

CHUYÊN ĐỀ TAM GIÁC

§ 8. TỔNG BA GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tổng ba góc của một tam giác.

Tổng ba góc của một tam giác bằng 180° .

$$\Delta ABC \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

2. Áp dụng vào tam giác vuông

a) **Định nghĩa:** Tam giác vuông là tam giác có một góc vuông.

b) **Tính chất:** Trong tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau

$$\begin{cases} \Delta ABC \\ \hat{A} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$

3. Góc ngoài của tam giác

a) **Định nghĩa:** Góc ngoài của tam giác là góc kề bù với một góc của tam giác.

b) **Tính chất:**

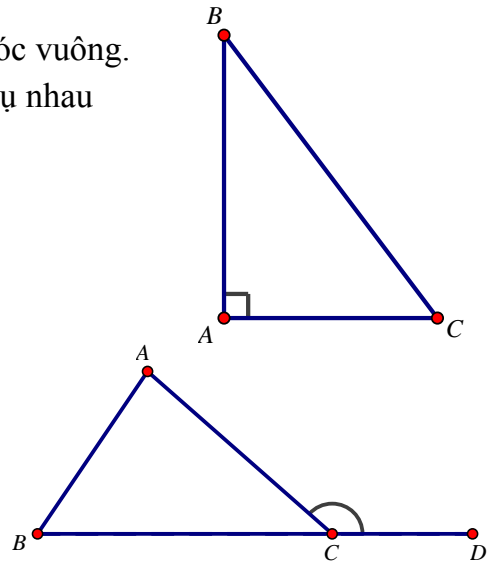
- Mỗi góc ngoài của một tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó.

$$\widehat{ACD} = \hat{A} + \hat{B}.$$

- Góc ngoài của tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó.

$$\widehat{ACD} > \hat{A},$$

$$\widehat{ACD} > \hat{B}.$$



B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. TÍNH SỐ ĐO GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

Phương pháp giải.

- Lập các đẳng thức thể hiện:
 - Tổng ba góc của tam giác bằng 180° .
 - Trong tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau.
 - Góc ngoài của tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó.
- Sau đó tính số đo của góc phải tìm.

Ví dụ 1. (Bài 1 tr.108 SGK)

Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 80^\circ$, $\hat{C} = 30^\circ$. Tia phân giác của góc A cắt BC ở D . Tính \widehat{ADC} , \widehat{ADB} .

Hướng dẫn.

$$\Delta ABC : \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} + 80^\circ + 30^\circ = 180^\circ$$

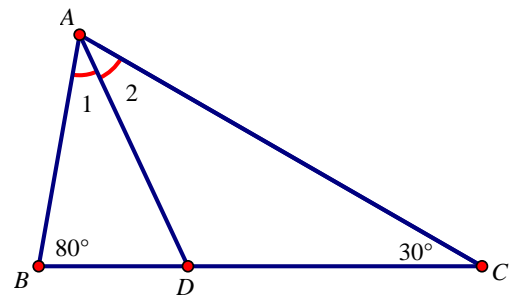
$$\Rightarrow \widehat{A} = 70^\circ \text{ Do đó } \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ.$$

$$\text{Góc ngoài } \widehat{ADC} = \widehat{B} + \widehat{A}_1$$

$$= 80^\circ + 35^\circ = 115^\circ$$

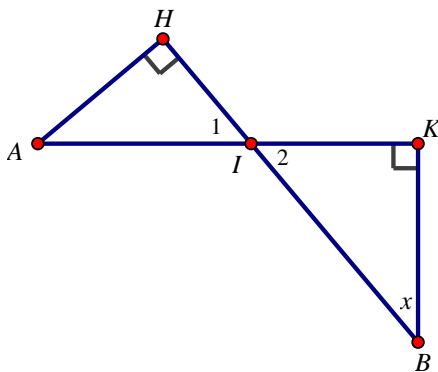
(góc ngoài của ΔABD).

$$\text{Suy ra } \widehat{ADB} = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ.$$

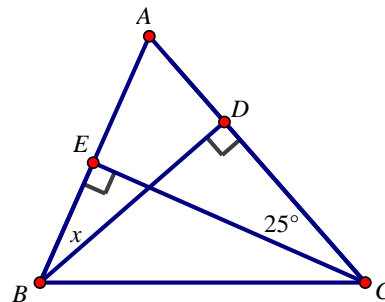


Ví dụ 2. (Bài 6 tr.109 SGK)

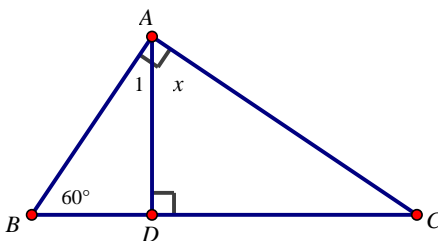
Tìm số đo x ở các hình 55, 56, 57, 58 (SGK)



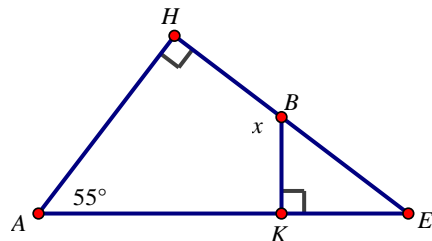
Hình 55 (SGK)



Hình 56 (SGK)



Hình 57 (SGK)



Hình 58 (SGK)

Giải.

a) $\widehat{A} + \widehat{I}_1 = \widehat{B} + \widehat{I}_2 (= 90^\circ) \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} \Rightarrow 40^\circ = x.$

b) $\widehat{ABD} + \widehat{A} = \widehat{ACE} + \widehat{A} (= 90^\circ) \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACE} \Rightarrow x = 25^\circ.$

c)
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{IMP} + \widehat{M}_1 = 90^\circ \\ \widehat{N} + \widehat{M}_1 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{IMP} = \widehat{N} \Rightarrow x = 60^\circ.$$

$$d) \widehat{A} + \widehat{E} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{E} = 90^\circ - \widehat{A} = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ.$$

$$x = \widehat{BKE} + \widehat{E} = 90^\circ + 35^\circ = 125^\circ.$$

Dạng 2. NHẬN BIẾT MỘT TAM GIÁC VUÔNG, TÌM CÁC GÓC BẰNG NHAU TRONG HÌNH VẼ CÓ TAM GIÁC VUÔNG.

Phương pháp giải.

Để nhận biết tam giác vuông, ta chứng minh tam giác đó có một góc bằng 90° . Trong hình vẽ có tam giác vuông, cần chú ý rằng hai góc nhọn của tam giác vuông phụ nhau.

Ví dụ 3. (Bài 7 tr.109 SGK)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$)

- Tìm các cặp góc phụ nhau trong hình vẽ.
- Tìm các cặp góc nhọn bằng nhau trong hình vẽ.

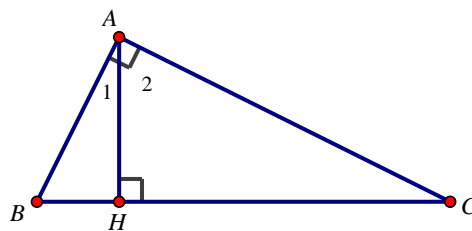
Hướng dẫn.

a) Các cặp góc phụ nhau: \widehat{A}_1 và \widehat{A}_2 , \widehat{B} và \widehat{C} , \widehat{B} và \widehat{A}_1 , \widehat{C} và \widehat{A}_2 .

b) Các cặp góc nhọn bằng nhau:

$$\widehat{C} = \widehat{A}_1 \text{ (cùng phụ với } \widehat{A}_2 \text{)}$$

$$\widehat{B} = \widehat{A}_2 \text{ (cùng phụ với } \widehat{A}_1 \text{)}.$$



Dạng 3. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG BẰNG CÁCH CHỨNG MINH HAI GÓC BẰNG NHAU

Phương pháp giải.

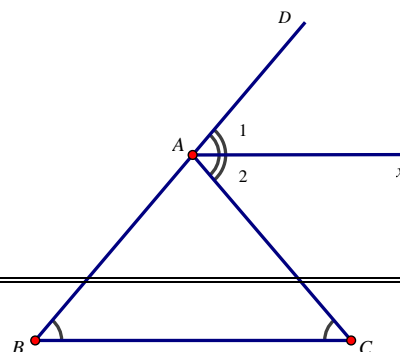
Chứng minh hai góc bằng nhau bằng cách chứng tỏ chúng cùng bằng, cùng phụ, cùng bù với một góc thứ ba (hoặc với hai góc bằng nhau). Từ chứng minh hai góc bằng nhau, ta chứng minh được hai đường thẳng song song.

Ví dụ 4. (Bài 8 tr.109 SGK)

Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = \widehat{C} = 40^\circ$. Gọi Ax là tia phân giác của góc ngoài ở đỉnh A . Hãy chứng tỏ rằng $Ax \parallel BC$.

Hướng dẫn.

$$\widehat{CAD} = \widehat{B} + \widehat{C} = 40^\circ + 40^\circ = 80^\circ,$$



$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{1}{2}\widehat{CAD} = 80^\circ : 2 = 40^\circ.$$

Cách 1: Hai góc so le trong \widehat{A}_2 và \widehat{C} bằng nhau nên $Ax // BC$.

Cách 2: Hai góc đồng vị \widehat{A}_1 và \widehat{B} bằng nhau nên $Ax // BC$.

Dạng 4. SO SÁNH CÁC GÓC DỰA VÀO TÍNH CHẤT GÓC NGOÀI CỦA TAM GIÁC

Phương pháp giải.

Dùng tính chất: Góc ngoài của tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó.

Ví dụ 4. (Bài 2 tr.108 SGK)

Cho hình 52. Hãy so sánh:

a) \widehat{BIK} và \widehat{BAK}

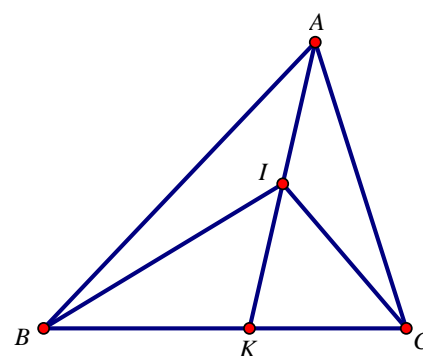
b) \widehat{BIC} và \widehat{BAC} .

Hướng dẫn.

a) $\widehat{BIK} > \widehat{BAI}$ (góc ngoài của ΔBAI) (1)

b) $\widehat{CIK} > \widehat{CAI}$ (góc ngoài của ΔCAI) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{BIK} + \widehat{CIK} > \widehat{BAI} + \widehat{CAI} \Rightarrow \widehat{BIC} > \widehat{BAC}$.



C. LUYỆN TẬP

8.1 Dạng 1. Tính \widehat{B} và \widehat{C} của tam giác ABC biết:

a) $\widehat{A} = 70^\circ, \widehat{B} - \widehat{C} = 10^\circ;$

b) $\widehat{A} = 60^\circ, \widehat{B} = 2\widehat{C}.$

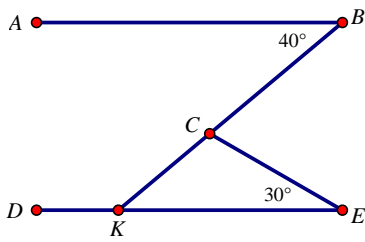
8.2 Dạng 1. Tính các góc của tam giác ABC biết rằng $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 2 : 3 : 4$.

8.3 Dạng 1. Cho tam giác ABC , tia phân giác của góc B cắt tia phân giác của góc C ở I và cắt đường phân giác của góc ngoài tại C ở K . Tính \widehat{BIC} và \widehat{BKC} , biết rằng:

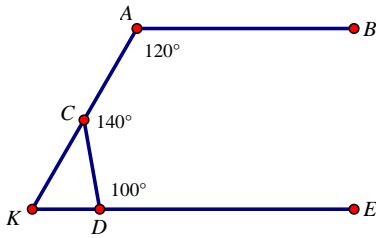
a) $\widehat{A} = 70^\circ;$

b) $\widehat{A} = \alpha.$

8.4 Dạng 1. Cho hình vẽ sau, trong đó $AB // DE$. Tính \widehat{BCE} bằng cách vẽ giao điểm K của BC và DE rồi tính \widehat{CKE} .



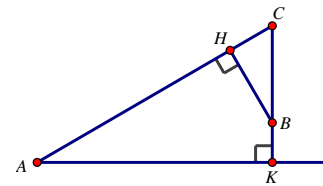
8.5 Dạng 1. Cho hình vẽ dưới đây. Chứng minh $AB \parallel DE$ bằng cách vẽ giao điểm K của AC và DE rồi tính \widehat{K} .



8.6 Dạng 1. Cho tam giác ABC . Tia phân giác của góc A cắt BC tại D . Tính \widehat{ADC} biết rằng:

- a) $\widehat{B} = 70^\circ, \widehat{C} = 30^\circ$; b*) $\widehat{B} - \widehat{C} = 40^\circ$.

8.7 Dạng 2. Trên hình vẽ bên, các góc \widehat{A} và \widehat{HBC} có cạnh tương ứng vuông góc ($AH \perp BH, AK \perp BC$), các góc \widehat{A} và \widehat{HBK} có cạnh tương ứng vuông góc ($AH \perp BH, AK \perp BK$). Hãy tìm mối liên hệ giữa:



- a) \widehat{A} và \widehat{HBC} ; b) \widehat{A} và \widehat{HBK} .

8.8 Dạng 2. Cho tam giác ABC \widehat{B} và \widehat{C} là góc nhọn. Qua B kẻ đoạn thẳng BD vuông góc với AC ($D \in AC$). Qua C kẻ đoạn thẳng CE vuông góc AB ($E \in AB$). Gọi H là giao điểm của BD và CE . Hãy tìm mối liên hệ giữa:

- a) \widehat{ABD} và \widehat{ACE} ; b) \widehat{A} và \widehat{DHE} .

8.9 Dạng 2. Cho góc xOy , điểm A thuộc tia Ox . Kẻ AB vuông góc với Ox ($B \in Oy$), kẻ BC vuông góc với Oy ($C \in Ox$), kẻ CD vuông góc với Ox ($D \in Oy$).

- a) Tìm các tam giác vuông trong hình vẽ.
b) Tìm các góc bằng góc ABO .

8.10* Dạng 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$. Gọi d là một đường thẳng đi qua C và vuông góc với BC . Tia phân giác của góc B cắt AC ở D và cắt d ở E . Kẻ CH vuông góc với DE ($H \in DE$). Chứng minh rằng CH là tia phân giác của góc DCE .

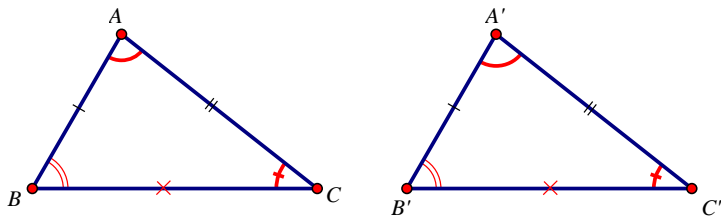
8.11 Dạng 4. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 90^\circ$, gọi D là một điểm nằm giữa A và C . Lấy điểm E thuộc tia đối của tia BD . Chứng minh rằng góc AEC là góc nhọn.

