PHẦN 1

QUAN HỆ SONG SONG

A – LÝ THUYẾT CHUNG

I - ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

1. Mở đầu về hình học không gian

Hình học không gian có các đối tượng cơ bản là điểm, đường thẳng và mặt phẳng.

Quan hệ thuộc: Trong không gian:

a. Với một điểm A và một đường thẳng d có thể xảy ra hai trường hợp:
   - Điểm A thuộc đường thẳng d, kí hiệu $A \in d$.
   - Điểm A không thuộc đường thẳng, kí hiệu $A \notin d$.

b. Với một điểm A và một mặt phẳng (P) có thể xảy ra hai trường hợp:
   - Điểm A thuộc mặt thẳng (P), kí hiệu $A \in (P)$.
   - Điểm A không thuộc đường thẳng, kí hiệu $A \notin (P)$.

2. Các tính chất thừa nhận của hình học không gian

Tính chất thừa nhận 1: Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.

Tính chất thừa nhận 2: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

Tính chất thừa nhận 3: Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.

Tính chất thừa nhận 4: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.

Tính chất thừa nhận 5: Trong mỗi mặt phẳng, các kết đã biết của hình học phẳng đều đúng.

Định lí: Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

3. Điều kiện xác định mặt phẳng

Có bốn cách xác định trong một mặt phẳng:

Cách 1: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng của mặt phẳng, kí hiệu (ABC).

Cách 2: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua một đường thẳng d và một điểm A không thuộc d, kí hiệu (A, d).

Cách 3: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng a, b cắt nhau, kí hiệu (a,b).

Cách 4: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng a, b song song, kí hiệu (a,b).

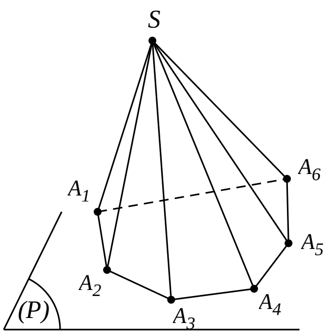
4. Hình chóp và tứ diện

Định nghĩa: Cho đa giác $A_1A_2...A_n$ và cho điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n miền đa giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_{n-1}A_n$.

Hình gồm n tam giác đó và đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ được gọi là hình chóp $S.A_1A_2A_3...A_n$.

Trong đó:

- Điểm S gọi là đỉnh của hình chóp.
- Đa giác $A_1A_2...A_n$ gọi là mặt đáy của hình chóp.
- Các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$ gọi là các cạnh đáy của hình chóp.
- Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ gọi là các cạnh bên của hình chóp.
- Các miền tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_{n-1}A_n$ gọi là các mặt bên của hình chóp.



Nếu đáy của hình chóp là một miền tam giác, tứ giác, ngũ giác,… thì hình chóp tương ứng gọi là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác,…

Chú ý

a. Hình chóp tam giác còn được gọi là hình tứ diện.

b. Hình tứ diện có bốn mặt là những tam giác đều hay có tất cả các cạnh bằng nhau được gọi là hình tứ diện đều.

II - ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI ĐƯỜNG THẲNG

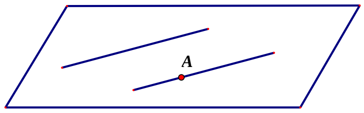
1. Định nghĩa

Trong phần vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian, ta biết rằng hai đường thẳng phân biệt bất kì hoặc chéo nhau hoặc song song hoặc cắt nhau. Nếu hai đường thẳng phân biệt đồng phẳng và không cắt nhau thì ta nói hai đường thẳng đó song song với nhau.

Định nghĩa:

Hai đường thẳng phân biệt a,b trong không gian được gọi là song song với nhau, kí hiệu $a//b$ nếu chúng đồng phẳng và không cắt nhau.

2. Tính chất



Định lí 1: Trong không gian cho đường thẳng d và điểm A nằm ngoài d. Lúc đó tồn tại duy nhất một đường thẳng a và A và song song với đường thẳng d.

Chú ý:

Định lí này cho ta thêm một cách xác định đường thẳng trong không gian: đó là đường thẳng đi qua một điểm và song song với một đường thẳng cho trước không chứa điểm đó. Kết hợp với định lí 2 dưới đây cho ta một cách để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng.

