\frac{2\sqrt{5}}{5}}^{2}(\sqrt{4-x^2}-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2})dx\right)$$

$$=4\left(\int_0^{\frac{2\sqrt{5}}{5}}(\sqrt{4-x^2}-2\sqrt{1-x^2})dx+\frac{1}{2}\int_{\frac{2\sqrt{5}}{5}}^{2}\sqrt{4-x^2}dx\right.$$

Sử dụng máy tính ta được $S\approx 3,7$ .

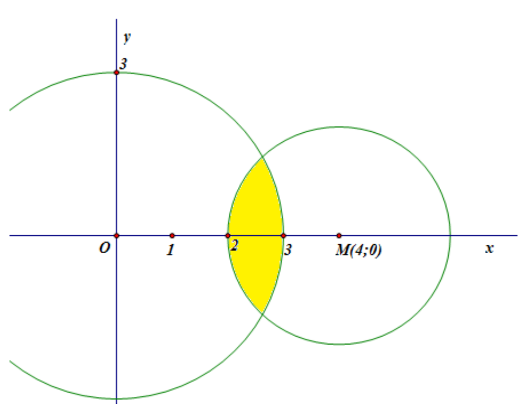
**Câu 175:** Trên cánh đồng cỏ có hai con bò được cột vào hai cây cọc khác nhau. Biết khoảng cách giữa hai cọc là 4 mét còn hai sợi dây cột hai con bò dài 3 mét và 2 mét. Tính phần diện tích mặt cỏ lớn nhất mà hai con bò có thể ăn chung (lấy giá trị gần đúng nhất).

**A.** $1,034m^2$. **B.** $1,574m^2$. **C.** $1,989m^2$. **D.** $2,824m^2$.

**Hướng dẫn giải**

Chọn **C**

Diện tích mặt cỏ ăn chung sẽ lớn nhất khi hai sợi dây được kéo căng và là phần giao của hai đường tròn.



Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ, gọi $O, M$ là vị trí của cọc. Bài toán đưa về tìm diện tích phần được tô màu.

Ta có phương trình đường tròn tâm $(O): x^2+y^2=3^2$ và phương trình đường tròn tâm $(M): (x-4)^2+y^2=2^2$

Phương trình các đường cong của đường tròn nằm phía trên trục $Ox$ là: $y=\sqrt{9-x^2}$ và $y=\sqrt{4-(x-4)^2}$

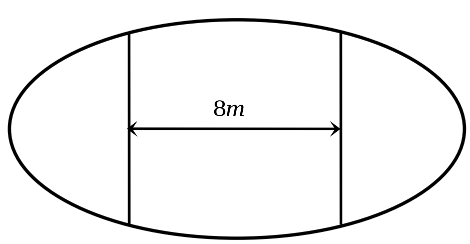
Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{4-(x-4)^2}=\sqrt{9-x^2} \Leftrightarrow 4+8x-16=9 \Leftrightarrow x=\dfrac{21}{8}$

Diện tích phần được tô màu là: $S=2\left[\displaystyle\int_2^{\frac{21}{8}}\sqrt{4-(x-4)^2}\,dx+\int_{\frac{21}{8}}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx\right]\approx 1{,}989$.

Ta có thể giải tích phân này bằng phép thế lượng giác, tuy nhiên để tiết kiệm thời gian nên bấm máy.

**Câu 176:** Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là $100.000$ đồng/$1m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

**A.** $7.862.000$ đồng. **B.** $7.653.000$ đồng. **C.** $7.128.000$ đồng. **D.** $7.826.000$ đồng.




**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Giả sử elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$.

Từ giả thiết ta có $2a=16 \Rightarrow a=8$ và $2b=10 \Rightarrow b=5$

Vậy phương trình của elip là $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} y=-\frac{5}{8}\sqrt{64-y^2} & (E_1) \\ y=\frac{5}{8}\sqrt{64-y^2} & (E_1) \end{array}\right.$

Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường $(E_1)$; $(E_2)$; $x=-4$; $x=4$ và diện tích của dải vườn là $S=2\int_{-4}^{4}\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\int_{0}^{4}\sqrt{64-x^2}\,\mathrm{d}x$

Tính tích phân này bằng phép đổi biến $x=8\sin t$, ta được $S=80\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Khi đó số tiền là $T=80\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right).100000=7652891,82\simeq 7.653.000$.

**Câu 177:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2\sqrt{x^2+1}$, trục $Ox$ và đường thẳng $x=1$ bằng $\frac{a\sqrt{b}-\ln\left(1+\sqrt{b}\right)}{c}$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên dương. Tính $a+b+c$.

**A.** 11. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 14.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có $S=\int_0^1 x^2\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x.x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(x^2+1\right) \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1} \end{cases}$. Khi đó,

$$S=\frac{1}{3}x\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow S=\frac{1}{3}2\sqrt{2}-\frac{1}{3}\int_0^1 x^2\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow S=\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}S-\frac{1}{3}I \qquad \left(I=\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$\Leftrightarrow S=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{I}{4}.$$

Ta tính $I=\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x^2+1} \\ dv=dx \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} du=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \\ v=x \end{cases}$. Khi đó,

$$I=x\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{2}-\int_0^1\left(\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow I=\sqrt{2}-\int_0^1\sqrt{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

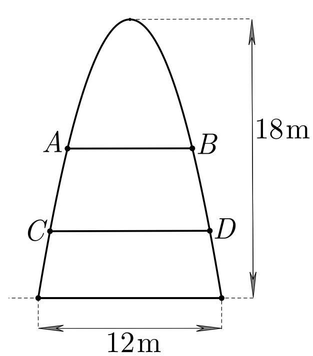
$$\Leftrightarrow I=\sqrt{2}-I+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Vậy $S=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)=\dfrac{3\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{8}$.

Tức $a=3,\ b=2,\ c=8$. Vậy $a+b+c=13$.

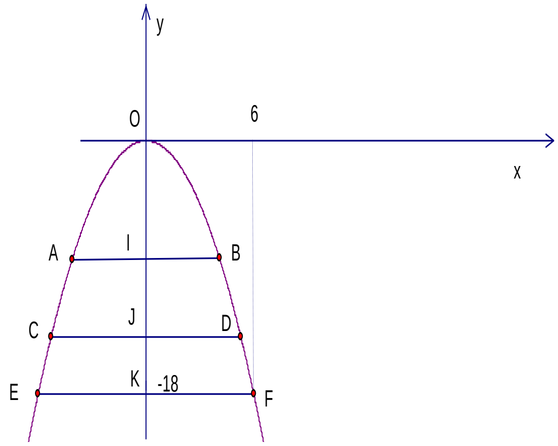
**Câu 178: [Chuyên ĐH Vinh lần 2 – 2018]** Một cổng chào có dạng hình parabol chiều cao $18\,\text{m}$, chiều rộng chân đế $12\,\text{m}$. Người ta căng hai sợi dây trang trí $AB, CD$ nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\dfrac{AB}{CD}$ bằng

**A.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{4}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **D.** $\dfrac{3}{1+2\sqrt{2}}$.