§ 9. HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa: Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau.

$$\Delta ABC = \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A}' \\ \widehat{B} = \widehat{B}' \\ \widehat{C} = \widehat{C}' \\ AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases}$$



B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. TỪ HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU, XÁC ĐỊNH CÁC CẠNH BẰNG NHAU, CÁC GÓC BẰNG NHAU. TÍNH ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG, SỐ ĐO GÓC.

Phương pháp giải.

Căn cứ vào quy ước viết các đỉnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau theo đúng thứ tự, ta viết được các góc bằng nhau, các đoạn thẳng bằng nhau.

Ví dụ 1. (Bài 11 tr.112 SGK)

Cho $\Delta ABC = \Delta HIK$

- Tìm cạnh tương ứng với cạnh BC . Tìm góc tương ứng với góc H .
- Tìm các cạnh bằng nhau, tìm các góc bằng nhau.

Giải.

- Cạnh tương ứng với cạnh BC là cạnh IK . góc tương ứng với góc H là góc A .

b) Từ $\triangle ABC = \triangle HIK$ ta có: $AB = HI$, $AC = HK$, $BC = IK$, $\widehat{A} = \widehat{H}$, $\widehat{B} = \widehat{I}$, $\widehat{C} = \widehat{K}$.

Ví dụ 2. (Bài 13 tr.112 SGK)

Cho $\triangle ABC = \triangle DEF$. Tính chu vi mỗi tam giác nói trên biết rằng $AB = 4\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, $DF = 5\text{cm}$.

Giải.

$\triangle ABC = \triangle DEF$ suy ra: $DE = AB = 4\text{cm}$, $EF = BC = 6\text{cm}$, $AC = DF = 5\text{cm}$.

Chu vi $\triangle ABC$ bằng: $AB + BC + AC = 4 + 6 + 5 = 15(\text{cm})$.

Chu vi $\triangle DEF$ bằng: $DE + EF + DF = 4 + 6 + 5 = 15(\text{cm})$.

Dạng 2: VIẾT KÍ HIỆU VỀ SỰ BẰNG NHAU CỦA HAI TAM GIÁC

Phương pháp giải.

Viết ba đỉnh của tam giác thứ nhất, rồi lần lượt chọn các đỉnh tương ứng của tam giác thứ hai.

Ví dụ 3. (Bài 14 tr.112 SGK)

Cho hai tam giác bằng nhau: tam giác ABC (không có hai góc nào bằng nhau, không có hai cạnh nào bằng nhau) và một tam giác có ba đỉnh là H, I, K . Viết kí hiệu về sự bằng nhau của hai tam giác đó, biết rằng: $AB = KI$, $\widehat{B} = \widehat{K}$.

Hướng dẫn.

Do $\widehat{B} = \widehat{K}$ nên B và K là hai đỉnh tương ứng. Do $AB = KI$ mà B và K là hai đỉnh tương ứng nên A và I là hai đỉnh tương ứng. Do đó $\triangle ABC = \triangle IKH$.

C. LUYỆN TẬP

- 9.1** Dạng 1. Cho $\triangle ABC = \triangle DHK$, $\widehat{B} = 35^\circ$, $\widehat{K} = 100^\circ$. Tính các góc còn lại của mỗi tam giác.
- 9.2** Dạng 1. Cho $\triangle ABC = \triangle DEI$. Tính chu vi của mỗi tam giác trên, biết rằng $AB = 5\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$, $EI = 8\text{cm}$.
- 9.3** Dạng 2. $\triangle AMN = \triangle DEK$. Hãy viết đẳng thức trên dưới một vài dạng khác.
- 9.4** Dạng 2. Cho $\triangle ABC$ (không có hai góc nào bằng nhau, không có hai cạnh nào bằng nhau) bằng một tam giác có ba đỉnh là O, H, K . Viết kí hiệu về sự bằng nhau của hai tam giác, biết rằng:
- a) $\widehat{A} = \widehat{O}$, $\widehat{B} = \widehat{K}$.

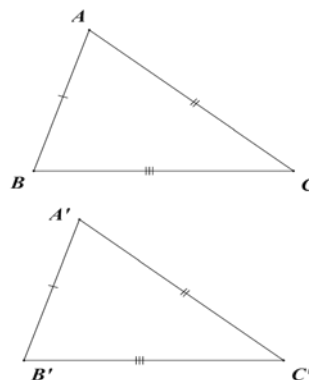
b) $AB = OH, BC = KO$.

§10. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ NHẤT CỦA TAM GIÁC CẠNH-CẠNH-CẠNH (C.C.C)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' (c.c.c)$$



B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. VẼ TAM GIÁC BIẾT ĐỘ DÀI BA CẠNH

Phương pháp giải.

Vẽ một cạnh, rồi xác định vị trí của đỉnh còn lại của tam giác.

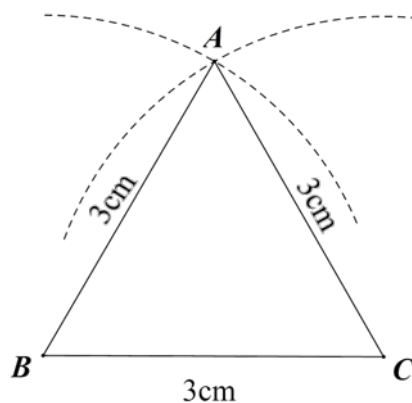
Ví dụ 1. (Bài 16 tr.114 SGK)

Vẽ tam giác ABC biết độ dài mỗi cạnh bằng $3cm$. Sau đó đo mỗi góc của tam giác.

Hướng dẫn.

- Vẽ đoạn thẳng $BC = 3cm$
- Vẽ cung tâm B bán kính $3cm$ và cung tâm C bán kính $3cm$, chúng cắt nhau tại A.
- Vẽ các đoạn thẳng AB, AC.

Dùng thước đo góc, ta đo được: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$.



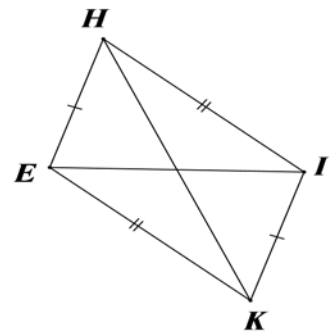
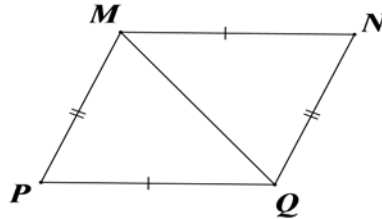
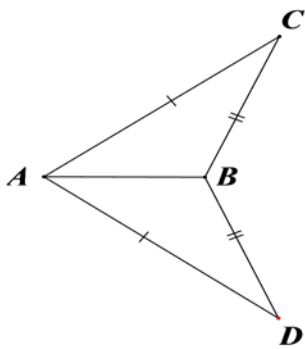
Dạng 2. TÌM HOẶC CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU THEO TRƯỜNG HỢP CẠNH- CẠNH- CẠNH. SẮP XẾP LẠI TRÌNH TỰ LỜI GIẢI BÀI TOÁN CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU.

Phương pháp giải.

- Xét hai tam giác.
- Kiểm tra ba điều kiện bằng nhau: cạnh- cạnh- cạnh.
- Kết luận hai tam giác bằng nhau.

Ví dụ 2. (Bài 17 tr.114 SGK)

Trên hình vẽ dưới đây, có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



Hướng dẫn.

$$\triangle ABC = \triangle ABD \text{ (c.c.c);}$$

$$\triangle MPQ = \triangle QNM \text{ (c.c.c);}$$

$$\triangle HEI = \triangle KIE \text{ (c.c.c);}$$

$$\triangle HEK = \triangle KIH \text{ (c.c.c).}$$

Dạng 3. SỬ DỤNG TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CẠNH- CẠNH- CẠNH ĐỂ CHỨNG MINH HAI GÓC BẰNG NHAU

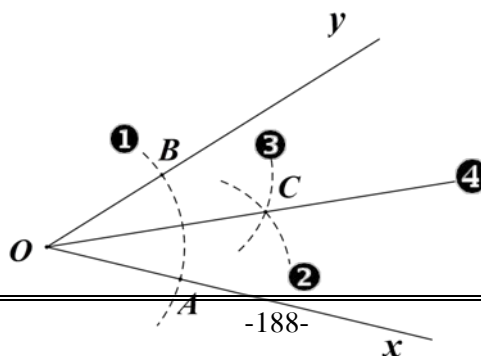
Phương pháp giải.

- Chọn hai tam giác có góc là hai góc cần chứng minh bằng nhau.
- Chứng minh hai tam giác bằng nhau theo trường hợp cạnh- cạnh- cạnh.
- Suy ra hai góc tương ứng bằng nhau.

Ví dụ 3. (Bài 20 tr. 115 SGK)

Cho góc xOy (hình 73 SGK). Vẽ cung tròn tâm O, cung này cắt Ox, Oy theo thứ tự ở A, B (❶). Vẽ các cung tròn tâm A và tâm B có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau ở điểm C nằm trong góc xOy (❷, ❸). Nối O với C (❹). Chứng minh OC là tia phân giác của góc xOy.

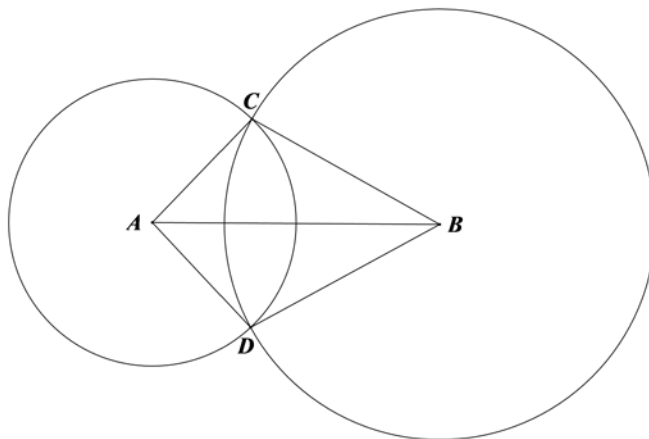
Giải.



$\triangle OBC$ và $\triangle OAC$ có: $OB = OA$ (giả thiết); $BC = AC$ (giả thiết); OC : cạnh chung. Do đó: $\triangle OBC = \triangle OAC$ (c.c.c). Suy ra $\widehat{BOC} = \widehat{AOC}$ (hai góc tương ứng). Vậy OC là tia phân giác của góc xOy .

Ví dụ 4. (Bài 23 tr. 116 SGK)

Cho đoạn thẳng AB dài 4cm. Vẽ đường tròn tâm A bán kính 2cm và đường tròn tâm B bán kính 3cm, chúng cắt nhau ở C và D. Chứng minh rằng AB là tia phân giác của góc CAD .



Hướng dẫn.

$\triangle BAC = \triangle BAD$ (c.c.c) suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{BAD}$ (hai góc tương ứng), suy ra AB là tia phân giác của góc CAD .

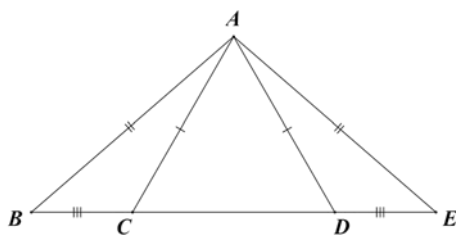
C. LUYỆN TẬP

10.1 Dạng 1 & 3. a) Vẽ tam giác ABC có $BC = 2cm$, $AB = AC = 3cm$.

b) Gọi E là trung điểm của cạnh BC ở $\triangle ABC$ trong câu a). Chứng minh rằng AE là tia phân giác của góc BAC.

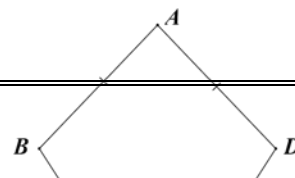
10.2 Dạng 1 & 3. Cho đoạn thẳng AB . Vẽ các điểm C, D sao cho $\triangle ABC$ có ba cạnh bằng nhau, $\triangle ABD$ cũng có ba cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng CD là tia phân giác của góc ACB.

10.3 Dạng 2. Tìm các tam giác bằng nhau trên hình dưới đây.



10.4 Dạng 2 & 3. Chứng minh rằng:

(O) sao cho $AB = CD$. Chứng

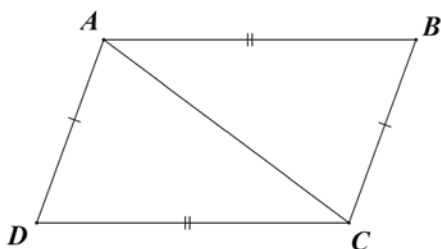


a) $\triangle AOB = \triangle COD$

b) $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$.

10.5 Dạng 3. Chứng minh rằng trên hình bên ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$.

10.6 Dạng 3. Cho hình bên dưới. Chứng minh rằng $AB // CD$.



§11. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ HAI CỦA TAM GIÁC

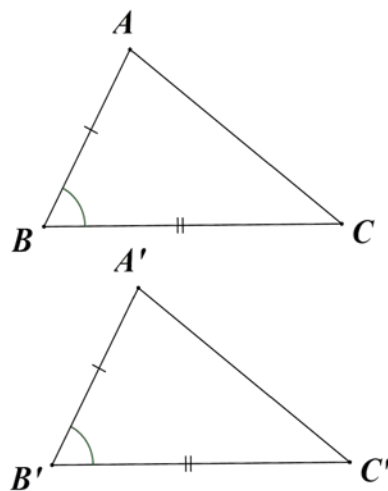
CẠNH – GÓC – CẠNH (C.G.C)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Trường hợp bằng nhau: cạnh – góc – cạnh

Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ BC = B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C' \text{ (c.g.c)}$$



2. **Hệ quả:** Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. VẼ TAM GIÁC BIẾT HAI CẠNH VÀ GÓC XEN GIỮA

Phương pháp giải.

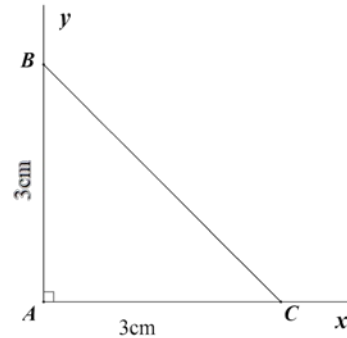
Vẽ góc, rồi xác định vị trí hai đỉnh còn lại của tam giác.

Ví dụ 1. (Bài 24 tr. 118 SGK)

Vẽ tam giác ABC biết $\widehat{A} = 90^\circ$, $AB = AC = 3\text{cm}$. Sau đó đo các góc \widehat{B} và \widehat{C} .

Giải.

- Vẽ góc $\widehat{xAy} = 90^\circ$
- Trên tia AX vẽ đoạn thẳng $AB = 3\text{cm}$.
- Trên tia Ay vẽ đoạn thẳng $AC = 3\text{cm}$.
- Vẽ đoạn thẳng BC.



Dùng thước đo góc, ta đo được $\widehat{B} = \widehat{C} = 45^\circ$.

Dạng 2. BỔ SUNG THÊM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU THEO TRƯỜNG HỢP CẠNH – GÓC – CẠNH

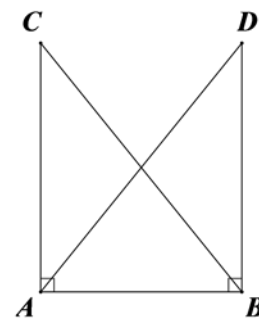
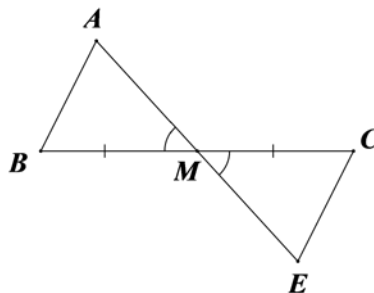
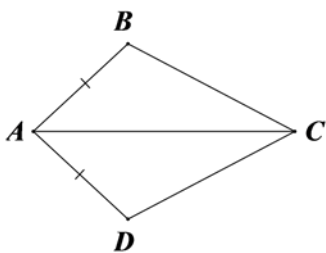
Phương pháp giải.