Định lí 2 (Về giao tuyến của ba mặt phẳng):

Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

Hệ quả:

Nếu hai mặt phẳng phân biệt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

Đến đây ta có thể bổ sung một phương pháp tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

> ***Bước 1:*** Chỉ ra hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ lần lượt chứa hai đường thẳng song song a,b.
>
> ***Bước 2:*** Tìm một điểm chung M của hai mặt phẳng
>
> ***Bước 3:*** Khi đó $(\alpha)\cap(\beta)=Mx//a//b$

Định lí 3:

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Như vậy, cho hai đường thẳng phân biệt thỏa mãn $\begin{cases} a//b \\ b//c \end{cases} \Rightarrow a//b$

3. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

a) Định nghĩa

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.

b. Phương pháp tính góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Bước 1: Dựng góc

- Tìm trên hình vẽ xem góc giữa hai đường thẳng có sẵn không?

- Nếu không có sẵn thì ta tiến hành:

+ Chọn một điểm O bất kì trong không gian.

+ Qua O dựng đường thẳng $a' \parallel a,\ b' \parallel b$. Góc nhọn hay góc vuông tọc bởi a', b' chính là góc giữa a và b.

Lưu ý:

+ Ta thường lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng a và b.

+ Chọn O sao cho góc giữa a', b' là góc của một tam giác mà độ dài các cạnh của nó đã biết hoặc có thể tính dễ dàng

Bước 2: Tính góc

Dùng hệ thức lượng trong tam giác, tỉ số lượng giác hay định lí cosin, sin. Trường hợp góc giữa hai đường thẳng a và b bằng 90^0 ta nói $a \perp b$.

III – ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P). Căn cứ vào số điểm chung của đường thẳng và mặt phẳng ta có ba trường hợp sau:

a. Đường thẳng a và mặt phẳng (P) không có điểm chung, tức là:

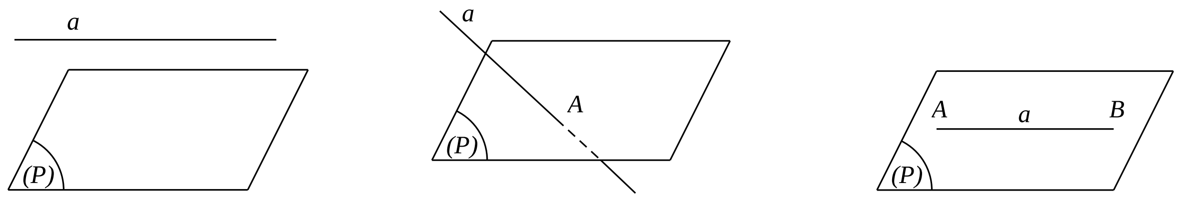
$$a \cap (P) = \varnothing \Leftrightarrow a \,//\, (P).$$

b. Đường thẳng a và mặt phẳng (P) chỉ có một điểm chung, tức là:

$$a \cap (P) = A \Leftrightarrow a \text{ cắt } (P) \text{ tại } A.$$

c. Đường thẳng a và mặt phẳng (P) có hai điểm chung, tức là:

$$a \cap (P) = \{A,\ B\} \Leftrightarrow a \subset (P).$$



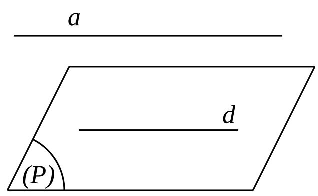
$a \cap (P) = \varnothing \Leftrightarrow a \,//\, (P)$. $\quad a \cap (P) = \{A\} \Leftrightarrow a$ cắt (P). $\quad a \cap (P) = \{A,\ B\} \Leftrightarrow a \subset (P)$.

2. Điều kiện để một đường thẳng song song với một mặt phẳng

Định lí 1: Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nào đó trong (P) thì a song song với (P).

Tức là, $a \not\subset (P)$ thì nếu:

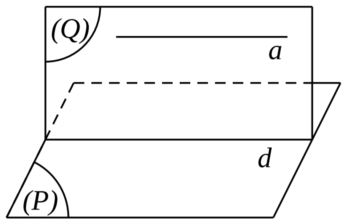
$a \parallel d \subset (P) \Rightarrow a \parallel (P)$.