**Lời giải**

**Chọn C**




Thiết lập hệ toạ độ $Oxy$ trong mặt phẳng như hình vẽ. Khi đó parabol có phương trình

$y=-\frac{1}{2}x^2$. Gọi phương trình các đường thẳng là $AB: y=t, (t<0)$ $CD: y=k, (k<0)$

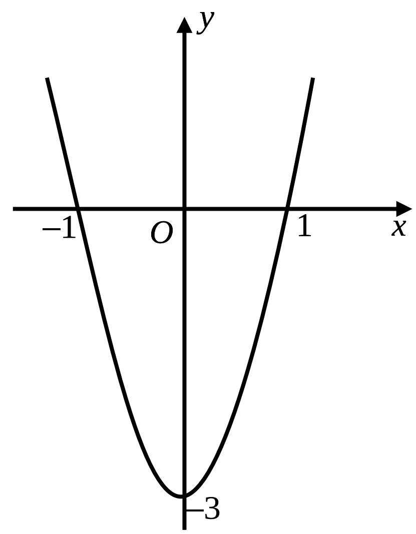
$\Rightarrow x_B=\sqrt{-2t}$, $x_D=\sqrt{-2k}$. Đường thẳng $EF: y=-18$. Diện tích tam giác cong $OKF$ là:

$\int_0^6\left(-\frac{1}{2}x^2+18\right)\mathrm{d}x=72$.

Từ giả thiết suy ra: diện tích tam giác cong $OBI=24, OJD=48 \Rightarrow \int_0^{\sqrt{-2t}}\left(-\frac{1}{2}x^2-t\right)\mathrm{d}x=24$

và $\int_0^{\sqrt{-2k}}\left(-\frac{1}{2}x^2-k\right)\mathrm{d}x=48$. Từ đó giải được $x_B=\sqrt[3]{72}$; $x_D=\sqrt[3]{144} \Rightarrow \frac{AB}{CD}=\frac{x_B}{x_D}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

**Câu 179:** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d, (a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0)$ có đồ thị $(C)$. Biết rằng đồ thị $(C)$ tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây:




Tính diện tích $S$ của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C)$ và trục hoành.

**A.** $S=9$.

**B.** $S=\frac{27}{4}$.

**C.** $S=\frac{21}{4}$.

**D.** $S=\frac{5}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Từ đồ thị suy ra $f'(x)=3x^2-3$.

$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(3x^2-3)\mathrm{d}x=x^3-3x+C$.

Do $(C)$ tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ $x_0$ âm nên

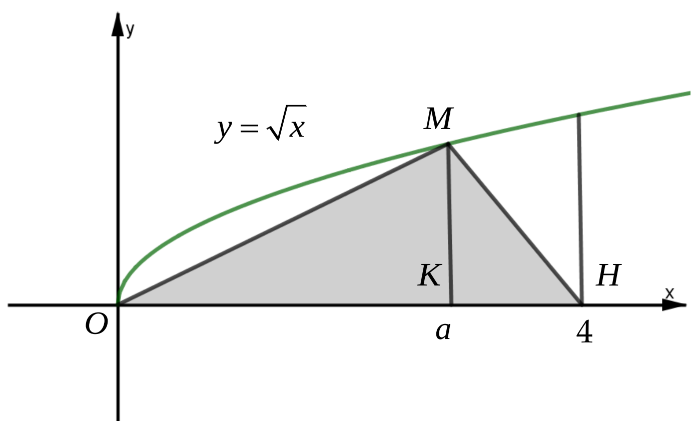
$f'(x_0)=0\Leftrightarrow 3x_0^2-3=0\Leftrightarrow x_0=-1$.

Suy ra $f(-1)=4\Leftrightarrow C=2\Rightarrow(C):y=x^3-3x+2$

Xét phương trình $x^3-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)\mathrm{d}x=\dfrac{27}{4}$.

**Câu 180: (THPT Gang thép Thái Nguyên lần 3 – 2018)** Gọi $V$ là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}, y=0$ và $x=4$ quay quanh trục $Ox$. Đường thẳng $x=a$ $(0<a<4)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại $M$ (hình vẽ bên). Gọi $V_1$ là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác $OMH$ quanh trục $Ox$. Biết rằng $V=2V_1$. Giá trị của $a$ thỏa mãn




**A.** $a\in[3;4)$. **B.** $a\in[2;3)$. **C.** $a\in[1;2)$. **D.** $a\in(0;1)$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có $V=\pi\int\limits_0^4 x dx=\pi\left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^4=8\pi$ (đvdt) $\Rightarrow V_1=4\pi$ (đvdt).

Mặt khác $V_1$ là tổng thể tích hai khối nón tròn xoay $V_{OMK}$ và $V_{HMK}$.

$V_{OMK} = \frac{1}{3}\pi.MK^2.OK = \frac{\pi a^2}{3}$ (vì $MK = \sqrt{a}$).

$V_{HMK} = \frac{1}{3}\pi.MK^2.HK = \frac{\pi a(4-a)}{3}$ (vì $HK = 4-a$).

$\Rightarrow V_1 = V_{OMK} + V_{HMK} = \frac{4\pi a}{3}$. Từ đó : $\frac{4\pi a}{3} = 4\pi \Rightarrow a = 3$.

**Câu 181: (THPT Gang Thép Thái Nguyên Lần 3 – 2018)** Kí hiệu $S_1, S_2, S_3$ lần lượt là diện tích hình vuông có cạnh là $1$, hình tròn có bán kính bằng $1$, hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = 2\sqrt{1-x^2}, y = 2(1-x)$. Tính tỉ số $\frac{S_1+S_3}{S_2}$.

**A.** $\frac{S_1+S_3}{S_2} = \frac{1}{5}$. **B.** $\frac{S_1+S_3}{S_2} = \frac{1}{3}$. **C.** $\frac{S_1+S_3}{S_2} = \frac{1}{2}$. **D.** $\frac{S_1+S_3}{S_2} = \frac{1}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

+ Ta có $S_1 = 1;\ S_2 = \pi$.

+ Ta thấy phương trình $2\sqrt{1-x^2} = 2(1-x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$. Khi đó:

$$S_3 = \int_0^1 |2\sqrt{1-x^2} - 2(1-x)|\,dx = 2\left|\int_0^1 \sqrt{1-x^2} - (1-x)\,dx\right| = 2\left|\int_0^1 \sqrt{1-x^2} - \int_0^1 (1-x)\,dx\right| = 2\left|\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx - \frac{1}{2}\right|$$

Tính $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

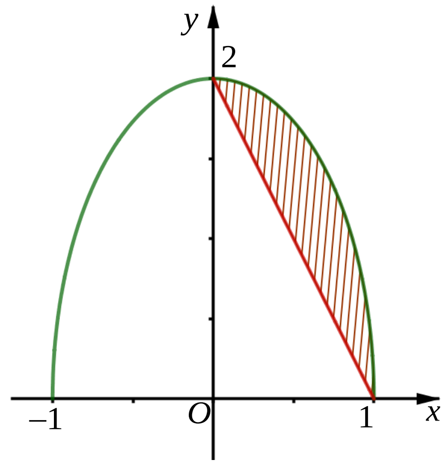
Đặt $x = \sin t,\ t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, khi đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

Suy ra $S_3 = \frac{\pi}{2} - 1$

Khi đó: $\frac{S_1+S_3}{S_2} = \frac{1}{2}$.