Xét xem hai tam giác đã có các yếu tố nào bằng nhau, từ đó bổ sung thêm điều kiện để hai tam giác bằng nhau.

Ví dụ 2. (bài 27 tr. 119 SGK)

Nêu thêm một điều kiện để hai tam giác trong mỗi hình vẽ dưới đây là hai tam giác bằng nhau theo trường hợp cạnh – góc – cạnh:

- a) $\triangle ABC = \triangle ADC$ (Hình 86 SGK)
- b) $\triangle AMB = \triangle EMC$ (Hình 87 SGK)
- c) $\triangle CAB = \triangle DBA$ (Hình 88 SGK)



Giải.

- a) Thêm $\widehat{BAC} = \widehat{DAC}$ thì $\triangle ABC = \triangle ADC$ (c.g.c);
- b) Thêm $MA = ME$ thì $\triangle AMB = \triangle EMC$ (c.g.c);

c) Thêm $AC = BD$ thì $\triangle CAB = \triangle DBA$ (c.g.c).

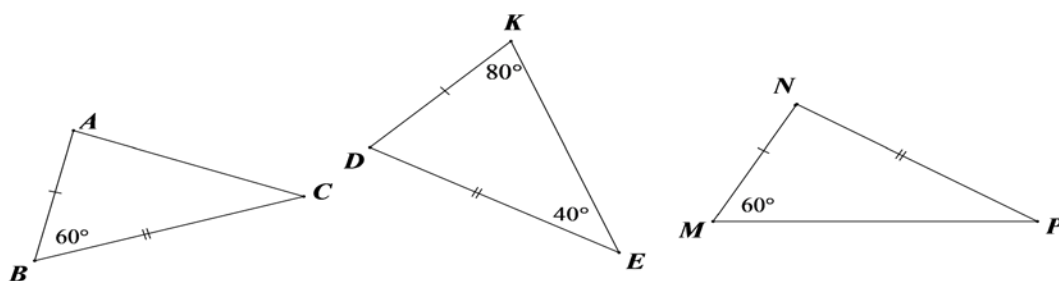
Dạng 3. TÌM HOẶC CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU THEO TRƯỜNG HỢP CẠNH – GÓC – CẠNH. SẮP XẾP LẠI TRÌNH TỰ GIẢI BÀI TOÁN CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

Phương pháp giải.

- Xét hai tam giác.
- Kiểm tra ba điều kiện bằng nhau cạnh – góc - cạnh.
- Kết luận hai tam giác bằng nhau.

Ví dụ 3. (bài 28 tr. 120 SGK)

Trên hình 89 (SGK) có các tam giác nào bằng nhau?



Giải.

Ta tính được $\widehat{D} = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ$.

$\triangle ABC$ và $\triangle KDE$ có:

$AB = KD$ (giả thiết);

$\widehat{B} = \widehat{D}$ ($= 60^\circ$);

$BC = DE$ (giả thiết);

Do đó $\triangle ABC = \triangle KDE$ (c.g.c).

Chú ý:

- $\triangle ABC$ và $\triangle MNP$ có $AB = MN$, $BC = NP$ nhưng đề bài không cho $\widehat{B} = \widehat{N}$ nên ta không kết luận được $\triangle ABC = \triangle MNP$.
- $\triangle ABC$ và $\triangle NMP$ có $AB = NM$, $\widehat{B} = \widehat{M}$ nhưng đề bài không cho $BC = MP$ nên ta không kết luận được $\triangle ABC = \triangle NMP$.

Dạng 4. SỬ DỤNG TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CẠNH – GÓC – CẠNH ĐỂ CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU, HAI GÓC BẰNG NHAU

Phương pháp giải.

- Chọn hai tam giác có cạnh (góc) là hai đoạn thẳng (góc) cần chứng minh bằng nhau.
- Chứng minh hai tam giác ấy bằng nhau theo trường hợp cạnh – góc – cạnh.
- Suy ra hai cạnh (góc) tương ứng bằng nhau.

Ví dụ 4. (Bài 31 tr. 120 SGK)

Cho đoạn thẳng AB , điểm M nằm trên đường trung trực của AB . So sánh độ dài các đoạn thẳng MA và MB .

Hướng dẫn.

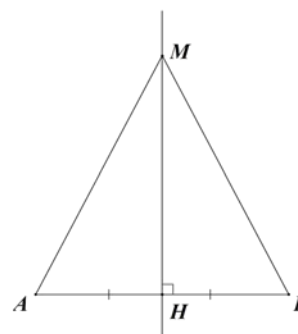
$\triangle MHA$ và $\triangle MHB$ có: MH : cạnh chung;

$\widehat{MHA} = \widehat{MHB} = 90^\circ$ (định nghĩa đường trung trực);

$HA = HB$ (định nghĩa đường trung trực).

Do đó $\triangle MHA = \triangle MHB$ (c.g.c)

Suy ra $MA = MB$ (hai cạnh tương ứng).



Ví dụ 5. (Bài 32 tr. 120 SGK)

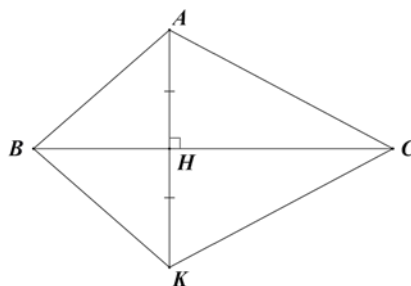
Tìm các tia phân giác trên hình 91 (SGK). Hãy chứng minh điều đó.

Hướng dẫn.

$\triangle AHB = \triangle KHB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{KBH} \Rightarrow BH$ là tia phân giác của góc B.

$\triangle AHC = \triangle KHC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ACH} = \widehat{KCH} \Rightarrow CH$ là tia phân giác của góc C.

Ngoài ra còn có: HA và HK là các tia phân giác của góc bẹt BHC ; HB và HC là các tia phân giác của góc bẹt AHK



Hình 91 (SGK)

C. LUYỆN TẬP

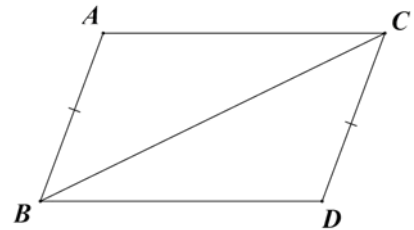
11.1 Dạng 1. a) Vẽ tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ$, $AB = BC = 3\text{cm}$.

b) Đo độ dài cạnh AC .

11.2 Dạng 2. Cho hình vẽ bên. Bổ sung thêm một

điều kiện bằng nhau để $\triangle ABC = \triangle DCB$

theo trường hợp cạnh – góc – cạnh.



11.3 Dạng 3. Cho tam giác ABC , kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Trên tia đối của tia HA , lấy điểm K sao cho $HK = HA$. Nối KB, KC . Tìm các cặp tam giác bằng nhau trong hình vẽ.

11.4 Dạng 4. Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của AC . Trên tia đối của tia IB lấy điểm E sao cho $IE = IB$. Chứng minh rằng:

a) $AE = BC$

b) $AE \parallel BC$

11.5 Dạng 4. Cho góc xOy . Trên cạnh Ox lấy các điểm A và B , trên cạnh Oy lấy các điểm C và D sao cho $OA = OC$, $OB = OD$. Chứng minh rằng $AD = BC$.

11.6 Dạng 4. Cho góc xOy . Lấy điểm A trên Ox , điểm B trên Oy sao cho $OA = OB$. Gọi K là giao điểm của AB với tia phân giác của góc xOy . Chứng minh rằng:

a) $AK = KB$

b) $OK \perp AB$

11.7 Dạng 4. Cho hai đoạn thẳng AB, CD vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.

a) Chứng minh rằng các đoạn thẳng AC, CB, BD, DA bằng nhau.

b) Tìm tia phân giác của các góc (khác góc bẹt) trong hình vẽ.

11.8 Dạng 4. Cho tam giác ABC , tia phân giác của góc A cắt BC tại D . Trên tia AC lấy điểm E sao cho $DE = DB$.

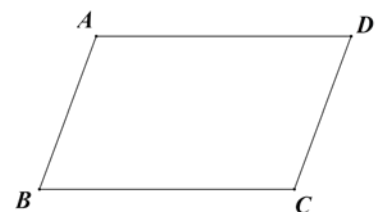
a) Chứng minh rằng $DE = DB$.

b) Tam giác ABC có điều kiện gì thì $\triangle ADB = \triangle ADC$?

c) Tam giác ABC có điều kiện gì thì $DE \perp AC$?

11.9 Dạng 4. Hai đoạn thẳng AD và BC trên hình vẽ bên

song song và bằng nhau. Chứng minh rằng $AB \parallel CD$.



11.10 Dạng 4. Cho tam giác ABC , I là trung điểm của BC . Đường thẳng vuông góc với AB tại B cắt đường thẳng AI tại D . Trên tia đối của tia ID , lấy điểm E sao cho $IE = ID$. Gọi H là giao điểm của CE và AB . Chứng minh rằng tam giác AHC là tam giác vuông.

11.11 * Dạng 4. Cho tam giác ABC . Gọi D là trung điểm của AC , gọi E là trung điểm của AB . Trên tia đối của tia DB lấy điểm M sao cho $DM = DB$. Trên tia đối của tia EC lấy điểm N sao cho $EN = EC$. Chứng minh rằng A là trung điểm của MN .

11.12 * Dạng 4. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 50^\circ$. Vẽ đoạn thẳng AI vuông góc và bằng Ab (I và C khác phía đối với AB). Vẽ đoạn thẳng AK vuông góc và bằng AC (K và B khác phía đối với AC). Chứng minh rằng:

- a) $IC = BK$ b) $IC \perp BK$

11.13 * Dạng 4. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 100^\circ$, M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm K sao cho $MK = MA$.

- a) Tính số đo góc ABK .
 b) Về phía ngoài của tam giác ABC , vẽ các đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AB , AE vuông góc và bằng AC . Chứng minh rằng $\triangle ABK = \triangle DAE$.
 c) Chứng minh: $MA \perp DE$.

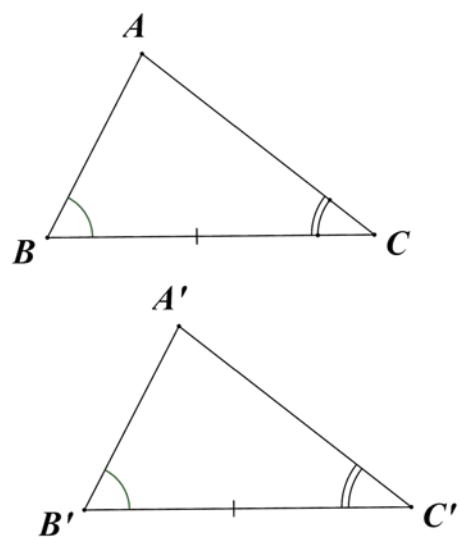
§12. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ BA CỦA TAM GIÁC
GÓC – CẠNH – GÓC (G.C.G)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Trường hợp bằng nhau góc – cạnh – góc:

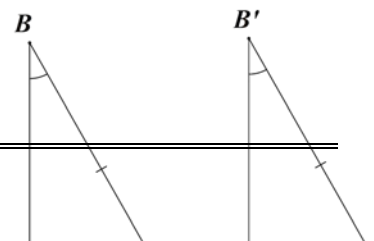
Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{B}' \\ BC = B'C' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C' \text{ (g.c.g)}$$



2. Trường hợp bằng nhau cạnh huyền – góc nhọn

Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia



thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A}' = 90^\circ \\ BC = B'C' \\ \widehat{B} = \widehat{B}' \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (cạnh huyền – góc nhọn)}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. VẼ TAM GIÁC BIẾT MỘT CẠNH VÀ HAI GÓC KÈ

Phương pháp giải.

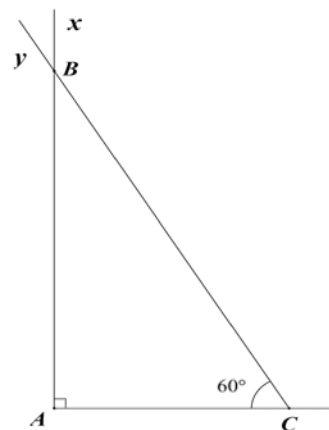
Vẽ một cạnh của tam giác, rồi vẽ hai tia để xác định vị trí của đỉnh còn lại.

Ví dụ 1. (Bài 33 tr. 123 SGK)

Vẽ tam giác ABC biết $AC = 2cm$, $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{C} = 60^\circ$.

Giải.

- Vẽ đoạn thẳng $AC = 2cm$.
- Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AC vẽ các tia Ax và Cy sao cho $\widehat{CAx} = 90^\circ$, $\widehat{ACy} = 60^\circ$, chúng cắt nhau tại B .



Dạng 2. TÌM HOẶC CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC BẰNG HỢP GÓC – CẠNH – GÓC.

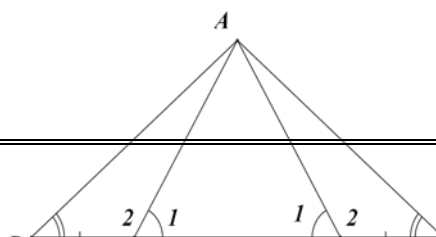
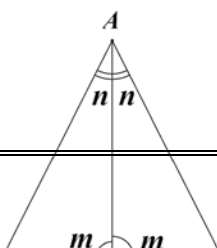
3

Phương pháp giải.

- Xét hai tam giác.
- Kiểm tra ba điều kiện bằng nhau góc – cạnh – góc.
- Kết luận hai tam giác bằng nhau.

Ví dụ 2. (Bài 34 tr. 123 SGK)

Trên mỗi hình 98, 99 (SGK) có các tam giác bằng nhau? Vì sao?



Hình 98 (SGK)

Hướng dẫn

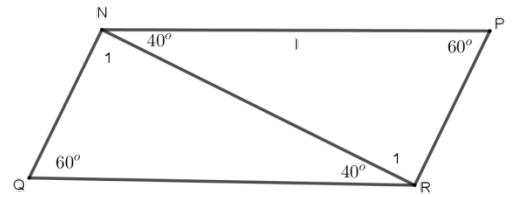
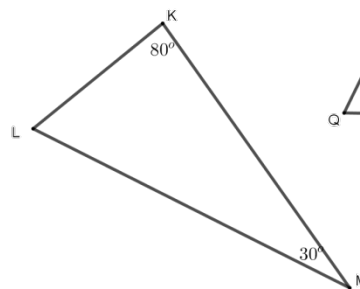
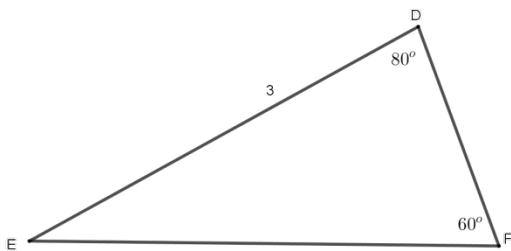
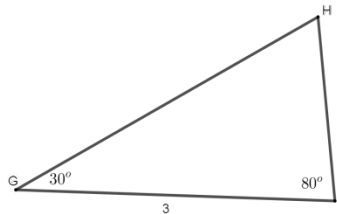
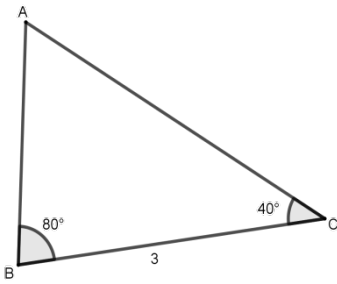
a) $\triangle ABC = \triangle ABD$ (c.g.c)

b) $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{C}_2$

$\triangle ABD = \triangle ACE$ (g.c.g), $\triangle ADC = \triangle AEB$ (g.c.g).