3. Tính chất

Định lí 2: Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng (Q) chứa a mà cắt (P) thì sẽ cắt theo một giao tuyến song song với a.

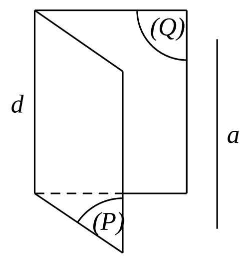
Tức là, nếu $\begin{cases} a \parallel (P) \\ a \subset (Q) \quad \left[(Q) \cap (P) = d\right] \end{cases} \Rightarrow a \parallel d$.



Hệ quả 1: Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó trong mặt phẳng.

Hệ quả 2: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến (nếu có) của chúng song song với đường thẳng đó.

Tức là: $\begin{cases} (P) \cap (Q) = d \\ (P) \parallel a \\ (Q) \parallel a \end{cases} \Rightarrow d \parallel a.$



Hệ quả 3: Nếu a và b là hai đường thẳng chéo nhau thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng song song với b.

IV - HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

1. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng phân biệt

Cho 2 mặt phẳng (P) và (Q). Căn cứ vào số đường thẳng chung của 2 mặt phẳng ta có ba trường hợp sau:

a. Hai mặt phẳng (P) và (Q) không có đường thẳng chung, tức là:

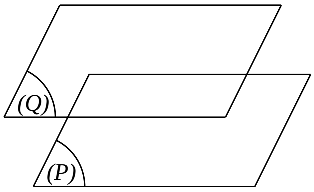
$$(P) \cap (Q) = \varnothing \Leftrightarrow (P) \parallel (Q).$$

b. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chỉ có một đường thẳng chung, tức là:

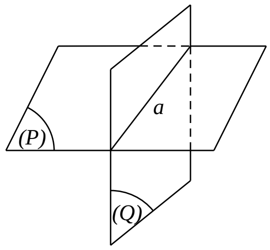
$(P)\cap(Q)=a \Leftrightarrow (P)$ cắt (Q).

c. Hai mặt phẳng (P) và (Q) có 2 đường thẳng chung phân biệt, tức là:

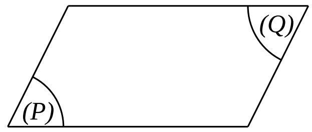
$(P)\cap(Q)=\{a,\, b\} \Leftrightarrow (P)\equiv(Q)$.



$(P)\cap(Q)=\varnothing \Leftrightarrow (P)\,/\!/\,(Q)$.



$(P)\cap(Q)=a \Leftrightarrow (P)$ cắt (Q).

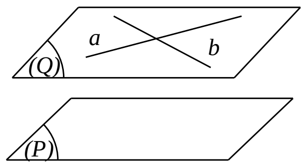


$(P)\cap(Q)=\{a,\, b\} \Leftrightarrow (P)\cap(Q)$.

2. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Định lí 1: Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng $a,\, b$ cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song (Q).

Tức là: $\begin{cases} a,\, b \in (P) \\ a\cap b=\{I\} \\ a\,/\!/\,(P),\, b\,/\!/\,(Q) \end{cases} \Rightarrow (P)\,/\!/\,(Q)$.



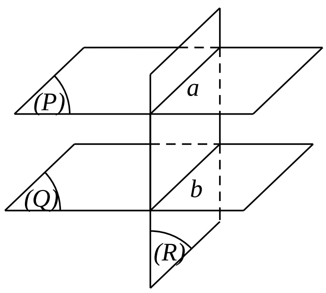
3. Tính chất

Tính chất 1: Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Hệ quả 1: Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng (P) song song với (Q).

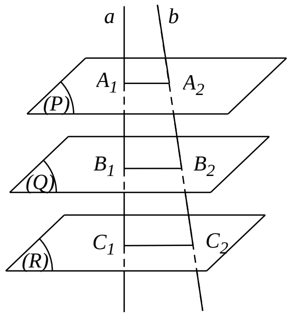
Hệ quả 2: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Tính chất 2: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.



Tức là: $\begin{cases} (P)\,/\!/\,(Q) \\ a=(P)\cap(R) \\ b=(Q)\cap(R) \end{cases} \Rightarrow a\,/\!/\,b.$

Định lí Ta – lét trong không gian: Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.