**Nhận xét:** $2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{4}S_0$ Trong đó $S_0$ là diện tích Elip $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

$\Rightarrow S_0 = 2\pi \Rightarrow 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}$




**Câu 182: [THPT Ninh Giang Hải Dương – HKII – 2018]** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong: $y=-2x^3+x^2+x+5$, $y=x^2-x+5$, ta được:

**A.** $S=2$ (đvdt). **B.** $S=3$ (đvdt). **C.** $S=1$ (đvdt). **D.** $S=0$ (đvdt).

**Lời giải**

**Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường cong $y=f(x)=-2x^3+x^2+x+5$,

$y=g(x)=x^2-x+5$ là: $-2x^3+x^2+x+5=x^2-x+5 \Leftrightarrow 2x^3-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$.

Diện tích giới hạn:

$$S=\int_{-1}^{0}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{-1}^{0}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{0}^{1}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|$$

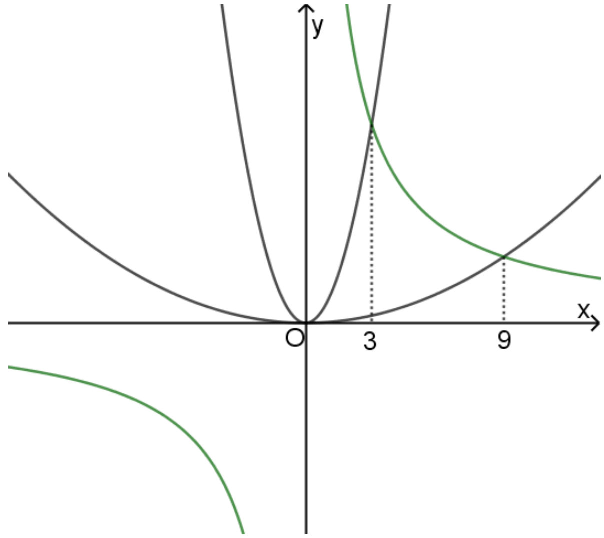
$$\Rightarrow S=\left|\int_{-1}^{0}\left(2x^3-2x\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{0}^{1}\left(2x^3-2x\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{1}{2}x^4-x^2\right)\Big|_{-1}^{0}\right|+\left|\left(\frac{1}{2}x^4-x^2\right)\Big|_{0}^{1}\right|=1 \text{ (đvdt).}$$

**Câu 183: [THPT Ninh Giang Hải Dương – HKII – 2018]** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau: $y=x^2$, $y=\frac{1}{27}x^2$, $y=\frac{27}{x}$, ta được:

**A.** $S=27\ln 2$ (đvdt). **B.** $S=27\ln 3$ (đvdt). **C.** $S=28\ln 3$ (đvdt). **D.** $S=29\ln 2$ (đvdt).

**Lời giải**

**Chọn B.**




Từ đồ thị ta có: $S=\int_0^3\left(x^2-\frac{1}{27}x^2\right)dx+\int_3^9\left(\frac{27}{x}-\frac{1}{27}x^2\right)dx=\frac{26}{81}x^3\Big|_0^3+27\ln x\Big|_3^9-\frac{1}{81}x^3\Big|_3^9=27\ln 3$.

**Câu 184: [THPT Ninh Giang Hải Dương – HKII – 2018]** Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=x^3; y=-x+2; y=0$ quanh trục $Ox$ là:

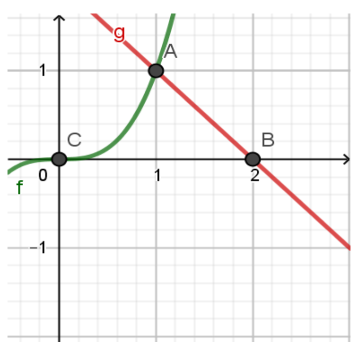
**A.** $V=\frac{4\pi}{21}$. **B.** $V=\frac{10\pi}{21}$. **C.** $V=\frac{\pi}{7}$. **D.** $V=\frac{\pi}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3=-x+2\Leftrightarrow x=1;\ -x+2=0\Leftrightarrow x=2$ (Hình vẽ).




Khi đó thể tích cần tìm là:

$V=\pi\int_0^1 x^6dx+\pi\int_1^2(-x+2)^2dx=\frac{10\pi}{21}$. Chọn đáp án B.

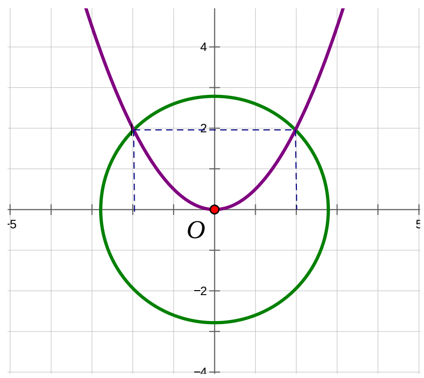
**Câu 185: [Sở Bắc Ninh Lần 2-2018]** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hình tròn $(C): x^2+y^2=8$

và parabol $(P): y=\frac{x^2}{2}$ chia hình tròn thành hai phần. Gọi $S_1$ là diện tích phần nhỏ, $S_2$ là diện tích phần lớn. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$?

**A.** $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$. **B.** $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi-2}{9\pi+2}$. **C.** $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{9\pi+2}$. **D.** $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+1}{9\pi-1}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Từ đồ thị trên ta có: $S_1=2\int_0^2\left[\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right]dx=2\int_0^2\sqrt{8-x^2}dx-\int_0^2 x^2dx=2\int_0^2\sqrt{8-x^2}dx-\frac{8}{3}$.

Xét $I=\int_0^2\sqrt{8-x^2}dx$. Đặt $x=2\sqrt{2}\sin t \Rightarrow\ dx=2\sqrt{2}\cos tdt$.

Đổi cận:

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | 0 | 2 |
| $t$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ |

Do vậy ta có: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{8-8\sin^2 t}.2\sqrt{2}\cos tdt=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt$

$\Rightarrow\ I=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 tdt=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt=4[t+\sin 2t]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi+2$

$\Rightarrow S_1=2\pi+\frac{4}{3}$.

Mặt khác: $S_1+S_2=\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2=8\pi\Rightarrow S_2=6\pi-\frac{4}{3}$.

Do vậy ta có: $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{2\pi+\frac{4}{3}}{6\pi-\frac{4}{3}}=\dfrac{3\pi+2}{9\pi-2}$.