Ví dụ 3. (Bài 37 tr.123 SGK)

Trên mỗi hình 101, 102, 103 (SGK) có các tam giác nào bằng nhau? vì sao?



Hình 101 (SGK)

Hình 102 (SGH)

Hình 103 (SGK)

Hướng dẫn

a) Ta tính được $\widehat{E} = 40^\circ$, $\triangle ABC = \triangle FDE$ (g.c.g)

b) $\triangle GHI$ không bằng $\triangle MLK$ mặc dù có một cặp cạnh bằng nhau và hai cặp góc bằng nhau (ở hình 102 (SGK), hai cặp góc bằng nhau không kề với cặp cạnh bằng nhau)

c) Ta tính được $\widehat{N}_1 = \widehat{R}_1 = 80^\circ$, $\Delta NQR = \Delta RPN$ (g.c.g).

Dạng 3. SỬ DỤNG TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU GÓC – CẠNH – GÓC ĐỂ CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU.

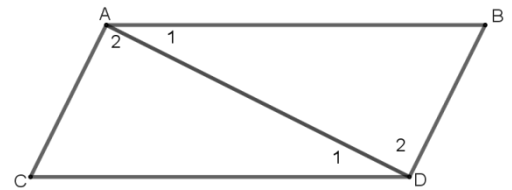
Phương pháp giải.

- Chọn hai tam giác có cạnh là hai đoạn thẳng cần chứng minh bằng nhau.
- Chứng minh hai tam giác bằng nhau theo trường hợp góc – cạnh – góc.
- Suy ra hai cạnh tương ứng bằng nhau.

Ví dụ 5. (Bài 38 tr. 124 SGK)

Trên hình 104 (SGK) ta có $AB // CD$, $AC // BD$.

Hãy chứng minh rằng $AB = CD, AC = BD$.



Hình 104 (SGK)

Hướng dẫn .

Nối $AC, \Delta ADB$ và ΔDAC ta có:

$$\widehat{A}_1 = \widehat{D}_1 \text{ (so le trong, } AB // CD \text{)}; AD : \text{ cạnh chung}; \widehat{D}_2 = \widehat{A}_2 \text{ (so le trong, } AC // BD \text{)}.$$

Do đó $\Delta ADB = \Delta DAC$ (g.c.g) suy ra: $AB = CD, BD = AC$.

Chú ý: Từ hai bài toán trên, ta suy ra : Nếu hai đoạn thẳng song song bị chắn giữa hai đường thẳng song song thì chúng bằng nhau.

Ví dụ 6. (Bài 44 tr.125 SGK)

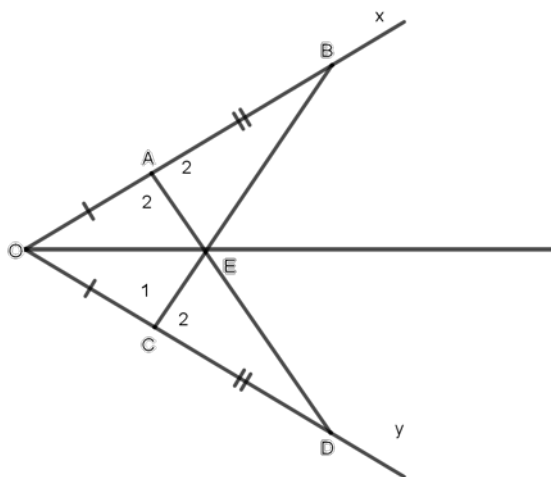
Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = \widehat{C}$. Tia phân giác của góc A cắt BC tại D . chứng minh rằng:

- a) $\Delta ADB = \Delta ADC$;
- b) $AB = AC$

Hướng dẫn .

a) ΔABD và ΔACD có $\widehat{B} = \widehat{C}, \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ nên $\Delta ABD = \Delta ACD$ (g.c.g)

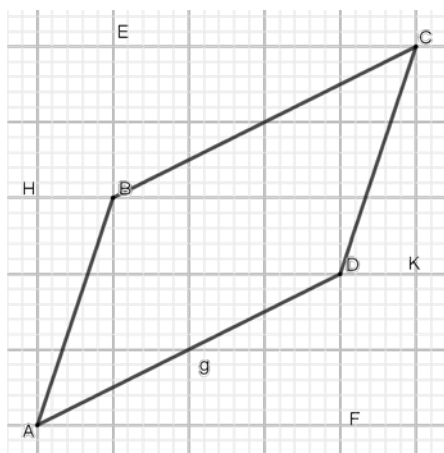
b) $\Delta ABD = \Delta ACD$ (câu a) suy ra $AB = AC$



Ví dụ 8 (Bài 45 tr.125 SGK)

Cho bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA trên giấy kẻ ô vuông như hình 110 (SGK). Hãy dùng lập luận để giải thích

- a) $AB = CD, BC = AD$
- b) $AB // CD$.



Hướng dẫn .

a) $\triangle AHB = \triangle CKD (c.g.c) \Rightarrow AB = CD;$

$\triangle CEB = \triangle AFD (c.g.c) \Rightarrow BC = AD$

b) $\triangle ABD = \triangle CDB (c.c.c) \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{CDB} \Rightarrow AB // CD$ (có hai góc so le trong bằng nhau)

Dạng 5. TÌM HOẶC CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC VUÔNG BẰNG NHAU.

Phương pháp giải

- Xét hai tam giác vuông.

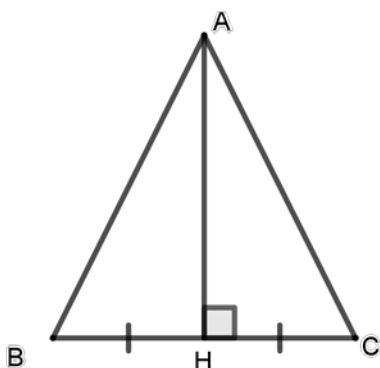
- Kiểm tra điều kiện bằng nhau cạnh – góc – cạnh, hoặc góc – cạnh – góc , hoặc cạnh huyền – góc nhọn.
- Kết luận hai tam giác bằng nhau.

Ví dụ 9. (bài 38 tr.124 SGK)

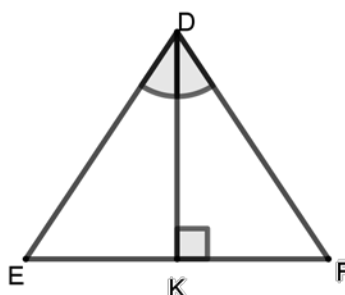
Trên mỗi hình 105, 106, 107, 108 có các tam giác vuông nào bằng nhau? Vì sao?

Hướng dẫn

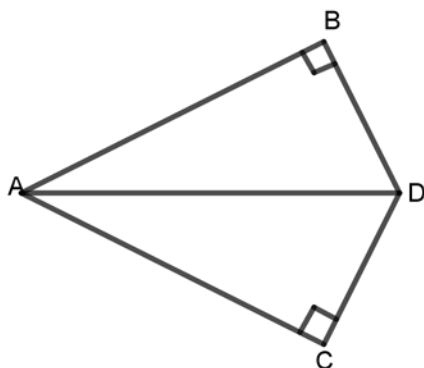
a) Hình 105 (SGK) : $\triangle AHB = \triangle AHC$ (c.g.c).



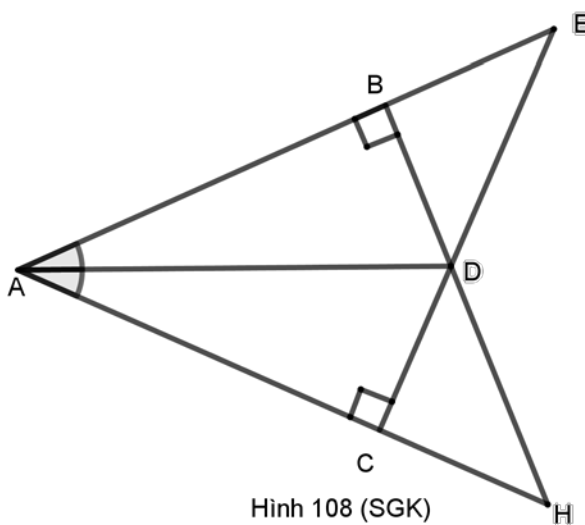
Hình 105 (SGK)



Hình 106 (SGK)



hình 107 (SGK)



Hình 108 (SGK)

b) Hình 106 (SGK) : $\triangle DKE = \triangle DKF$ (c.g.c)

c) Hình 107 (SGK) : $\triangle ABD = \triangle ACD$ (cạnh huyền – góc nhọn).

d) Hình 108 (SGK) : $\triangle ABD = \triangle ACD$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow AB = AC, DB = DC, \triangle DBE = \triangle DCH$ (g.c.g). $\triangle ABH = \triangle ACE$ (chẳng hạn g.c.g)

Dạng 6. SỬ DỤNG TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CẠNH HUYỀN – GÓC NHỌN ĐỂ CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU.

Phương pháp giải.

- Chọn tam giác vuông có cạnh là hai đoạn thẳng cần chứng minh bằng nhau
- Chứng minh hai tam giác ấy bằng nhau theo trường hợp cạnh huyền – góc nhọn.
- Suy ra hai cạnh tương ứng bằng nhau.

Ví dụ 10. (Bài 41 tr.124 SGK)

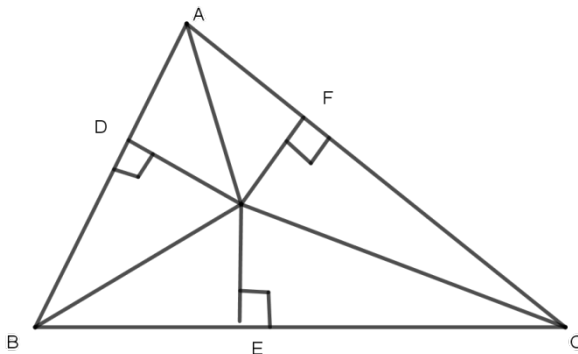
Cho tam giác ABC ($AB \neq AC$). Các tia phân giác của B và C cắt nhau ở I .
 $ID \perp AB, (D \in AB), IE \perp BC (E \in BC), IF \perp AC (F \in AC)$. Chứng minh rằng
 $ID = IE = IF$

Hướng dẫn.

$$\triangle BID = \triangle BIE \text{ (cạnh huyền – góc nhọn)} \Rightarrow ID = IE$$

$$\triangle CIE = \triangle CIF \text{ (cạnh huyền – góc nhọn)} \Rightarrow IE = IF$$

Vậy $ID = IE = IF$

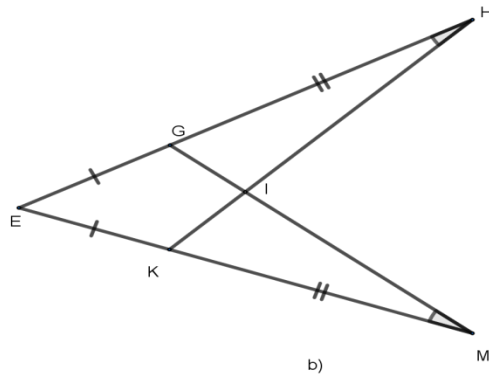
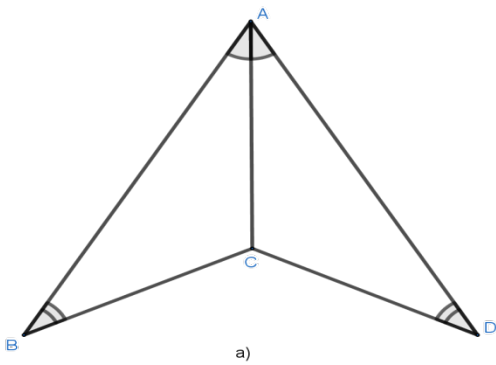


C. LUYỆN TẬP

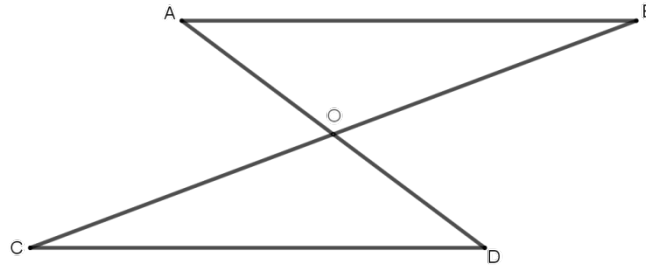
12.1 Dạng 1. a) Vẽ tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ, BC = 4\text{ cm}, \widehat{C} = 30^\circ$

b) Đo độ dài cạnh AB

12.2 Dạng 2. Tìm các tam giác bằng nhau ở hình vẽ sau.



12.3 Dạng 3. Cho hình vẽ sau, trong đó $AB \parallel CD, AB = CD$. Chứng minh rằng $OA = OD, OB = OC$.



12.4 Dạng 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = \widehat{C}$. Tia phân giác của góc B cắt AC ở D . Tia phân giác của góc C cắt AB ở E . So sánh độ dài các đoạn thẳng BD và CE

12.5 Dạng 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ, AB = AC$, điểm D thuộc cạnh AB . Đường thẳng qua B

Vuông góc với CD cắt đường thẳng CA ở K . Chứng minh rằng $AK = AD$.

12.6* Dạng 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ, AB = AC$. Lấy điểm D thuộc cạnh AB , điểm E thuộc cạnh AC sao cho $AD = AE$. Đường thẳng qua D và vuông góc với BE cắt đường thẳng CA ở K . Chứng minh rằng $AK = AC$.

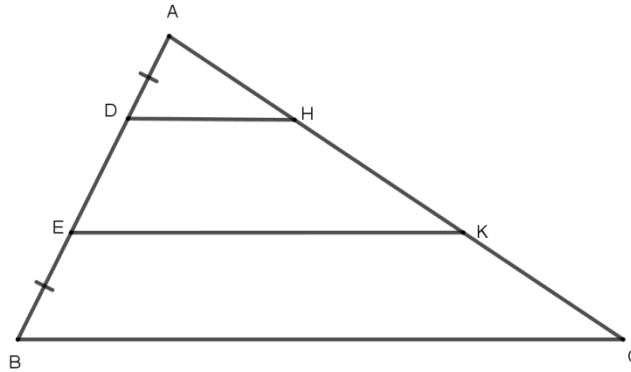
12.7* Dạng 3. Cho tam giác ABC , I là trung điểm của AB . Đường thẳng qua I và song song với BC

Cắt AC ở K . Đường thẳng qua K và song song với AB cắt BC ở H . Chứng minh rằng :

a) $KH = IB$

b) $AK = KC$.