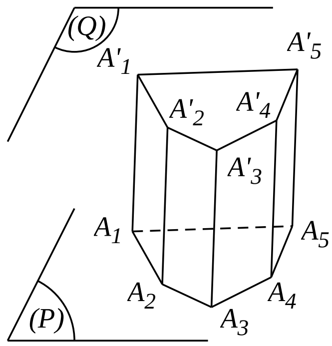
Tức là: $\begin{cases} (P) /\!/ (Q) /\!/ (R) \\ a \cap (P) = A_1;\ a \cap (Q) = B_1;\ a \cap (R) = C_1 \\ b \cap (P) = A_2;\ b \cap (Q) = B_2;\ b \cap (P) = C_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}.$$

4. Hình lăng trụ và hình hộp

Định nghĩa hình lăng trụ: Hình lăng trụ là một hình đa diện có hai mặt nằm trong hai mặt phẳng song song gọi là hai đáy và tất cả các cạnh không thuộc hai cạnh đáy đều song song với nhau.

Trong đó:



- Các mặt khác với hai đáy gọi là các mặt bên của hình lăng trụ.
- Cạnh chung của hai mặt bên gọi là cạnh bên của hình lăng trụ.
- Tùy theo đa giác đáy, ta có hình lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác …

Từ định nghĩa của hình lăng trụ, ta lần lượt suy ra các tính chất sau:

a. Các cạnh bên song song và bằng nhau.

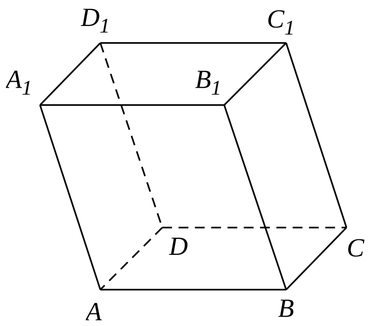
b. Các mặt bên và các mặt chéo là những hình bình hành.

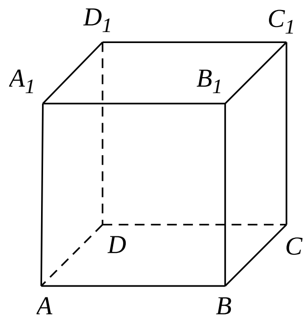
c. Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau.

Định nghĩa hình hộp: Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành gọi là hình hộp.

a. Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình chữ nhật gọi là hình hộp chữ nhật.

b. Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình vuông gọi là hình lập phương.

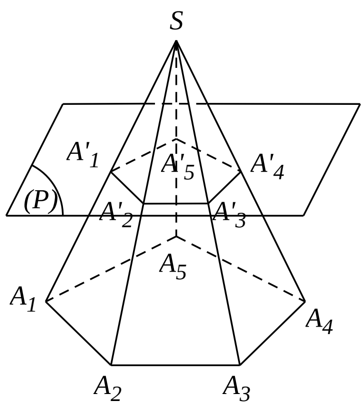




Chú ý: Các đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

5. Hình chóp cụt

Định nghĩa: Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$. Một mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng chứa đa giác đáy cắt các cạnh $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ theo thứ tự tại $A_1', A_2', ..., A_n'$. Hình tạo bởi thiết diện $A_1'A_2'...A_n'$ và đáy $A_1A_2...A_n$ của hình chóp cùng với các mặt bên $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, ..., $A_nA_1A_1'A'_n$ gọi là một hình chóp cụt.



Trong đó:

- Đáy của hình chóp gọi là đáy lớn của hình chóp cụt, còn thiết diện gọi là đáy nhỏ của hình chóp cụt.
- Các mặt còn lại gọi là các mặt bên của hình chóp cụt.
- Cạnh chung của hai mặt bên kề nhau như $A_1A_1', A_2A_2', ..., A_nA_n'$ gọi là cạnh bên của hình chóp cụt.

Tùy theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác,… ta có hình chóp cụt tam giác, hình chóp cụt tứ giác, hình chụp cụt ngũ giác,…

Tính chất: Với hình chóp cụt, ta có các tính chất sau:

1. Hai đáy của hình chóp cụt là hai đa giác đồng dạng.
2. Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang.
3. Các cạnh bên của hình chóp cụt đồng quy tại một điểm.