**Cách 2:** Vì Parabol $(P)$ cắt đường tròn $(C)$ tại điểm chính giữa của cung thuộc góc phần tư thứ nhất có tọa độ là $A(2;2)$. Xét đường thẳng $d: y=x$ thì

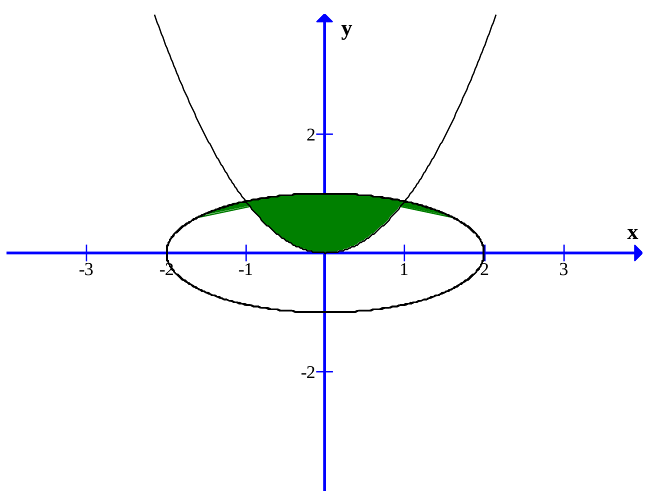
$$S_1=2\pi+2\int_0^2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x=2\pi+2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2=2\pi+\frac{4}{3}=\frac{6\pi+4}{3}.$$

$$S_2=8\pi-S_1=6\pi-\frac{4}{3}=\frac{18\pi-4}{3}.$$

Khi đó $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{3\pi+2}{9\pi-2}$.

**Câu 186: [ THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước, lần 4, năm 2018 - Câu 42]**

Cho $(H)$ là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2$ và đường Elip có phương trình $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của $(H)$ bằng

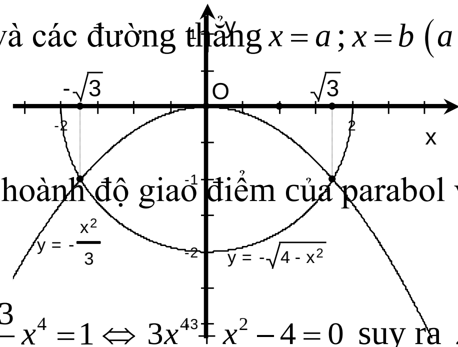



**A.** $\dfrac{2\pi+\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi+\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{3\pi}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

+) Phương pháp: Sử dụng công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, đồ thị $y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a\,; x = b\ (a < b)$ là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.




+) Cách giải: Phương trình hoành độ giao điểm của parabol và Elip đã cho là

$$\frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}x^4 = 1 \Leftrightarrow 3x^4 + x^2 - 4 = 0 \text{ suy ra } x = \pm 1.$$

Phương trình $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$. Bài toán đưa về tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$, đồ thị hàm số $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ và các đường thẳng: $x = -1$; $x = 1$.

Vì parabol và Elip đều đối xứng qua $Oy$ nên diện tích hình phẳng $(H)$ bằng

$$S_{(H)} = 2\int_0^1 \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \frac{\sqrt{3}x^2}{2}\right)dx = 2\int_0^1 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}dx - \sqrt{3}\int_0^1 x^2dx = \int_0^1 \sqrt{4 - x^2}dx - \left.\frac{\sqrt{3}x^3}{3}\right|_0^1 = I - \frac{\sqrt{3}}{3},$$

với $I = \int_0^1 \sqrt{4 - x^2}dx$,

Đặt $x = 2\sin t$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ suy ra $dx = 2\cos t\,dt\,; x = 0 \Rightarrow t = 0;\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos t\sqrt{4 - 4\sin^2 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\cos^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2(1 + \cos 2t)dt = 2\left.\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\right|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Do đó $S_{(H)} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{2\pi + \sqrt{3}}{6}$. Chọn A.

**Câu 187:** Cho $(H)$ là hình phẳng giới hạn bởi parabol $x^2 + 3y = 0$ và đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 4$ (hình vẽ). Diện tích của $(H)$ bằng

**A.** $\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{3}$.    **B.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{3}$.    **C.** $\dfrac{2\pi+\sqrt{3}}{3}$.    **D.** $\dfrac{\pi+\sqrt{3}}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol và đường đã cho là

$$x^2+\frac{x^4}{9}=4 \Leftrightarrow x^4+9x^2-36=0 \text{ suy ra } x=\pm\sqrt{3}.$$

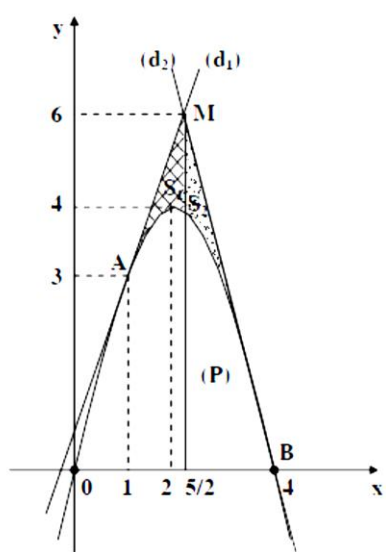
Phương trình $x^2+y^2=4 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{4-x^2}$. Bài toán đưa về tính diện tích hình phẳng giới hạn

bởi các đường: $\begin{cases} y=-\sqrt{4-x^2} \\ y=-\dfrac{x^2}{3} \\ x=-\sqrt{3} \\ x=\sqrt{3} \end{cases}$. Vì $(H)$ đối xứng qua $Oy$ nên

$$S_{(H)}=2\int_0^{\sqrt{3}}\left|\frac{x^2}{3}-\sqrt{4-x^2}\right|\mathrm{d}x=2\int_0^{\sqrt{3}}\left[\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{3}\right]\mathrm{d}x=2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x-2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{3}\mathrm{d}x$$

$$=4\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}-\frac{2x^3}{9}\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=\frac{4\pi+\sqrt{3}}{3}.$$ Chọn A.

**Câu 188:** Tính diện tích hình phẳng $(H)$ giới hạn bởi parabol $y=4x-x^2$ và tiếp tuyến với parabol kẻ từ điểm $M\left(\dfrac{5}{2};6\right)$.




**A.** $\dfrac{9}{4}$.    **D.** $\dfrac{4}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Phương trình tiếp tuyến với parabol đã cho kẻ từ điểm $M\left(\frac{5}{2};6\right)$ là $d_1: y=2x+1$ và $d_2: y=-4x+16$.