12.8* Dạng 3. Trên hình vẽ sau, ta có $AD = BE, DH // EK // BC$. Chứng minh rằng $DA + EK = BC$.



12.9* Dạng 3. Tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$. Tia phân giác của góc B cắt AC ở D . Tia phân giác của góc C cắt AB ở E . Gọi O là giao điểm của BD và CE

a) Tính \widehat{BOC}

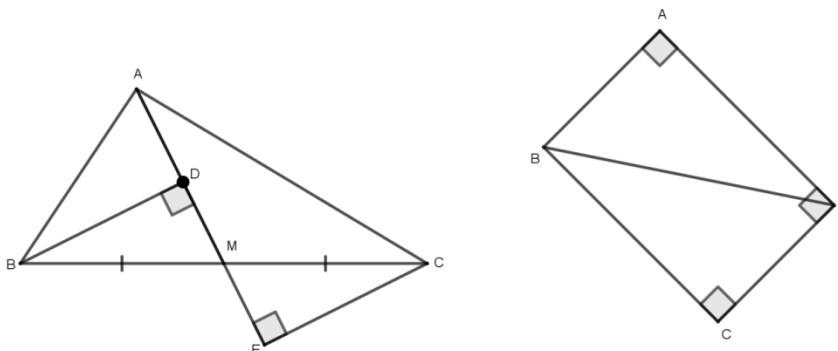
b) Chứng minh rằng $OD = OE$.

12.10 Dạng 4. Cho tam giác ABC . Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AC$. Một đường thẳng đi qua A cắt các cạnh DE và BC theo thứ tự ở M và N . Chứng minh rằng $AM = AN$.

12.11 Dạng 4. Cho tam giác ABC , M là trung điểm của AC . Trên tia đối của tia MB lấy điểm D sao cho $MD = MB$. Trên tia đối của tia BC lấy điểm E sao cho $BE = BC$. Gọi I là giao điểm của AB và DE . Chứng minh rằng $IA = IB$.

12.12 Dạng 4. Cho tam giác ABC , Điểm D thuộc cạnh BC . Kẻ $DE // AC (E \in AB)$, kẻ $DF // AB (F \in AC)$. gọi I là trung điểm của EF . Chứng minh rằng I là trung điểm của AD

12.13 Dạng 5. Tìm các tam giác bằng nhau trên hình vẽ sau.



12.14 Dạng 6. Cho tam giác nhọn ABC và $\Delta ABC = \Delta DEF$. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$) và $DK \perp EF$

($K \in EF$). Chứng minh rằng $AH = DK$.

12.15 Dạng 6. Cho tam giác ABC. Các đường phân giác của các góc ngoài tại B và tại C cắt nhau ở K. Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với AB, cắt đường thẳng AB ở E. Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với AC, cắt đường thẳng AC ở F. Chứng minh rằng $KE = KF$.

12.16 Dạng 6. Cho tam giác ABC có góc A bằng 90° , $AB = AC$. Qua A kẻ đường thẳng d sao cho B và C nằm cùng phía đối với d. Kẻ BD và CE vuông góc với d ($D, E \in d$). Chứng minh rằng $BD = AE, AD = CE$.

12.17* Dạng 6. Cho tam giác ABC. Ở phía ngoài tam giác ABC, vẽ các tam giác vuông tại A là ABD và ACE có $AB = AD$ và $AC = AE$. Kẻ AH vuông góc với BC. Gọi I là giao điểm của HA và DE. Chứng minh rằng $DI = IE$.

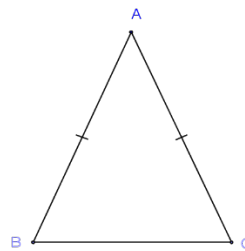
12.18 Dạng 6. Cho tam giác ABC. Ở phía ngoài ΔABC , Vẽ các tam giác $\Delta ABD, \Delta ACE$ có $\widehat{ABD} = \widehat{ACE} = 90^\circ, AB = BD, AC = CE$. Kẻ DI, EK vuông góc với BC ($I, K \in BC$). Chứng minh rằng $BI = CK$

§13: TAM GIÁC CÂN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tam giác cân

a) **Định nghĩa:** tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau



$$\Delta ABC \text{ cân tại } A \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \\ AB = AC \end{cases}$$

b) **Tính chất:** Trong tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau

$$\Delta ABC \text{ cân tại } A \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}$$

c) **Dấu hiệu nhận biết:**

- Theo định nghĩa.
- Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

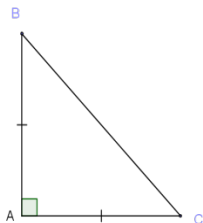
2. Tam giác vuông cân

a) **Định nghĩa:** Tam giác vuông cân là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau.

$$\Delta ABC \text{ vuông cân tại } A \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \\ A = 90^\circ \\ AB = AC \end{cases}$$

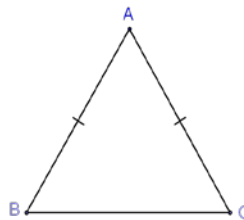
b) **Tính chất:** Mỗi góc nhọn của tam giác vuông cân bằng 45°

$$\widehat{B} = \widehat{C} = 45^\circ$$



3. Tam giác đều

a) **Định nghĩa:** Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau



$$\Delta ABC \text{ đều} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \\ AB = BC = CA \end{cases}$$

b) **Tính chất:** Trong tam giác đều mỗi góc bằng 60°

c) **Dấu hiệu nhận biết**

- Theo định nghĩa.
- Nếu một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.
- Nếu một tam giác cân có một góc bằng 60° thì tam giác đó là tam giác đều.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: VẼ TAM GIÁC CÂN, TAM GIÁC VUÔNG CÂN, TAM GIÁC ĐỀU

Phương pháp giải:

Dựa vào các cách vẽ tam giác đã học và định nghĩa các tam giác cân, vuông cân, đều.

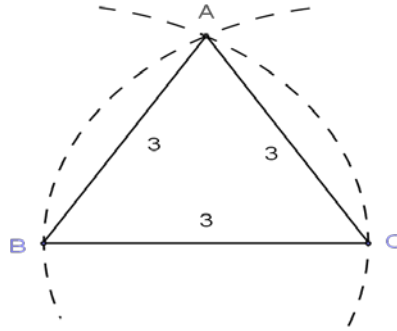
Ví dụ 1. (Bài 46 tr.127 SGK)

Dùng thước có chia xentimet và compa vẽ tam giác đều ABC có cạnh bằng 3cm.

Hướng dẫn

- Vẽ đoạn thẳng BC bằng 3cm.
- Vẽ cung tròn tâm B bán kính 3cm và cung tròn tâm C bán kính 3cm, chúng cắt nhau tại A.

- o Vẽ các đoạn thẳng AB, AC.



$$\Delta ABE = \Delta ACD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow BE = CD$$

Dạng 2 BỔ SUNG ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI TAM GIÁC , HAI TAM GIÁC VUÔNG CÂN, HAI TAM GIÁC ĐỀU BẰNG NHAU

Phương pháp giải.

Dựa vào các trường hợp bằng nhau của hai tam giác đã học và định nghĩa, Tính chất các tam giác cân, vuông cân, đều.

Ví dụ 2 Hãy bổ sung thêm một điều kiện để hai tam giác đều ABC và $A'B'C'$ bằng nhau.

Giải.

Bổ sung thêm điều kiện $AB = A'B'$. khi đó $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$

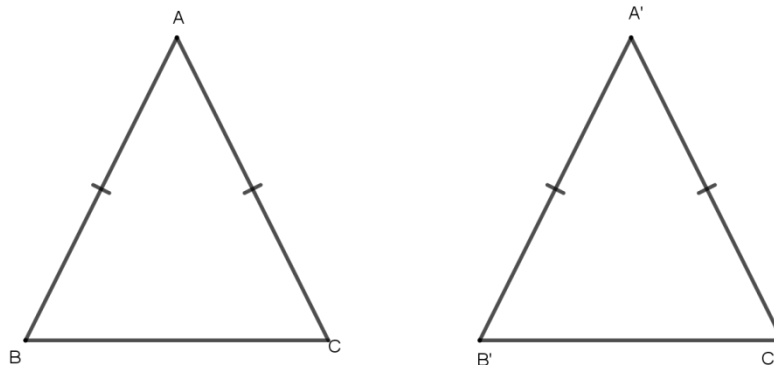
(Theo trường hợp c. c. c, hoặc c.g.c, hoặc g.c.g).

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân tại A và tam giác $A'B'C'$ cân tại A' . Cho biết cặp cạnh bên bằng nhau $AB = A'B'$. Hãy bổ sung thêm một điều kiện nữa để $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

Hướng dẫn.

Cần bổ sung thêm một điều kiện:

- Cặp cạnh đáy bằng nhau: $BC = B'C'$, khi đó $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (c.c.c)
- Hoặc cặp góc ở đỉnh bằng nhau: $\widehat{A} = \widehat{A}'$, Khi đó $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (c.g.c).
- Hoặc cặp góc ở đáy bằng nhau: $\widehat{B} = \widehat{B}'$, Khi đó $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (c.g.c hoặc g.c.g).



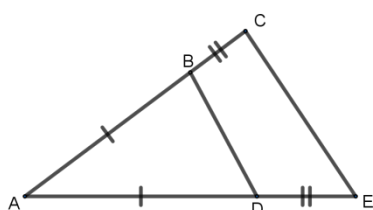
Dạng 3. NHẬN BIẾT MỘT TAM GIÁC LÀ TAM GIÁC CÂN, TAM GIÁC VUÔNG CÂN, TAM GIÁC ĐỀU

Phương pháp giải.

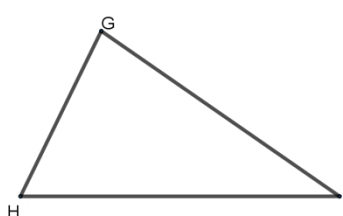
Dựa vào dấu hiệu nhận biết các tam giác cân, vuông cân, đều

Ví dụ 4. (Bài 47 tr. 127 SGK)

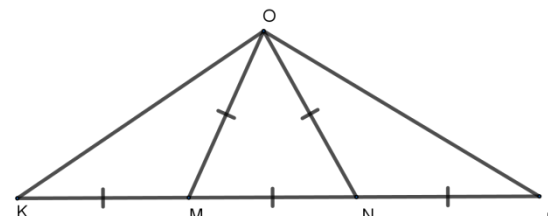
Trong các tam giác trên hình 116, 117, 118 (SGK) tam giác nào là tam giác cân, Tam giác nào là tam giác đều? Vì Sao?



Hình 116 (SGK)



Hình 117 (SGK)



Hình 118 (SGK)

Hướng dẫn.

- Hình 116(SGK): $\triangle ABD$ cân tại A , $\triangle ACE$ cân tại A
- Hình 117 (SGK): $\triangle GHI$ cân tại I .
- Hình 118 (SGK): $\triangle OMN$ là tam giác đều
 $\triangle OMK$ cân tại M , $\triangle ONP$ cân tại N
 $\triangle OKP$ cân tại O (vì $\widehat{K} = \widehat{P} = 30^\circ$).

Ví dụ 5. (Bài 52 tr. 128 SGK)

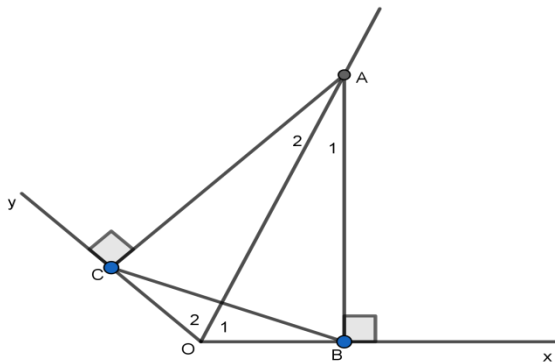
Cho góc xOy có số đo 120° , Điểm A thuộc tia phân giác của góc đó. Kẻ $AB \perp Ox$ ($B \in Ox$),

$AC \perp Oy$ ($C \in Oy$). Tam giác ABC là tam giác gì ? Tại sao?

Hướng dẫn.

$\triangle AOB = \triangle AOC$ (cạnh huyền – góc nhọn), Suy ra $AB = AC$. Ta có :
 $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = 60^\circ$

Nên $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 30^\circ$, suy ra $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tam giác ABC cân có $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên là tam giác đều



Dạng 4 SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA TAM GIÁC CÂN, VUÔNG CÂN, ĐỀU ĐỂ SUY RA CÁC ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU.

Phương pháp giải.

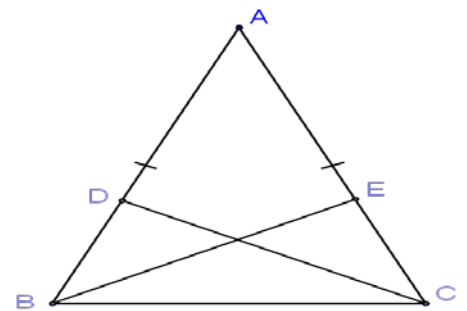
Dựa vào định nghĩa tam giác cân, vuông cân, đều.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC cân tại A . Lấy các điểm D và E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho $AD = AE$. Chứng minh rằng $BE = CD$.

Hướng dẫn.

$\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow AB = AC$.

$\triangle ABE = \triangle ACD$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = CD$



Dạng 5. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA CÁC TAM GIÁC CÂN, VUÔNG CÂN, ĐỀU ĐỂ TÍNH SỐ ĐO GÓC HOẶC CHỨNG MINH HAI GÓC BẰNG NHAU.

Phương pháp giải:

Dựa vào tính chất về góc của các tam giác cân, vuông cân, đều.

Ví dụ 7.(Bài 51 tr.128 SGK)

Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm D thuộc cạnh AC, điểm E thuộc cạnh AB sao cho AD = AE.

- a) So sánh góc ABD và góc ACE.
- b) Gọi I là giao điểm của BD và CE. Tam giác IBC là tam giác gì? Vì sao?

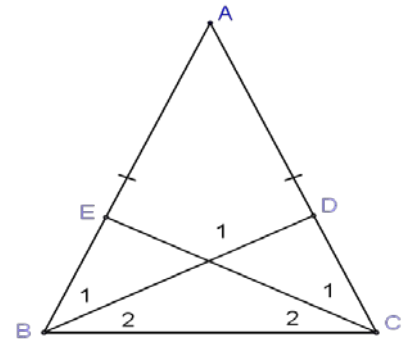
Hướng dẫn.

a) $\triangle ABD = \triangle ACE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACE}$ tức là $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$

b) $\triangle ABC$ cân tại A suy ra : $\widehat{B} = \widehat{C}$

Suy ra $\widehat{B} - \widehat{B}_1 = \widehat{C} - \widehat{C}_1$, Do đó $\widehat{B}_2 = \widehat{C}_2$.

$\triangle IBC$ có $\widehat{B}_2 = \widehat{C}_2$ nên là tam giác cân



Dạng 6: CHỨNG MINH MỘT TAM GIÁC LÀ TAM GIÁC CÂN, VUÔNG CÂN, ĐỀU ĐỂ SUY RA HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU, HAI GÓC BẰNG NHAU.