B– BÀI TẬP

ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác (AB không song song CD). Gọi M là trung điểm của SD, N là điểm nằm trên cạnh SB sao cho $SN = 2NB, O$ là giao điểm của AC và BD. Giả sử đường thẳng d là giao tuyến của (SAB) và (SCD). Nhận xét nào sau đây là sai:

A. d cắt CD. **B.** d cắt MN. **C.** d cắt AB. **D.** d cắt SO.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành $(BC//AD)$.Mặt phẳng (P) di động chứa đường thẳng AB và cắt các đoạn SC, SD lần lượt tại E, F. Mặt phẳng (Q) di động chứa đường thẳng CD và cắt SA, SB lần lượt tại $G, H.I$ là giao điểm của $AE, BF; J$ là giao điểm của CG, DH. Xét các mệnh đề sau:

(1) Đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

(2) Đường thẳng GH luôn đi qua một điểm cố định.

(3) Đường thẳng IJ luôn đi qua một điểm cố dịnh.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SC. Gọi I là giao điểm của đường thẳng AM với mặt phẳng (SBD). Khi đó tỉ số $\frac{MA}{IA}$ bằng bao nhiêu:

A. 2. **B.** 3. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 4: Cho hình chóp $\mathrm{S.ABCD}$, đáy ABCD là hình thang với AD là đáy lớn $\mathrm{AD} = 2\mathrm{BC}$, G là trọng tâm tam giác SCD. Mặt phẳng (SAC) cắt cạnh BG tại K. Khi đó, tỷ số $\frac{\mathrm{KB}}{\mathrm{KG}}$ bằng:

A. 2 **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** 1 **D.** $\frac{1}{2}$

Câu 5: Cho hình hộp $\mathrm{ABCD.A'B'C'D'}$. Tìm điểm I trên đường chéo $\mathrm{B'D}$ và điểm J trên đường chéo AC sao cho $\mathrm{IJ} // \mathrm{BC'}$. Tính tỉ số $\frac{\mathrm{ID}}{\mathrm{IB'}}$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 2 **D.** 1

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$ có P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. M là điểm thuộc cạnh AD sao cho $MA = 2MD$. Gọi N là giao điểm của BC với (MPQ). Tỉ số $\frac{NB}{NC}$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** 2 **D.** 1

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang $(AD // BC, AD > BC)$, E là điểm thuộc cạnh SA sao cho $SE = 2EA$. Mặt phẳng (EBC) cắt cạnh SD tại F. Khi đó, tỷ số $\frac{SF}{SD}$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, gọi M, N lần lượt là 2 điểm thuộc cạnh SB, SD sao cho $SM = MB, SN = 2ND$. Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại P thỏa mãn $SP = kSC$. Số k bằng?

A. $\frac{2}{5}$ **B.** $\frac{3}{5}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{2}{3}$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD và SO. Gọi H là giao điểm của SC với (MNP). Tính $\frac{SH}{SC}$?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và CD. Trên đường thẳng DS lấy điểm P sao cho D là trung điểm SP. Gọi R là giao điểm của SB với mặt phẳng (MNP). Tính $\frac{SR}{SB}$?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M,N lần lượt là các điểm nằm trên cạnh AB,AD sao cho $\frac{BM}{MA}=\frac{2}{3},\frac{NC}{BN}=\frac{1}{2}$. Gọi P là điểm trên cạnh SD sao cho $\frac{PD}{PS}=\frac{1}{5}$. J là giao điểm của SO với (MNP). Tính $\frac{SJ}{SO}$?

A. $\frac{10}{11}$. **B.** $\frac{1}{11}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC.$ Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và $BC.$ P là điểm nằm trên cạnh AB sao cho $\frac{AP}{AB}=\frac{1}{3}$. Gọi Q là giao điểm của SC với mặt phẳng (MNP). Tính $\frac{SQ}{SC}$

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 13: Cho tứ diện đều $ABCD$ có các cạnh bằng a. Gọi E là trung điểm AB, F là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BF=2FC,G$ là điểm thuộc cạnh CD sao cho $CG=2GD$. Tính độ dài đoạn giao tuyến của mặt phẳng (EFG) với mặt phẳng (ACD) của hình chóp $ABCD$ theo a.