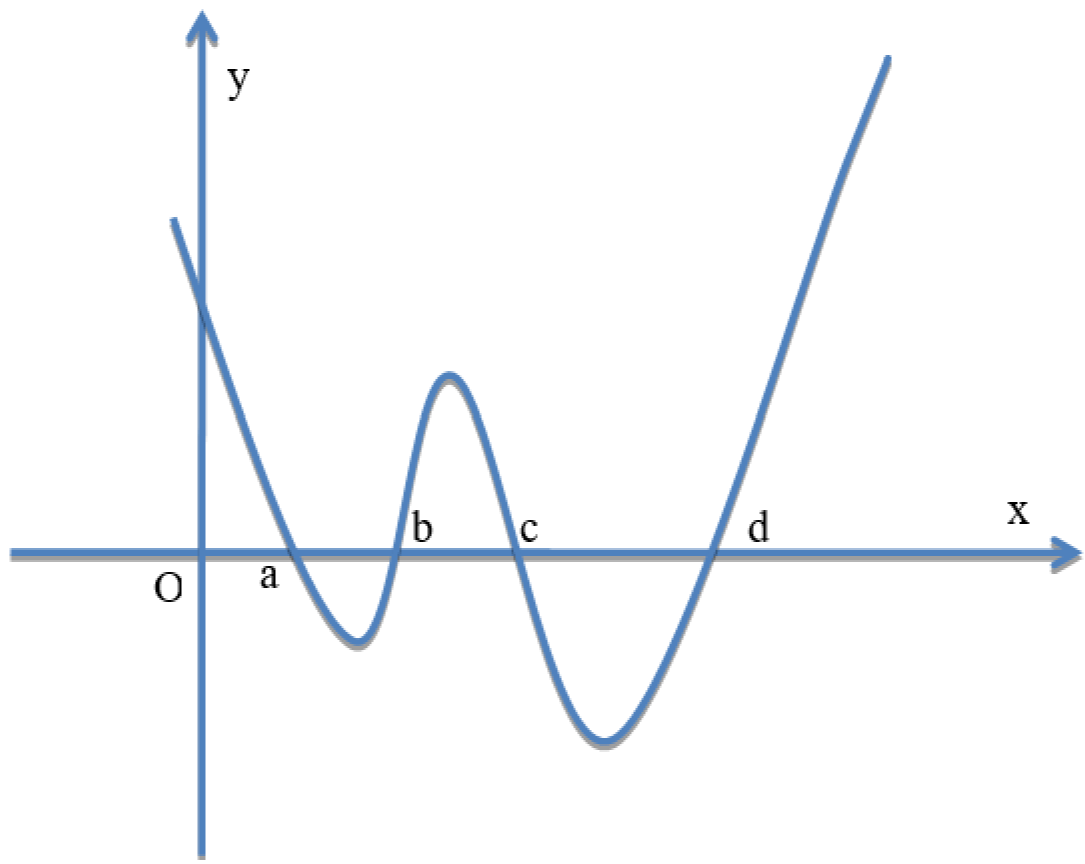
Chia hình phẳng $(H)$ thành hai hình lần lượt giới hạn bởi

$$(H_1):\begin{cases} y=2x+1 \\ y=4x-x^2 \\ x=1 \\ x=\frac{5}{2} \end{cases} \text{ và } (H_2):\begin{cases} y=-4x+16 \\ y=4x-x^2 \\ x=\frac{5}{2} \\ x=4 \end{cases}.$$

Suy ra $S_{(H)}=S_{(H_1)}+S_{(H_2)}=\int_1^{\frac{5}{2}}\left|2x+1-4x+x^2\right|dx+\int_{\frac{5}{2}}^4\left|-4x+16-4x+x^2\right|dx$

$=\int_1^{\frac{5}{2}}(x-1)^2\,dx+\int_{\frac{5}{2}}^4(x-4)^2\,dx=\left.\frac{(x-1)^3}{3}\right|_1^{\frac{5}{2}}+\left.\frac{(x-4)^3}{3}\right|_{\frac{5}{2}}^4=\frac{9}{4}$. Chọn A.

**Câu 189: [Chuyên Lương Văn Chánh, Long An- L2- năm 2018]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $R$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $a,b,c,d$ (hình bên). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.




**A.** $f(c) > f(a) > f(b) > f(d)$. **B.** $f(a) > f(c) > f(d) > f(b)$.

**C.** $f(a) > f(b) > f(c) > f(d)$. **D.** $f(c) > f(a) > f(d) > f(b)$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Gọi $S_1, S_2, S_3$ lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi ĐTHS $y = f'(x)$, trục Ox từ trái sang phải.

Ta có:

$+ S_1 > 0 \Leftrightarrow \int_a^b [0 - f'(x)]dx > 0 \Leftrightarrow -[f(b) - f(a)] > 0 \Leftrightarrow f(a) > f(b), (1).$ +

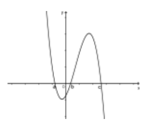
$S_1 < S_2 \Leftrightarrow \int_a^b [0 - f'(x)]dx < \int_b^c [f'(x) - 0]dx \Leftrightarrow f(a) - f(b) < f(c) - f(b) \Leftrightarrow f(a) < f(c), (2).$

$+ S_2 < S_3 \Leftrightarrow \int_b^c [f'(x) - 0]dx < \int_c^d [0 - f'(x)]dx \Leftrightarrow f(c) - f(b) < f(c) - f(d) \Leftrightarrow f(d) < f(b), (3).$

Từ $(1),(2),(3)$ ta có $f(c)>f(a)>f(b)>f(d)$.

**Phân tích:** Ý tưởng của bài toán dựa trên sử dụng ứng dụng của tích phân để tính diện tích hình phẳng.

**Câu 190:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $R$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $a,b,c$ (hình bên). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.



**A.** $f(\mathrm{c})>f(\mathrm{a})>f(\mathrm{b})$.

**B.** $f(\mathrm{c})>f(\mathrm{b})>f(\mathrm{a})$.

**C.** $f(\mathrm{a})>f(\mathrm{b})>f(\mathrm{c})$.

**D.** $f(\mathrm{b})>f(\mathrm{a})>f(\mathrm{c})$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Gọi $S_1,S_2$ lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi ĐTHS $y=f'(x)$, trục Ox từ trái sang phải.

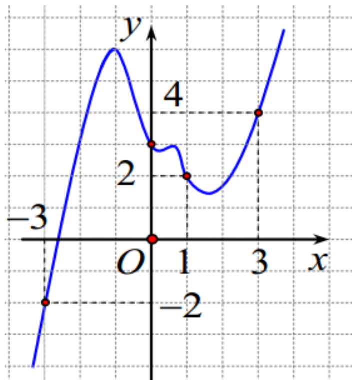
Ta có:

$+S_1>0\Leftrightarrow\int_a^b[0-f'(x)]dx>0\Leftrightarrow-[f(b)-f(a)]>0\Leftrightarrow f(a)>f(b),(1).$ +

$S_1<S_2\Leftrightarrow\int_a^b[0-f'(x)]dx<\int_b^c[f'(x)-0]dx\Leftrightarrow f(a)-f(b)<f(c)-f(b)\Leftrightarrow f(a)<f(c),(2).$

Từ $(1),(2)$ ta có $f(c)>f(a)>f(b)$.

**Câu 191:** [Chuyên Thái Bình Lần 4, năm 2018] Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-3;\,3]$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết $f(1)=6$ và $g(x)=f(x)-\dfrac{(x+1)^2}{2}$. Kết luận nào sau đây là đúng?




**A.** Phương trình $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm thuộc $[-3;3]$.

**B.** Phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-3;3]$.

**C.** Phương trình $g(x)=0$ không có nghiệm thuộc $[-3;3]$.

**D.** Phương trình $g(x)=0$ có đúng ba nghiệm thuộc $[-3;3]$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

$$g(x)=f(x)-\frac{(x+1)^2}{2}\Rightarrow g'(x)=f'(x)-(x+1).$$

Ta thấy đường thẳng $y=x+1$ là đường thẳng đi qua các điểm $(-3;-2),(1;2),(3;4)$.