Phương pháp giải:

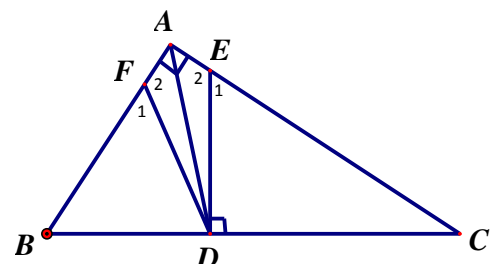
- Chứng minh một tam giác là tam giác cân, hoặc vuông cân, hoặc đều (dạng 3).
- Sử dụng định nghĩa, tính chất của các tam giác trên để suy ra hai đoạn thẳng bằng nhau (dạng 4), suy ra hai góc bằng nhau (dạng 5).

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Tia phân giác của góc A cắt BC tại D. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc BC, cắt AC tại E. Trên AB lấy điểm F sao cho $AF = AE$. Chứng minh rằng:

- a) $\widehat{B} = \widehat{DEC}$
- b) $\triangle DBF$ là tam giác cân
- c) $DB = DE$

Hướng dẫn :

- a) $\widehat{B} = \widehat{DEC}$ (vì cùng phụ với \widehat{C})
tức là $\widehat{B} = \widehat{E}_1$ (1).



b) $\triangle EAD = \triangle FAD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{E}_2 = \widehat{F}_2 \Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{F}_1$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{F}_1 \Rightarrow \triangle DBF$ cân tại D.

c) $\triangle DBF$ cân tại D $\Rightarrow DB = DF$ (3)

$\triangle EAD = \triangle FAD$ (cmt) $\Rightarrow DE = DF$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow DB = DE$

Chú ý: Thay điều kiện $\widehat{BAC} = \widehat{CDE} = 90^\circ$ bởi $\widehat{BAC} = \widehat{CDE} = \alpha$, bài toán vẫn đúng.

C. LUYỆN TẬP

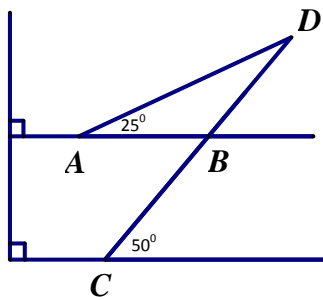
13.1 Dạng 1:

a) Vẽ tam giác đều ABC. Ở phía ngoài tam giác ABC, vẽ tam giác ACD vuông cân tại C.

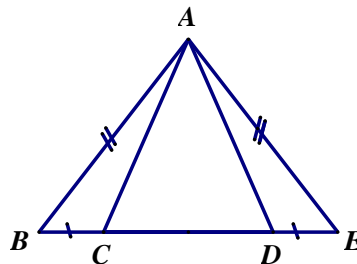
b) Tính góc BAD ở câu a).

13.2 Dạng 2: Hai tam giác vuông cân có thêm một điều kiện bằng nhau nào thì hai tam giác bằng nhau ?

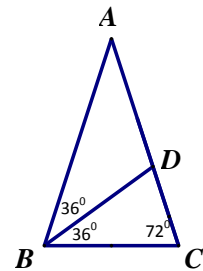
13.3 Dạng 3: Tìm các tam giác cân trên hình vẽ sau:



a)



b)



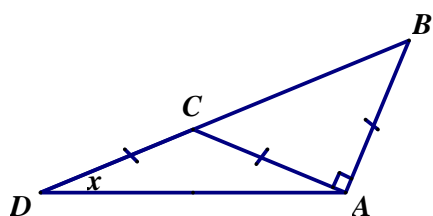
c)

13.4 Dạng 4: Cho tam giác ABC cân tại A. Kẻ BH vuông góc với AC ($H \in AC$), kẻ CK vuông góc với AB ($K \in AB$). Chứng minh $AH = AK$.

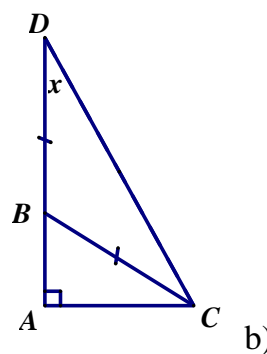
13.5 Dạng 4 và 5: Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D là trung điểm của BC. Chứng minh AD là tia phân giác của góc A.

13.6 Dạng 5: Một góc của tam giác cân bằng 40° . Tính các góc còn lại.

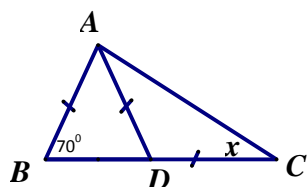
13.7 Dạng 5: Tìm số đo x trên mỗi hình sau :



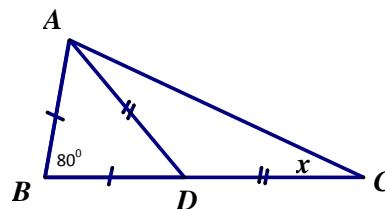
a)



b)



c)



d)

13.8 Dạng 5: Cho tam giác ABC cân tại A và tam giác đều BCD (D và A nằm khác phía đối với BC. Tính số đo góc BDA.

13.9 Dạng 5: Tam giác ABC cân tại A có $\hat{A} = 100^\circ$. Lấy các điểm D và E trên cạnh BC sao cho $BD = BA$, $CE = CA$. Tính số đo góc DAE.

13.10 Dạng 5: Chứng minh rằng góc ở đáy một tam giác cân bao giờ cũng là góc nhọn.

13.11 Dạng 5: Cho tam giác ABC cân tại B. Gọi BE là đường phân giác của góc ngoài tại đỉnh B. Chứng minh rằng $BE \parallel AC$.

13.12 Dạng 5: Cho tam giác cân AOB ($OA = OB$). Trên tia đối của tia OB lấy điểm C sao cho $OB = OC$. Tính số đo góc BAC.

13.13* Dạng 5: Tam giác ABC cân tại A, điểm M thuộc cạnh BC. Kẻ $MD \perp AB$ ($D \in AB$), kẻ $ME \perp AC$ ($E \in AC$), kẻ $BH \perp AC$ ($H \in AC$). Chứng minh rằng: $MD + ME = BH$.

13.14* Dạng 5: Cho tam giác ABC có các góc nhỏ hơn 120° . Ở phía ngoài tam giác ABC, vẽ các tam giác đều ABD và ACE.

a) Chứng minh rằng $DC = BE$.

b) Gọi I là giao điểm của DC và BE. Tính số đo góc BIC.

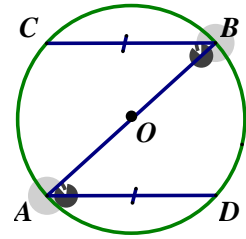
13.15* Dạng 3 và 5: Cho điểm M nằm trên đoạn thẳng AB. Vẽ về một phía của AB các tam giác đều AMC và BMD.

a) Chứng minh rằng $AD = CB$.

b) Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của AD và CB. Tam giác MIK là tam giác gì ?

13.16 Dạng 6: Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh AB, BC, CA lấy theo thứ tự các điểm D, E, F sao cho AD = BE = CF. Chứng minh rằng tam giác DEF là tam giác đều.

13.17 Dạng 6: Cho hình vẽ bên, trong đó O là tâm của đường tròn. Chứng minh rằng các dây BC và AD bằng nhau.



13.18 Dạng 6: Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ AH ⊥ BC (H ∈ BC). Tia phân giác của góc HAC cắt BC ở D. Chứng minh rằng tam giác ABD là tam giác cân.

13.19* Dạng 6: Cho tam giác ABC có AB < AC. Gọi Ax là tia phân giác của góc A. Qua trung điểm M của BC, kẻ đường thẳng vuông góc với Ax, cắt các đường thẳng AB và AC theo thứ tự D và E. Chứng minh rằng BD = CE.

13.20* Dạng 6: Tam giác ABC vuông tại A có $AC = \frac{1}{2}BC$. Chứng minh rằng $\widehat{B} = 30^0$.

13.21* Dạng 6: Tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30^0$. Chứng minh rằng $AC = \frac{1}{2}BC$.

13.22* Dạng 6: Cho tam giác nhọn ABC. Kẻ AD ⊥ BC (D ∈ BC), kẻ BE ⊥ AC (E ∈ AC). Gọi H là giao điểm của AD và BE. Biết rằng AH = BC. Tính số đo góc BAC.

§14. ĐỊNH LÝ PY-TA-GO

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lý Py-ta-go :

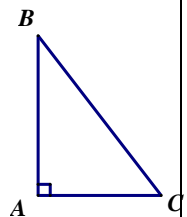
Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } A \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

2. Định lý Py-ta-go đảo:

Nếu một tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.

$$\Delta ABC : BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0$$



B. CÁC DẠNG TOÁN

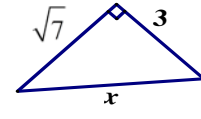
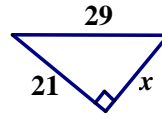
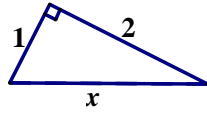
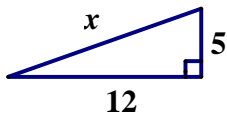
Dạng 1: TÍNH ĐỘ DÀI MỘT CẠNH CỦA TAM GIÁC VUÔNG

Phương pháp giải:

Sử dụng định lý Py-ta-go. Có trường hợp phải kẻ thêm đường vuông góc để tạo thành tam giác vuông.

Ví dụ 1: (Bài 53 tr.131 SGK)

Tìm độ dài x trên hình 127 (SGK)



Hình 127 (SGK)

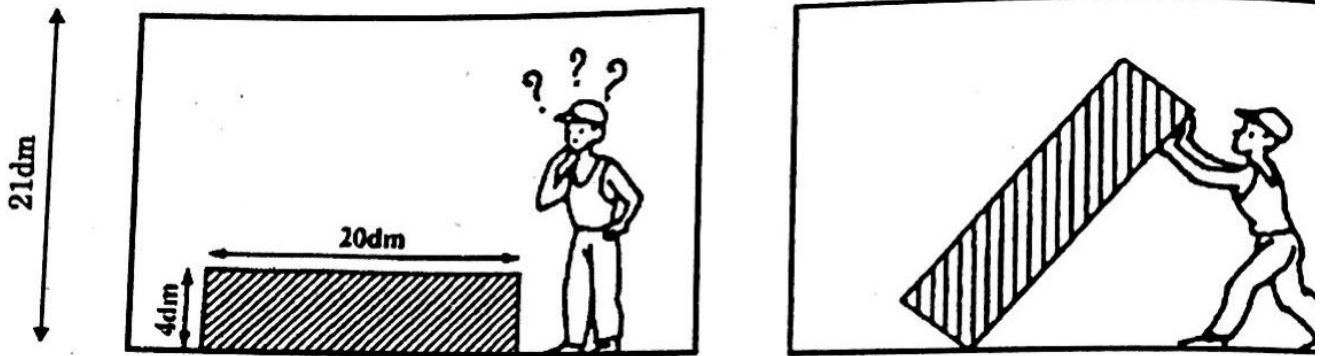
Hướng dẫn :

- a) $x^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$. Vậy $x = 13$
 b) $x^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5 = (\sqrt{5})^2$. Vậy $x = \sqrt{5}$
 c) $x^2 = 29^2 - 21^2 = 841 - 441 = 400 = 20^2$. Vậy $x = 20$.
 d) $x^2 = (\sqrt{7})^2 + 3^2 = 7 + 9 = 16 = 4^2$. Vậy $x = 4$.

Ví dụ 2: (Bài 58 tr.132 SGK)

Đố: Trong lúc anh Nam dựng tủ cho đứng thẳng, tủ có bị vướng vào trần nhà hay không ?

(Hình 130 SGK)



Hướng dẫn:

Gọi d là đường chéo của tủ, h là chiều cao của nhà. Ta thấy :

$$d^2 = 20^2 + 4^2 = 416 \Rightarrow d = \sqrt{416}$$

$$h^2 = 21^2 = 441 \Rightarrow h = \sqrt{441}$$

Suy ra $d < h$. Như vậy khi anh Nam đẩy tủ cho thẳng đứng, tủ không bị vướng vào trần nhà.

Ví dụ 3: (Bài 60 tr.133 SGK)

Cho tam giác nhọn ABC. Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Cho biết $AB = 13\text{cm}$, $AH = 12\text{cm}$, $HC = 16\text{cm}$. Tính các độ dài AC, BC.

Hướng dẫn:

ΔABC vuông tại H nên theo định lí Py- ta – go có :

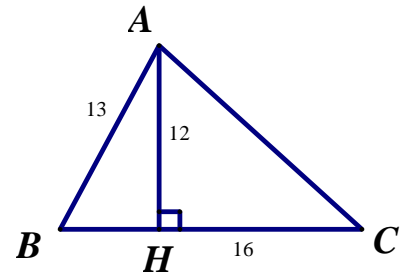
$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 = 20^2$$

Do đó $AC = 20$ cm

ΔAHB vuông tại H nên

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 = 5^2$$

Vậy $BH = 5$ (cm) $\Rightarrow BC = BH + HC = 5 + 16 = 21$ (cm)



Ví dụ 4: (Bài 61 tr.133 SGK)

Trên giấy kẻ ô vuông (độ dài cạnh của ô vuông bằng 1), cho ΔABC như hình 135 (SGK).

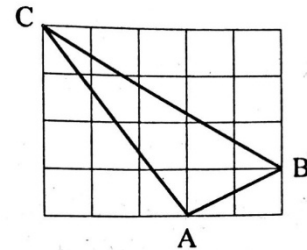
Tính độ dài mỗi cạnh của ΔABC .

Hướng dẫn:

$$AB^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \Rightarrow AB = \sqrt{5}$$

$$BC^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \Rightarrow BC = \sqrt{34}$$

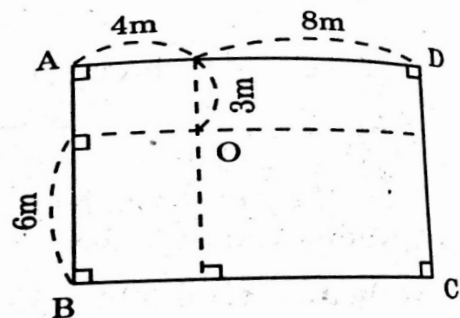
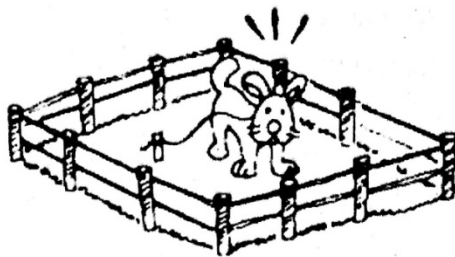
$$AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow AC = 5$$



Hình 135 (SGK)

Ví dụ 5: (Bài 62 tr.133 SGK)

Đố: Người ta buộc con Cún bằng sợi dây có một đầu buộc tại điểm O làm cho con Cún cách điểm O nhiều nhất là 9m (Hình 136 SGK). Con Cún có thể tới các vị trí A, B, C, D để canh giữ mảnh vườn hình chữ nhật ABCD hay không ? (các kích thước như trên hình vẽ)



Hướng dẫn:

$$OA^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow OA = 5 < 9$$

$$OC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow OC = 10 > 9$$

$$OD^2 = 3^2 + 8^2 = 73 \Rightarrow OD = \sqrt{73} < 9$$

$$OB^2 = 4^2 + 6^2 = 52 \Rightarrow OB = \sqrt{52} < 9$$

Như vậy, con Cún có thể tới các vị trí A, B, C nhưng không tới được vị trí C .