A. $\frac{\sqrt{19}}{15}a$. **B.** $\frac{a\sqrt{141}}{30}$. **C.** $\frac{a\sqrt{34+15\sqrt{3}}}{15}$. **D.** $\frac{a\sqrt{34-15\sqrt{3}}}{15}$.

Câu 14: Cho tứ diện $SABC$ có $AB=c,BC=a,AC=b.$ AD,BE,CF là các đường phân giác trong của tam giác ABC. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SBE) và (SCF) là:

A. SI trong đó I thuộc AD sao cho $\overrightarrow{AI}=\frac{b+c}{a}\overrightarrow{ID}$

B. SI trong đó I thuộc AD sao cho $\overrightarrow{AI}=-\frac{b+c}{a}\overrightarrow{ID}$

C. SI trong đó I thuộc AD sao cho $\overrightarrow{AI}=\frac{a}{b+c}\overrightarrow{ID}$

D. SI trong đó I thuộc AD sao cho $\overrightarrow{AI}=\frac{-a}{b+c}\overrightarrow{ID}$

Câu 15: Cho tứ diện $SABC,E,F$ lần lượt thuộc đoạn $AC,AB.$ Gọi K là giao điểm của BE và CF. Gọi D là giao điểm của (SAK) với BC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{AK}{KD}+\frac{BK}{KE}+\frac{CK}{KF}\ge 6$. **B.** $\frac{AK}{KD}+\frac{BK}{KE}+\frac{CK}{KF}\le 6$.

C. $\frac{AK}{KD}+\frac{BK}{KE}+\frac{CK}{KF}>6$. **D.** $\frac{AK}{KD}+\frac{BK}{KE}+\frac{CK}{KF}<6$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD, D,M$ lần lượt là trung điểm của BC,AD. Gọi E là giao điểm của (SBM) với AC, F là giao điểm của (SCM) với AB. Tính $\frac{MF}{CM-ME}+\frac{ME}{BM-ME}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 17: Cho hình bình hành $ABCD$, S là điểm không thuộc $(ABCD)$,M và N lần lượt là trung điểm của đoạn AB và SC. Xác định các giao điểm I, J của AN và MN với (SBD),từ đó tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Ba điểm J, I, M thẳng hàng. **B.** Ba điểm J, I, N thẳng hàng.

C. Ba điểm J, I, D thẳng hàng. **D.** Ba điểm J, I, B thẳng hàng.

Câu 18: Cho tứ giác $ABCD$ và $S\in(ABCD)$. Gọi I, J là hai điểm trên AD và SB, AD cắt BC tại O và OJ cắt SC tại M. Xác định các giao điểm K, L của IJ và DJ với (SAC), từ đó tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Ba điểm A,K,L thẳng hàng. **B.** Ba điểm A,L,M thẳng hàng.

C. Bốn điểm A,K,L,M thẳng hàng. **D.** Bốn điểm A,K,L,J thẳng hàng.

Câu 19: Cho tứ diện $SABC$.Gọi L, M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB và AC sao cho LM không song song với AB, LN không song song với SC. Gọi LK giao tuyến của mp (LMN)và (ABC). Xác định I, J lần lượt là giao điểm của BC và SC với (LMN). Khẳng định nào sau đây đúng:

A. Ba điểm L, I, J thẳng hàng. **B.** Ba điểm L, I, K thẳng hàng.

C. Ba điểm M, I, J thẳng hàng. **D.** Ba điểm M, I, K thẳng hàng.

Câu 20: Cho tứ giác $ABCD$ và S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N là hai điểm trên BC và SD. Xác định I, J lần lượt là giao điểm của BN và MN với (SAC). Từ đó tìm bộ 3 điểm thẳng hàng trong những điểm sau:

A. Ba điểm A, I, J thẳng hàng. **B.** Ba điểm K, I, K thẳng hàng.

C. Ba điểm M, I, J thẳng hàng. **D.** Ba điểm C, I, J thẳng hàng.

Câu 21: Cho tứ diện $ABCD$. E là điểm thuộc đoạn AB sao cho $EA=2EB$. F,G là các điểm thuộc đường thẳng BC sao cho $\overrightarrow{FC}=5\overrightarrow{FB},\overrightarrow{GC}=-5\overrightarrow{GB}$. H,I là các điểm thuộc đường thẳng CD sao cho $\overrightarrow{HC}=-5\overrightarrow{HD},\overrightarrow{ID}=-5\overrightarrow{IC},J$ thuộc tia đối của tia DA sao cho D là trung điểm của AJ. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Bốn điểm E,F,H,J đồng phẳng **B.** Bốn điểm E,F,I,J đồng phẳng.