Gọi $S$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi ĐTHS $y=f'(x)$,đường thẳng $y=x+1, x=-3, x=1.$

Gọi $S'$là diện tích hình phẳng giới hạn bởi ĐTHS $y=f'(x)$, đường thẳng $y=x+1, x=1, x=3.$

Do $f(1)=6\Rightarrow g(1)=4.$

Ta có: $S>4\Leftrightarrow \int_{-3}^{1} g'(x)dx>4\Leftrightarrow g(1)-g(-3)>4\Rightarrow g(-3)<0.$

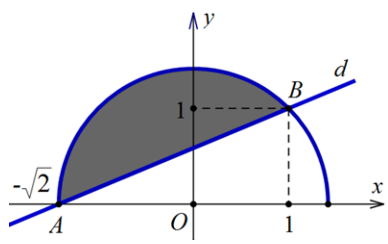
$$S'<4\Leftrightarrow -\int_{1}^{3} g'(x)dx<4\Leftrightarrow g(1)-g(3)<4\Rightarrow g(3)>0.$$

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=x+1$ cùng với các kết quả trên ta có bảng biến thiên sau:

| $x$ | $-3$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $g(x)$ | $g(-3)<0$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $g(3)>0$ |

Từ bảng biến thiên ta có phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-3;3]$.

**Câu 192:** **[Đặng Thúc Hứa – Lần 2 – 2018]** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn $y=\sqrt{2-x^2}$ và đường thẳng $d$ đi qua hai điểm $A\left(-\sqrt{2};0\right)$ và $B(1;1)$ *(phần tô đậm như hình vẽ )*




**A.** $\dfrac{\pi+2\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{3\pi+2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi-2\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{3\pi-2\sqrt{2}}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

**Cách 1:**

Phương trình đường thẳng $AB$: $y=\left(\sqrt{2}-1\right)x+2-\sqrt{2}$.

Gọi $S$ là diện tích cần tính, ta có

$$S=\int_{-\sqrt{2}}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}-\left(\sqrt{2}-1\right)x-2+\sqrt{2}\right)\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{2}}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x-\int_{-\sqrt{2}}^{1}\left(\left(\sqrt{2}-1\right)x+2-\sqrt{2}\right)\mathrm{d}x.$$

+ Tính $S_1=\int_{-\sqrt{2}}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x$:

Đặt $x=\sqrt{2}\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Ta có $\mathrm{d}x=\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=-\sqrt{2}\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{2}, x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$.

Suy ra $S_1=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2-2\sin^2 t}.\sqrt{2}\cos t dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}2|\cos t|\cos t dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}2\cos^2 t dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt$

$=\left(t+\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$.

$S_2=\int\limits_{-\sqrt{2}}^{1}\left(\left(\sqrt{2}-1\right)x+2-\sqrt{2}\right)dx=\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}x^2+\left(2-\sqrt{2}\right)x\right)\Big|_{-\sqrt{2}}^{1}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

Vậy $S=S_1-S_2=\dfrac{3\pi-2\sqrt{2}}{4}$.

**Cách 2: Sử dụng MTCT.**

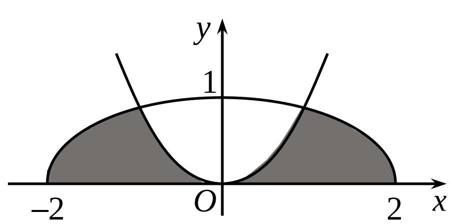
Phương trình đường thẳng $AB$: $y=\left(\sqrt{2}-1\right)x+2-\sqrt{2}$.

Gọi $S$ là diện tích cần tính, ta có $S=\int\limits_{-\sqrt{2}}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}-\left(\sqrt{2}-1\right)x-2+\sqrt{2}\right)dx$.

Sử dụng MTCT, tính $S$, gán giá trị vào biến $A$. Lấy giá trị $A$ trừ đi các kết quả trong các đáp án, rồi chọn đáp án có kết quả phép trừ bằng $0$. Đó là đáp án $D$.

**Câu 193:** Cho $(H)$ là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2$ và nửa đường elip có phương trình $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$ ( với $-2\le x\le 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ).

Gọi $S$ là diện tích của, biết $S=\dfrac{a\pi+b\sqrt{3}}{c}$ ( với $a$, $b$, $c\in\mathbb{R}$ ). Tính $P=a+b+c$.




**A.** $P=9$. **B.** $P=12$. **C.** $P=15$. **D.** $P=17$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol và nửa đường elip là: $\sqrt{3}x^2 = \sqrt{4-x^2}$

$\Leftrightarrow 3x^4 + x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy $S = 2\left(\int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2}x^2\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x\right) = 2\left(\left.\frac{\sqrt{3}x^3}{6}\right|_0^1 + \frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + S_1\right)$

Trong đó $S_1 = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$.

Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\cos t\mathrm{d}t$.

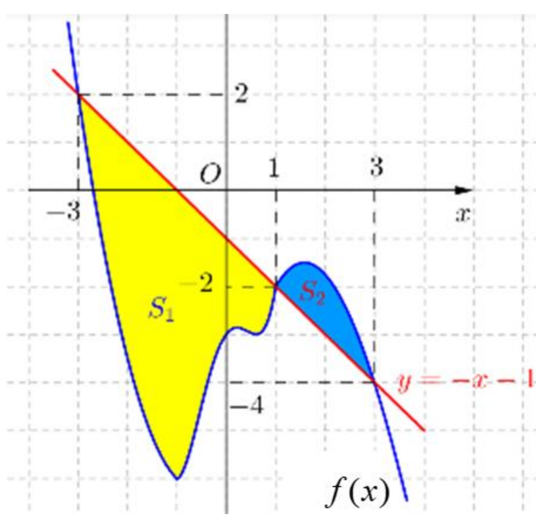
Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.

$x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Vậy $S_1 = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\mathrm{d}t = \left.\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra $S = 2\left(\frac{4\pi - \sqrt{3}}{12}\right) = \frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$.

**Câu 194: [Đặng Thúc Hứa – Lần 2 – 2018]** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3;3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng $S_1, S_2$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -x - 1$ lần lượt là $M; m$.



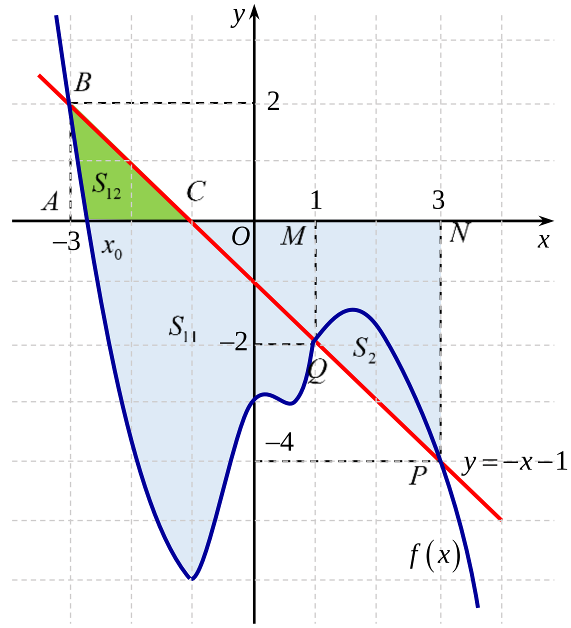

Tính tích phân $\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng :

**A.** $6 + m - M$. **B.** $6 - m - M$. **C.** $M - m + 6$. **D.** $m - M - 6$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Chia diện tích hình phẳng $S_1$ là $M = S_{11} + S_{12}$ như trong hình vẽ mô tả dưới đây.