Dạng 2: SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ PY-TA-GO ĐỂ NHẬN BIẾT TAM GIÁC VUÔNG

Phương pháp giải:

- Tính bình phương các độ dài ba cạnh của tam giác.
- So sánh bình phương của cạnh lớn nhất với tổng các bình phương của hai cạnh kia.
- Nếu hai kết quả bằng nhau thì tam giác đó là tam giác vuông , cạnh lớn nhất là cạnh huyền.

Ví dụ 6: (Bài 56 tr.131 SGK)

Tam giác nào là tam giác vuông trong các tam giác có độ dài ba cạnh như sau :

- a) 9cm , 15cm, 12cm.
- b) 5dm, 13dm, 12dm.
- c) 7m, 7m, 10m ?

Hướng dẫn:

- a) $9^2 = 81; 15^2 = 225 ; 12^2 = 144$. Ta thấy $225 = 81 + 144$ nên là tam giác vuông.
- b) $5^2 = 25; 13^2 = 169 ; 12^2 = 144$. Ta thấy $169 = 25 + 144$ nên là tam giác vuông.
- c) $7^2 = 49; 10^2 = 100$. Ta thấy $100 \neq 49 + 49$ nên tam giác không vuông.

Ví dụ 7: (Bài 57 tr.131 SGK) Cho bài toán : “ Tam giác ABC có $AB = 8 ; AC = 17 , BC = 15$ có phải là tam giác vuông không ? ” Bạn Tâm đã giải bài toán đó như sau:

$$AB^2 + AC^2 = 8^2 + 17^2 = 64 + 289 = 353$$
$$BC^2 = 15^2 = 225$$

Do $353 \neq 225 \Rightarrow AB^2 + AC^2 \neq BC^2$. Vậy ΔABC không phải là tam giác vuông.

Lời giải trên đúng hay sai ? Nếu sai, hãy sửa lại cho đúng.

Hướng dẫn:

Lời giải trên là sai. Sửa lại như sau :

$$AB^2 + BC^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$$
$$AC^2 = 17^2 = 289$$

Ta thấy $AB^2 + BC^2 = AC^2$ nên ΔABC vuông tại B .

C. LUYỆN TẬP

14.1 Dạng 1. Tính độ dài cạnh huyền của một tam giác vuông cân biết cạnh góc vuông bằng 2dm.

14.2 Dạng 1. Tính độ dài cạnh góc vuông của một tam giác vuông cân biết cạnh huyền bằng :

- a) 2m ; b) $\sqrt{18}$ m

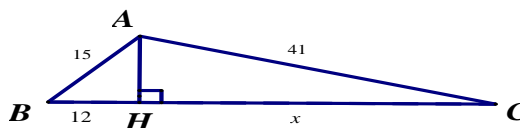
14.3 Dạng 1. Một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 52cm, độ dài các cạnh góc vuông tỉ lệ với 5 và 12. Tính độ dài các cạnh góc vuông.

14.4 Dạng 1. Cho tam giác ABC cân tại B, AB = 17cm, AC = 16cm. Gọi M là trung điểm của AC.

Tính BM.

14.5 Dạng 1. Tính các cạnh của một tam giác vuông biết tỉ số các cạnh góc vuông là 3 : 4, chu vi của tam giác bằng 36cm.

14.6 Dạng 1. Tính độ dài x trên hình bên:



14.7 Dạng 1. Cho tam giác ABC cân tại A có AB = 9cm, BC = 15cm. Tia phân giác của góc A cắt BC ở D. Chứng minh rằng $4,9\text{cm} < AD < 5\text{cm}$.

14.8 Dạng 1. Tìm số tự nhiên a cùng với các số 24 và 25 làm thành độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

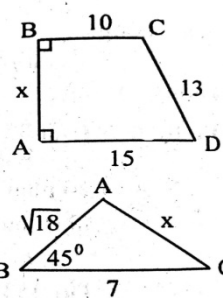
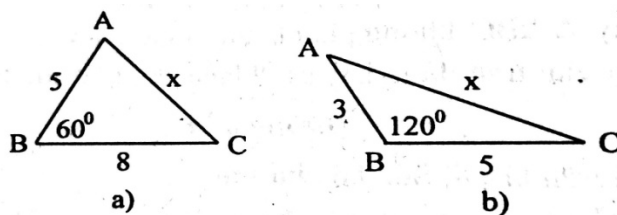
14.9* Dạng 1. Tam giác ABC có $\hat{A} = 90^\circ$; $\hat{B} = 30^\circ$, AB = 3cm.

Tính các độ dài AC, BC.

14.10 Dạng 1. Tính độ dài x trên hình bên.

14.11 Dạng 1. Tính độ dài x trên hình bên.

14.12* Dạng 1. Tính độ dài x trên các hình sau:



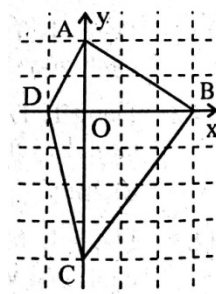
14.13* Dạng 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Biết HB = 9cm, HC = 16cm.

Tính độ dài AH.

14.14 Dạng 1. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ điểm A có tọa độ (3; 5).

Tính khoảng cách từ điểm A đến gốc tọa độ.

14.15 Dạng 1. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ điểm A có tọa độ (1; 1). Đường tròn tâm O với bán kính OA cắt các tia Ox, Oy theo thứ tự ở B và C. Tìm tọa độ của các điểm B và C.



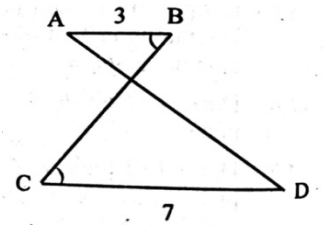
14.16 Dạng 1. Tính độ dài của các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA trên mặt phẳng tọa độ (Hình vẽ bên, với đơn vị là đơn vị dài của hệ trục tọa độ).

14.17 Dạng 2. Bạn Mai vẽ tam giác ABC có AB = 4cm, AC = 8cm, BC = 9cm rồi đo thấy $\hat{A} = 90^\circ$ và kết luận rằng tam giác ABC vuông. Điều đó có đúng không ?

14.18 Dạng 2. Chọn trong các số 5, 8, 9, 12, 13, 15

các bộ ba số có thể là độ dài các cạnh của một tam giác vuông.

14.19* Dạng 2. Cho hình vẽ bên, trong đó $BC = 6\text{cm}$, $AD = 8\text{cm}$.
Chứng minh rằng AD vuông góc với BC .



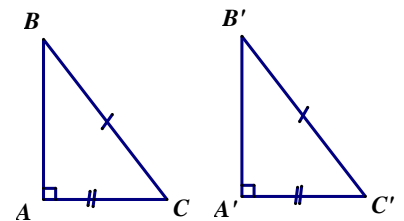
§15. CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU

CỦA TAM GIÁC VUÔNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- * Ngoài các trường hợp bằng nhau đã biết của hai tam giác vuông, còn có trường hợp bằng nhau theo cạnh huyền – cạnh góc vuông.
- * Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A}' = 90^\circ \\ BC = B'C' \\ AC = A'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)}$$



B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: TÌM HOẶC CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC VUÔNG BẰNG NHAU

Phương pháp giải:

- Xét hai tam giác vuông.
- Kiểm tra điều kiện bằng nhau cạnh – góc – cạnh, hoặc cạnh huyền – góc nhọn, hoặc cạnh huyền – cạnh góc vuông.
- Kết luận hai tam giác bằng nhau.

Ví dụ 1: (Bài 66 tr.137 SGK)

Tìm các tam giác bằng nhau trên hình vẽ bên.

Hướng dẫn:

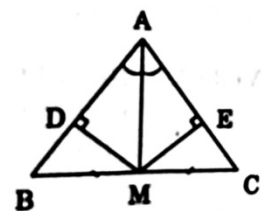
$$\Delta ADM = \Delta AEM \text{ (cạnh huyền – góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow MD = ME$$

$$\Delta MDB = \Delta MEC \text{ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)}$$

Ta còn suy ra $AD = AE$, $BD = CE$ nên $AB = AC$

$$\text{Do đó } \Delta AMB = \Delta AMC \text{ (c – c – c).}$$



Dạng 2: BỔ SUNG THÊM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI TAM GIÁC VUÔNG BẰNG NHAU

Phương pháp giải:

- Xét xem hai tam giác vuông đã có các yếu tố nào bằng nhau.
- Xét xem cần bổ sung thêm điều kiện nào để hai tam giác bằng nhau (dựa vào các trường hợp bằng nhau của hai tam giác)

Ví dụ 2: (Bài 64 tr.136 SGK)

Các tam giác vuông ABC và DEF có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AC = DF$. Hãy bổ sung thêm một điều kiện bằng nhau (về cạnh hay về góc) để $\Delta ABC = \Delta DEF$

Hướng dẫn:

Bổ sung $AB = DE$ thì

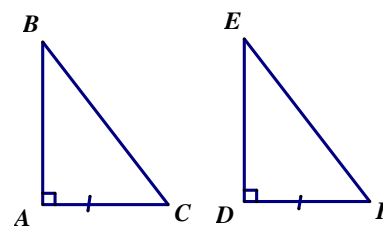
$$\Delta ABC = \Delta DEF \text{ (c.g.c)}$$

Bổ sung $\widehat{C} = \widehat{F}$ thì

$$\Delta ABC = \Delta DEF \text{ (g.c.g)}$$

Bổ sung $BC = EF$ thì

$$\Delta ABC = \Delta DEF \text{ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)}$$



Dạng 3: SỬ DỤNG CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG ĐỂ CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU, HAI GÓC BẰNG NHAU.

Phương pháp giải:

- Chọn hai tam giác vuông có cạnh (góc) và hai đoạn (góc) cần chứng minh bằng nhau.
- Tìm thêm hai điều kiện bằng nhau , trong đó có một điều kiện về cạnh để kết luận hai tam giác bằng nhau.
- Suy ra hai cạnh (góc) tương ứng bằng nhau.

Ví dụ 3: (Bài 63 tr.136 SGK)

Cho tam giác ABC cân tại A. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Chứng minh rằng :

a) $HB = HC$

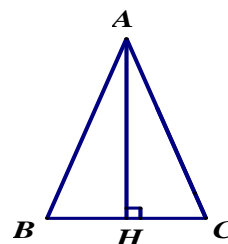
b) $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$

Hướng dẫn:

a) $\Delta AHB = \Delta AHC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$$\Rightarrow HB = HC.$$

b) $\Delta AHB = \Delta AHC \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{CAH}.$



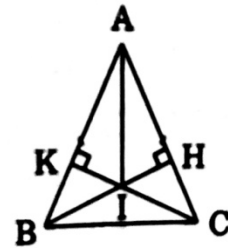
Ví dụ 4: (Bài 65 tr.137 SGK)

Cho tam giác ABC cân tại A. Kẻ $BH \perp AC$ ($H \in AC$), $CK \perp AB$ ($K \in AB$)

- a) Chứng minh rằng $AH = AK$.
 b) Gọi I là giao điểm của BH và CK . Chứng minh rằng AI là tia phân giác của góc A .

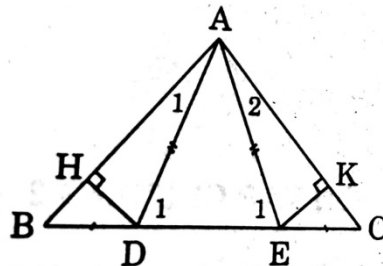
Hướng dẫn:

- a) $\triangle ABH = \triangle ACK$ (cạnh huyền – góc nhọn)
 $\Rightarrow AH = AK$.
 b) $\triangle AIH = \triangle AIK$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)
 $\Rightarrow \widehat{IAH} = \widehat{IAK} \Rightarrow AI$ là tia phân giác của góc A .

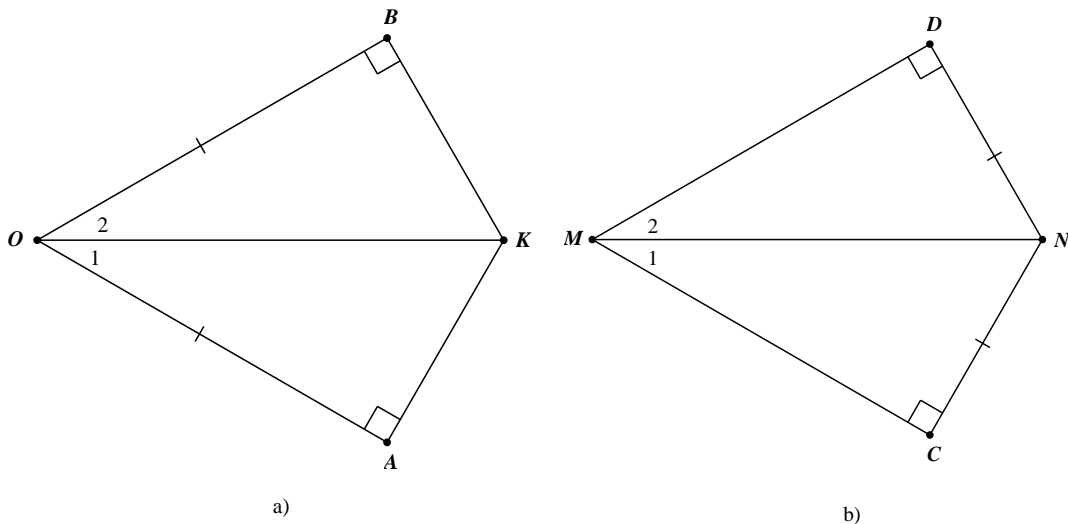


C. LUYỆN TẬP

15.1 Dạng 1. Tìm các tam giác vuông bằng nhau trên hình sau :



- 15.2** Dạng 1. Chứng minh rằng : Nếu một cạnh góc vuông và góc nhọn đối diện với cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và góc nhọn đối diện với cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó bằng nhau.
- 15.3** Dạng 2. Các tam giác ABC và DMN có $\widehat{B} = \widehat{M} = 90^\circ$; $\widehat{A} = \widehat{D}$. Hãy bổ sung thêm một điều kiện bằng nhau để $\triangle ABC = \triangle DMN$.
- 15.4** Dạng 3. Cho hình vẽ dưới đây. Chứng minh rằng :
 a) OK là tia phân giác của góc O .
 b) MN là tia phân giác của góc M .



15.5. Dạng 3. Cho tam giác ABC cân tại C . Các đường trung trực của CA và của CB cắt nhau tại I . Chứng minh rằng CI là tia phân giác của góc C .

15.6. Dạng 3. Cho tam giác ABC cân tại B . Qua A kẻ đường vuông góc với AB , qua C kẻ đường vuông góc với CB , chúng cắt nhau ở K . Chứng minh rằng BK là tia phân giác của góc B .

15.7. Dạng 3. Cho tam giác ABC . Các tia phân giác của góc B và C cắt nhau ở I . Kẻ $ID \perp AC (E \in AC)$. Chứng minh rằng $AD = AE$.

15.8* Dạng 3. Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Tia phân giác của góc A cắt đường trung trực của BC tại I . Qua I kẻ các đường thẳng vuông góc với hai cạnh của góc A , cắt các tia AB và AC theo thứ tự tại H và K . Chứng minh rằng:

a) $AH = AK$

b) $BH = CK$

c) $AK = \frac{AC + AB}{2}, CK = \frac{AC - AB}{2}$

ÔN TẬP CHƯƠNG 2

A. BÀI TẬP ÔN TRONG SGK

Dạng 1. CHỌN CÂU PHÁT BIỂU ĐÚNG, CHO MỘT HỆ QUẢ, TÌM ĐỊNH LÝ TRỰC TIẾP SUY RA HỆ QUẢ ĐÓ

Phương pháp giải.