Gọi $x_0$ là hoành độ giao điểm của đồ thi $(C)$ hàm số $y = f(x)$ với trục $Ox$.

Ta có $\int\limits_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-3}^{x_0} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{x_0}^{3} f(x)\mathrm{d}x = (S_{\Delta ABC} - S_{11}) - \left[S_{12} + S_{\Delta CMQ} + (S_{MNPQ} - m)\right]$

$= (2 - S_{11}) - \left[S_{12} + 2 + (6 - m)\right] = m - M - 6$. Vậy chọn D.

**Nhận xét:** Đây là bài toán cơ bản dựa vào diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cho trước. Nếu xác định được $M, m$ và cho trước $g(x)$ ta có thể tính được $\int\limits_a^b f(x)dx$.

**Câu 195:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $-5;3$. Biết rằng diện tích hình phẳng $S_1, S_2, S_3$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = g\ x\ = ax^2 + bx + c$ lần lượt là $m, n, p$. Tích phân $\int\limits_{-5}^{3} f(x)dx$ bằng

**A.** $m - n + p - \frac{208}{45}$ **B.** $m - n + p + \frac{208}{45}$ **C.** $-m + n - p - \frac{208}{45}$ **D.** $-m + n - p + \frac{208}{45}$

**Lời giải**

**Chọn B**

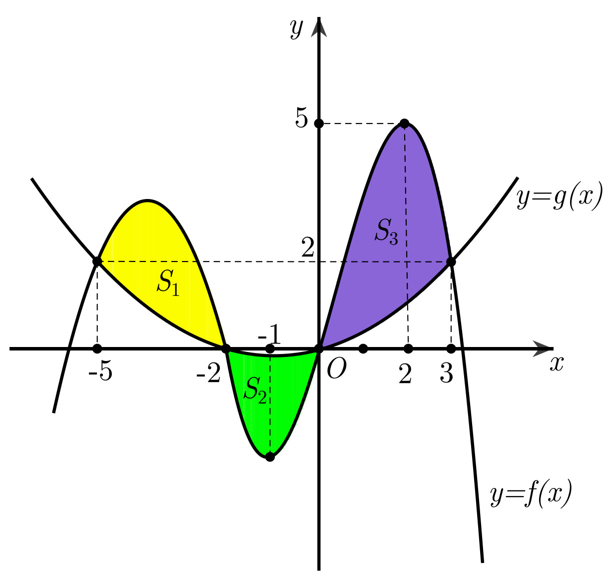
Đồ thị hàm $y = g(x)$ đi qua các điểm $O(0;0), A(-2;0), B(3;2)$ nên

$$\begin{cases} c=0 \\ 4a-2b=0 \\ 9a+3b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{15} \\ b=\dfrac{4}{15} \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow g(x)=\frac{2}{15}x^2+\frac{4}{15}x.$$

$$m-n+p=\int_{-5}^{-2}\left[f(x)-g(x)\right]dx-\int_{-2}^{0}\left[g(x)-f(x)\right]dx+\int_{0}^{3}\left[f(x)-g(x)\right]dx$$

$$=\int_{-5}^{3}f(x)dx-\int_{-5}^{3}g(x)dx.$$

$$\Rightarrow \int_{-5}^{3}f(x)dx=m-n+p+\int_{-5}^{3}g(x)dx=m-n+p+\frac{208}{45}$$




Vậy $\begin{cases} a=4 \\ b=-1 \\ c=6 \end{cases} \Rightarrow P=a+b+c=9$.

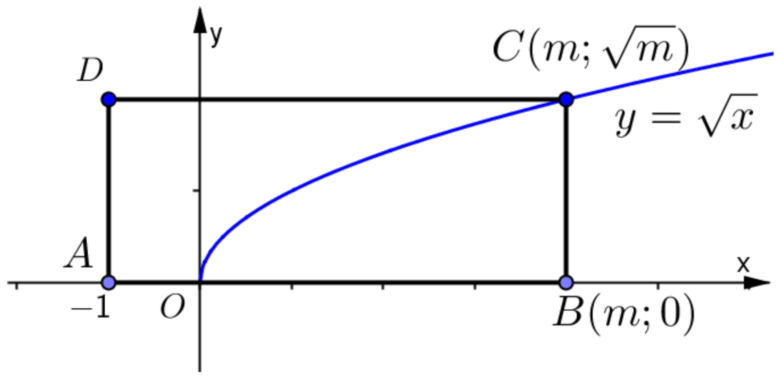
**Câu 196:** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho hình chữ nhật $(H)$ có một cạnh nằm trên trục hoành và có hai đỉnh trên một đường chéo là $A(-1;0)$ và $C\left(m;\sqrt{m}\right)$ với $m>0$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ chia hình $(H)$ thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tìm $m$.

**A.** $m=9$. **B.** $m=4$. **C.** $m=\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=3$.

**Lời giải**

**Phân tích:** Ta cần tìm tọa độ điểm $B$ và tính được diện tích một phần mà đường $y=\sqrt{x}$ chia hình $(H)$.

**Chọn D**




Từ giả thiết suy ra $B(m;0)\in Ox$.

$\Rightarrow S_{ABCD}=(m+1)\sqrt{m}$ .

Gọi $S_1$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x};x=0;x=m;y=0$. Suy ra

$S_1=\int_0^m \sqrt{x}dx=\left.\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}\right|_0^m=\dfrac{2m\sqrt{m}}{3}$.

Theo giả thiết ta có $S_1=\dfrac{1}{2}S_{ABCD}\Leftrightarrow\dfrac{2m\sqrt{m}}{3}=\dfrac{(m+1)\sqrt{m}}{2}\Leftrightarrow m=3$.

**Câu 197:** Trong mặt phẳng $Oxy$, cho hình thang vuông $ABCD$ có $A(-1;0)$ và $B(m;0);C\left(m;\sqrt{m+1}\right);D(-1;5)$ với $m>-1$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=\sqrt{x+1}$ chia hình $(H)$ thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tìm $m$.

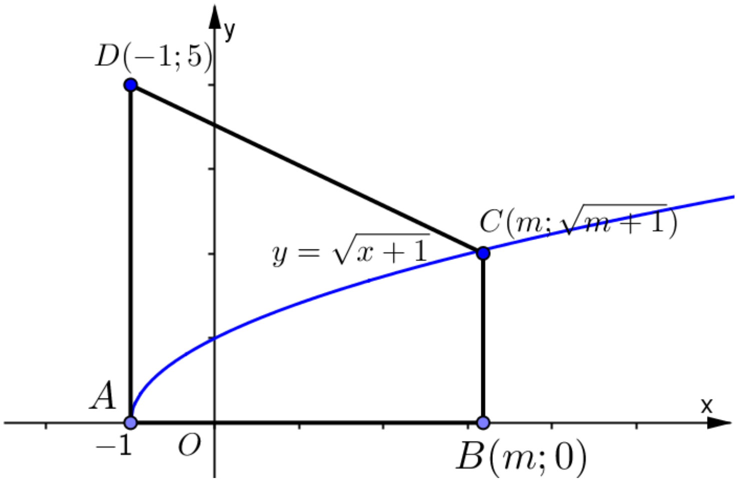
**A.** $m=12$. **B.** $m=6$. **C.** $m=8$. **D.** $m=10$.

**Lời giải**

**Phân tích:**

Trước hết cần vẽ đúng hình và xác định đúng phần diện tích cần tính. Sau đó dùng tích phân để tính phần diện tích đó.

**Chọn C**




$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AD+BC)AB=\frac{1}{2}\left(\sqrt{m+1}+5\right)(m+1)$ .

Gọi $S_1$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x+1};x=-1;x=m;y=0$. Suy ra

$$S_1=\int_{-1}^{m}\sqrt{x+1}dx=\left.\frac{2(x+1)\sqrt{x+1}}{3}\right|_{-1}^{m}=\frac{2(m+1)\sqrt{m+1}}{3}.$$

Theo giả thiết ta có $S_1=\frac{1}{2}S_{ABCD}\Leftrightarrow\frac{2(m+1)\sqrt{m+1}}{3}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\left(\sqrt{m+1}+5\right)(m+1)$.

$\Leftrightarrow\sqrt{m+1}=3\Leftrightarrow m=8$.

**Câu 198:** Trong mặt phẳng $Oxy$, $A(0;2)$ và $B(m;0)$ với $m>2$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=\frac{x-2}{x-1}$ (C) chia tam giác $OAB$ thành hai phần. Tính diện tích của phần giới hạn bởi $y=\frac{x-2}{x-1};y=0$ và đường thẳng $AB$ theo $m$.

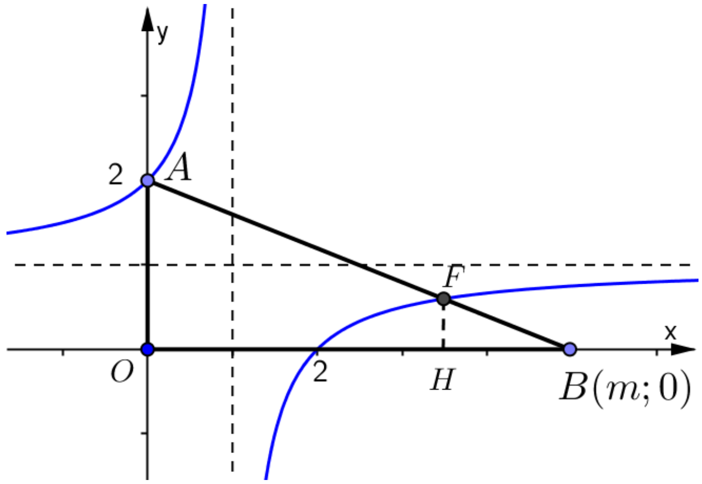
**A.** $\frac{3m^2-4}{8}-\ln\left|\frac{m}{2}\right|$. **B.** $\frac{m^2-4}{8}-\ln\left|\frac{m}{2}\right|$. **C.** $\frac{m^2+4}{8}-\ln\left|\frac{m}{2}\right|$. **D.** $\frac{m^2-4}{8}+\ln\left|\frac{m}{2}\right|$.

**Lời giải**

**Phân tích:**

Trước hết cần vẽ đúng hình và xác định đúng phần diện tích cần tính. Chú ý phần diện tích cần tìm gồm hai phần và tam giác vuông và hình thang cong.

**Chọn B**




Ta có phương trình đường thẳng $AB$ là: $\frac{x}{m}+\frac{y}{2}=1 \Leftrightarrow y=-\frac{2}{m}x+2$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $AB$:

$\frac{x-2}{x-1}=-\frac{2}{m}x+2$ (1) ( điều kiện $x \neq 1$).

Với điều kiện trên phương trình (1) tương đương với:

$$2x^2-(m+2)x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{m+2}{2} \end{array}\right.$$

Với $x=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow E(0;2) \equiv A$.

Với $x=\frac{m+2}{2} \Rightarrow y=\frac{m-2}{2} \Rightarrow F\left(\frac{m+2}{2};\frac{m-2}{2}\right)$.

Gọi $S_1$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{x-2}{x-1}; y=-\frac{2}{m}x+2; y=0$. Suy ra

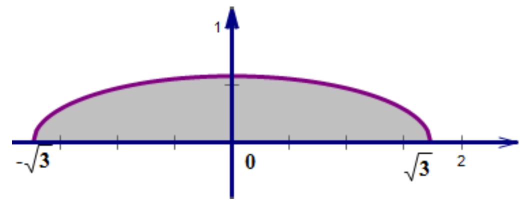
$$S_1=\int_2^{\frac{m+2}{2}} \frac{x-2}{x-1}dx+S_{\Delta FHB}=\left(x-\ln|x-1|\right)\Big|_2^{\frac{m+2}{2}}+\frac{1}{2}.\left(m-\frac{m+2}{2}\right).\frac{m-2}{2}=\frac{m^2-4}{8}-\ln\left|\frac{m}{2}\right|.$$

**Câu 199:** Gọi $H$ là tập hợp điểm biểu diễn số phức $z$ trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ thỏa mãn $|2z-\bar{z}| \leq 3$ và số phức $z$ có phần ảo không âm. Tính diện tích hình $H$

**A.** $3\pi$. **B.** $\frac{3\pi}{4}$. **C.** $\frac{3\pi}{2}$. **D.** $6\pi$.

**Lời giải**

**Chọn C**




$\left|2z-\bar{z}\right|\le 3\Leftrightarrow\left|2\left(x+yi\right)-\left(x-yi\right)\right|\le 3\Leftrightarrow\sqrt{x^2+\left(3y\right)^2}\le 3$

$\Leftrightarrow x^2+9y^2\le 3\Leftrightarrow\frac{x^2}{3}+3y^2\le 1\Leftrightarrow\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{\frac{1}{3}}\le 1\Rightarrow y^2\le\frac{3-x^2}{9}\Rightarrow-\frac{1}{3}\sqrt{3-x^2}\le y\le\frac{1}{3}\sqrt{3-x^2}$

Mà $y$ không âm nên $0\le y\le\sqrt{\frac{3-x^2}{9}}$

Diện tích cần tìm $S=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{3}\sqrt{3-x^2}dx$

Đặt $x=\sqrt{3}\sin t\Rightarrow dx=\sqrt{3}\cos tdt$

Cận $x=-\sqrt{3}\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}$; $x=\sqrt{3}\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$

$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3-3\sin^2 t}\sqrt{3}\cos tdt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}3\cos^2 tdt=\frac{3}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)dt=\frac{3}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{3}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{3\pi}{2}$

**Câu 200:** Cho hình $D$ giới hạn bởi các đường $y=x^2-2$ và $y=-|x|$. Khi đó diện tích của hình $D$ là:

**A.** $\frac{13}{3}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{7\pi}{3}$. **D.** $\frac{13\pi}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho là nghiệm của phương trình:

$x^2-2=-|x|\Leftrightarrow|x|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

Khi đó diện tích của hình $D$ được xác định bởi:

$$S=\int_{-1}^{1}\left|x^2-2-|x|\right|.dx=\int_{-1}^{0}\left(x-x^2+2\right).dx+\int_{0}^{1}\left(-x-x^2+2\right).dx$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+2x\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+2x\right)\Bigg|_{0}^{1}=\ \frac{7}{6}+\frac{7}{6}=\frac{7}{3}\ \text{(đvdt)}$$