Liên hệ đến các kiến thức lí thuyết tương ứng để trả lời

Ví dụ 1: (Bài 67 tr.140 SGK)

Điền dấu “x” vào chỗ trống (...) một cách thích hợp:

Câu	Đúng	Sai
1. Trong một tam giác, góc nhỏ nhất là góc nhọn
2. Trong một tam giác, có ít nhất là 2 góc nhọn
3. Trong một tam giác, góc lớn nhất là góc tù
4. Trong một tam giác vuông, hai góc nhọn bù nhau
5. Nếu \hat{A} là góc ở đáy của một tam giác cân thì $\hat{A} < 90^\circ$
6. Nếu \hat{A} là góc ở đỉnh của một tam giác cân thì $\hat{A} < 90^\circ$

Hướng dẫn

Câu 1 đúng, câu 2 đúng. Câu 3 sai. Chẳng hạn trong tam giác vuông, góc lớn nhất là góc vuông. Câu 4 sai. Sửa lại cho đúng: Trong một tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau. Câu 5 đúng. Câu 6 sai. Chẳng hạn có tam giác cân mà góc ở đỉnh bằng 100°

Ví dụ 2: (Bài 68 tr.141 SGK)

Các tính chất sau đây được suy ra trực tiếp từ định lí nào?

- Góc ngoài của một tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó
- Trong một tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau
- Trong một tam giác đều, các góc bằng nhau
- Nếu một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

Hướng dẫn

Các câu a, b được suy ra từ định lí “Tổng ba góc của một tam giác bằng 180° ”

Câu c được suy ra từ định lí “Trong tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau”

Câu d được suy ra từ định lí “Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân”

Dạng 2. SỬ DỤNG TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC ĐỂ CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU, HAI GÓC BẰNG NHAU; TỪ ĐÓ NHẬN BIẾT TIA PHÂN GIÁC CỦA GÓC, ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA ĐOẠN THẲNG, HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC.

Ví dụ 3. (Bài 69 tr.141 SGK)

Cho điểm A nằm ngoài đường thẳng a . Vẽ cung tròn tâm A cắt đường thẳng a ở B và C . Vẽ các cung tròn tâm B và tâm C có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau tại một điểm khác A , gọi điểm đó là D . Hãy giải thích vì sao AD vuông góc với đường thẳng a .

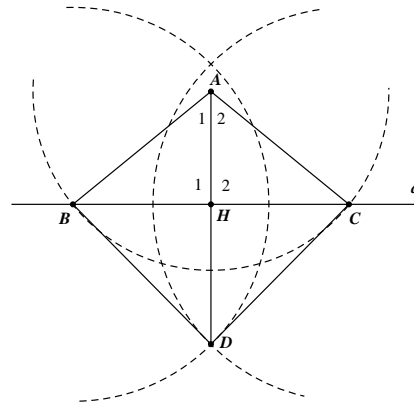
Hướng dẫn.

$$\triangle ABD = \triangle ACD (c.c.c) \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$$

Gọi H là giao điểm của AD và a .

Ta có: $\triangle AHB = \triangle AHC (c.g.c)$, từ đó

chứng minh được $AH \perp a$ tức là $AD \perp a$



Dạng 3. NHẬN BIẾT TAM GIÁC VUÔNG, TAM GIÁC CÂN, TAM GIÁC VUÔNG CÂN, TAM GIÁC ĐỀU

Phương pháp giải.

- Để nhận biết tam giác vuông, cần chứng tỏ một góc của tam giác bằng 90° . Có trường hợp phải sử dụng định lý đảo của định lý Py-ta-go
- Để nhận biết tam giác cân, cần chứng tỏ hai cạnh bằng nhau, hoặc hai góc bằng nhau.
- Để nhận biết tam giác vuông cân, cần chứng tỏ tam giác đó vuông có hai cạnh bằng nhau, hoặc có hai góc bằng nhau, hoặc có một góc 45° .
- Để nhận biết tam giác đều, cần chứng tỏ tam giác đó có ba cạnh bằng nhau, hoặc ba góc bằng nhau, hoặc hai góc bằng 60° , hoặc chứng tỏ đó là tam giác cân có một góc bằng 60°

Ví dụ 4. (Bài 70 tr.141. SGK)

Cho tam giác ABC cân tại A . Trên tia đối của tia BC lấy điểm M , trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $BM = CN$.

- a) Chứng minh rằng $\triangle AMN$ là tam giác cân
- b) Kẻ $BH \perp AM (H \in AM)$, kẻ $CK \perp AN (K \in AN)$. Chứng minh rằng $BH = CK$.
- c) Chứng minh rằng $AH = AK$
- d) Gọi O là giao điểm của HB và KC . Tam giác OBC là tam giác gì? Vì sao?
- e) Khi $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và $BM = CN = BC$, hãy tính số đo các góc của tam giác AMN và xác định dạng của tam giác OBC .

Hướng dẫn

a) $\triangle ABC$ cân $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{ACN}$

$\triangle ABM = \triangle ACN$ (c.g.c) suy ra

$\widehat{M} = \widehat{N} \Rightarrow \triangle AMN$ là tam giác cân

b) $\triangle BHM = \triangle CKN$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BH = CK$

c) $\triangle ABH = \triangle ACK$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow AH = AK$

d) $\triangle BHM = \triangle CKN$ (câu b) suy ra $\widehat{B}_2 = \widehat{C}_2 \Rightarrow \widehat{B}_3 = \widehat{C}_3 \Rightarrow \triangle OBC$ là tam giác cân

e) $\triangle ABC$ cân có $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên là tam giác đều suy ra

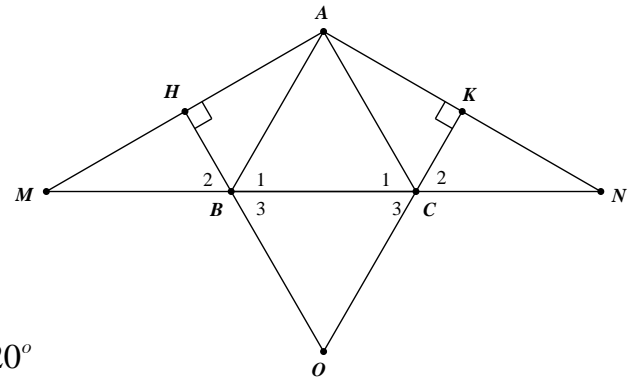
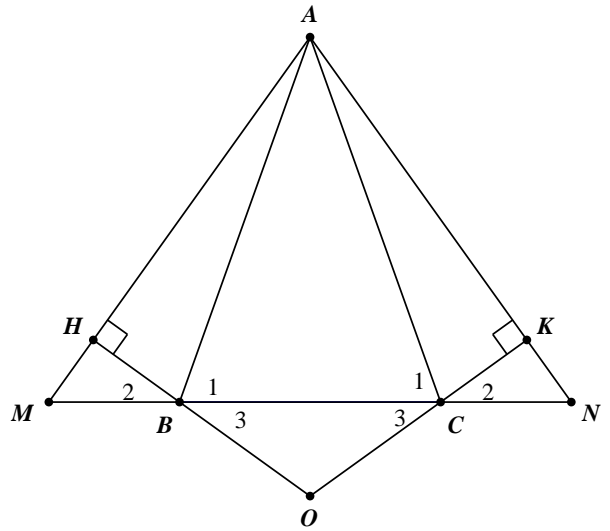
$\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 = 60^\circ$

$\triangle ABM$ có $AB = BM$ (cùng bằng BC) nên là tam giác

cân, do $\widehat{ABM} = 120^\circ$ nên $\widehat{M} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$

Tương tự $\widehat{N} = 30^\circ$. $\triangle AMN$ có $\widehat{M} = \widehat{N} = 30^\circ, \widehat{MAN} = 120^\circ$

$\triangle MHB$ vuông có $\widehat{M} = 30^\circ$ nên $\widehat{B}_2 = 60^\circ$, suy ra $\widehat{B}_3 = 60^\circ$. $\triangle OBC$ cân (câu d) có $\widehat{B}_3 = 60^\circ$ nên là tam giác đều.



Ví dụ 5. (Bài 71 tr.141 SGK)

Tam giác ABC trên giấy kẻ ô vuông (hình 151 SGK) là tam giác gì? Vì sao?

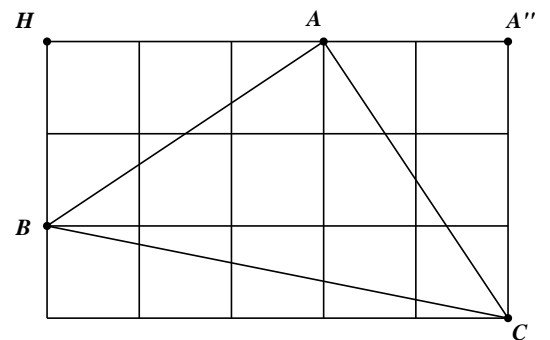
Hướng dẫn

$\triangle AHB = \triangle CKA$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = CA, \widehat{BAH} = \widehat{ACK}$

Ta lại có: $\widehat{ACK} + \widehat{CAK} = 90^\circ$ nên $\widehat{BAH} + \widehat{CAK} = 90^\circ$.

Do đó $\widehat{BAC} = 90^\circ$

Vậy $\triangle ABC$ là tam giác vuông cân



Hình 151 (SGK)

Ví dụ 6. (Bài 72 tr.141 SGK)

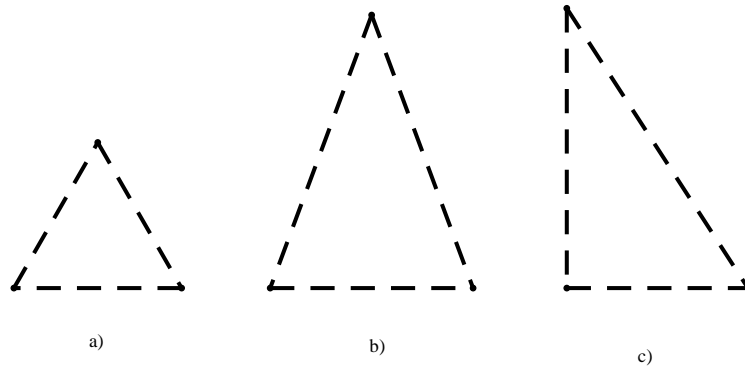
Đố vui: Dùng đồ Cường dùng 12 que diêm bằng nhau để xếp thành:

- a) Một tam giác đều
- b) Một tam giác cân mà không đều
- c) Một tam giác vuông

Em hãy giúp Cường trong từng trường hợp trên

Hướng dẫn

Xem hình vẽ



Dạng 4. TÍNH ĐỘ DÀI CẠNH CỦA TAM GIÁC VUÔNG

Phương pháp giải

Sử dụng Định lí Py – ta – go

Ví dụ 7. (Bài 73 tr.141 SGK)

Đố: Trên hình 152 (SGK), một cầu trượt có đường lên BA dài $5m$, độ cao AH là $3m$, độ dài BC là $10m$ và CD là $2m$. Bạn Mai nói rằng đường trượt tổng cộng ACD gấp hơn hai lần đường lên BA . Bạn Vân nói rằng điều đó không đúng. Ai đúng, ai sai?

Hướng dẫn

$\triangle AHB$ vuông tại H nên:

$$HB^2 = AB^2 - AH^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

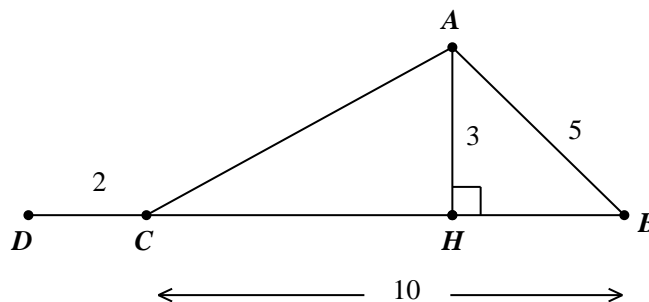
$$HB = 4m$$

$$HC = 10 - 4 = 6(m)$$

$\triangle AHC$ vuông tại H nên:

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 3^2 + 6^2 = 45$$

Suy ra $AC = \sqrt{45} \approx 6,7(m)$



Độ dài đường trượt ACD bằng: $6,7 + 2 = 8,7(m)$, chưa bằng hai lần đường lên BA . Vậy Vân đúng, Mai sai.

B. BÀI TẬP ÔN BỔ SUNG

1. Dạng 1. Chọn câu phát biểu đúng trong các câu sau:

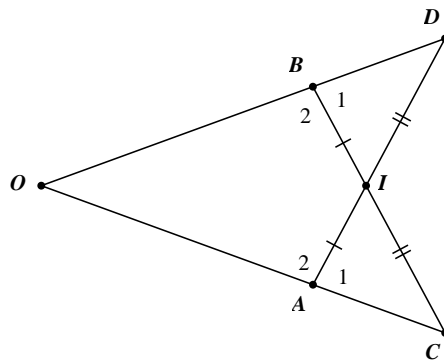
- a) Trong một tam giác, không thể có hai góc tù
- b) Góc ngoài của tam giác phải là góc tù
- c) Nếu cạnh đáy và góc đối diện với cạnh ấy của tam giác cân này bằng cạnh đáy và góc đối diện với cạnh ấy của tam giác cân kia thì hai tam giác đó bằng nhau.
- d) Nếu hai cạnh và một góc của tam giác này bằng hai cạnh và một góc của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau

2. Dạng 2 và 3. Cho tam giác ABC cân tại A . Điểm D thuộc cạnh AB , điểm E thuộc cạnh AC sao cho $AD = AE$. Gọi K là giao điểm của BE và CD . Chứng minh rằng:

- a) $BE = CD$
- b) $\triangle KBD = \triangle KCE$
- c) AK là tia phân giác của góc A
- d) $\triangle KBC$ là tam giác cân

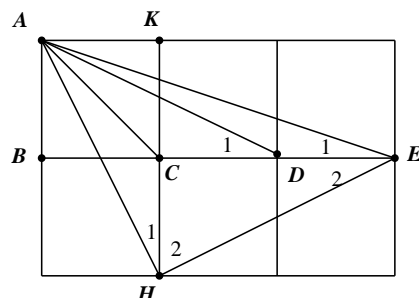
3. Dạng 2 và 3. Cho tam giác ABC cân tại A . Lấy điểm D trên cạnh AB , điểm E trên tia đối của tia CA sao cho $BD = CE$. Gọi M là giao điểm của DE và BC . Chứng minh rằng $DM = ME$.

4. Dạng 2. Cho hình vẽ sau đây. Chứng minh $OA = OB$



5*. Dạng 2 và 3. Cho hình vẽ bên trên giấy kẻ ô vuông. Chứng minh rằng:

- a) $\widehat{E}_2 = \widehat{H}_1$
- b) $\triangle AHE$ vuông cân
- c) $\widehat{D}_1 = \widehat{H}_1$
- d) $\widehat{D}_1 + \widehat{E}_1 = 45^\circ$



6. Dạng 3 và 4. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ$, $AB = 7\text{cm}$, $BC = 15\text{cm}$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi H là trung điểm của BD .

a) Tính độ dài HD

b) Tính độ dài AC

c) Tam giác ABC có là tam giác vuông hay không?

----- CHÚC CÁC EM HỌC TỐT -----

THCS.TOANMATH.com