C. Bốn điểm E,G,H,I đồng phẳng. **D.** Bốn điểm E,G,I,J đồng phẳng.

Câu 22: Cho tứ diện $ABCD$. E là điểm thuộc đoạn AB sao cho $EA=2EB$. F,G là các điểm thuộc đường thẳng BC sao cho $\overrightarrow{FC}=5\overrightarrow{FB},\overrightarrow{GC}=-5\overrightarrow{GB}$. H,I là các điểm thuộc đường thẳng CD sao cho $\overrightarrow{HC}=-5\overrightarrow{HD},\overrightarrow{ID}=-5\overrightarrow{IC},J$ thuộc tia đối của tia DA sao cho D là trung điểm của AJ. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Bốn điểm E,F,H,J đồng phẳng **B.** Bốn điểm E,F,I,J đồng phẳng.

C. Bốn điểm E,G,H,I đồng phẳng. **D.** Bốn điểm E,G,I,J đồng phẳng.

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD,E,U$ là điểm thuộc đường thẳng AB sao cho $\overrightarrow{EA}=-2\overrightarrow{EB},\ 5\overrightarrow{UA}=4\overrightarrow{UB}$. F,G là các điểm thuộc đường thẳng BC sao cho $\overrightarrow{FC}=5\overrightarrow{FB},\ \overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{GB}$. H,I là các điểm thuộc đường thẳng CD sao cho $\overrightarrow{HC}=-5\overrightarrow{HD},\overrightarrow{ID}=5\overrightarrow{IC}.J,K$ là các điểm nằm trên đường thẳng DA sao cho $\overrightarrow{JA}=2\overrightarrow{JD},\overrightarrow{KD}=5\overrightarrow{KA}$. Bốn điểm nào dưới đây lập nên một tứ diện?

A. E,F,H,J. **B.** E,G,I,K. **C.** U,G,H,J. **D.** U,F,I,K.

Câu 24: Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M,N,P,Q lần lượt thuộc các cạnh AB,BC,CD,DA sao cho MN không song song với AC. M,N,P,Q đồng phẳng khi :

A. $\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CP}{DP}.\frac{DQ}{AQ}=1$ **B.** $\frac{BM}{AM}.\frac{CN}{BN}.\frac{CP}{DP}.\frac{DQ}{AQ}=1$

C. $\frac{BM}{AM}.\frac{CN}{BN}.\frac{DP}{CP}.\frac{DQ}{AQ}=1$ **D.** $\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{DP}{CP}.\frac{AQ}{DQ}=1$.

Câu 25: Cho tứ diện $ABCD$ có M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD và P là điểm thuộc cạnh BC (P không là trung điểm BC). Gọi Q là giao điểm của (MNP) với $AD,\ I$ là giao điểm của MN với PQ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_{MNPQ}=2S_{MPN}$. **B.** $S_{MNPQ}=2S_{MPQ}$. **C.** $S_{MNPQ}=4S_{MPI}$ **D.** $S_{MNPQ}=4S_{PIN}$.

Câu 26: Cho hình chóp $SA_1A_2...A_n$ với đáy là đa giác lồi $A_1A_2...A_n\ (n\geq 3,n\in\mathbb{N})$. Trên tia đối của tia A_1S lấy điểm $B_1,B_2,...B_n$ là các điểm nằm trên cạnh SA_2,SA_n. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng $(B_1B_2B_n)$ là:

A. Đa giác $n-2$ cạnh. **B.** Đa giác $n-1$ cạnh. **C.** Đa giác n cạnh. **D.** Đa giác $n+1$ cạnh.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, E là điểm thuộc cạnh bên SD sao cho $SD=3SE$. F là trọng tâm tam giác SAB, G là điểm thay đổi trên cạnh BC. Thiết diện cắt bởi mặt phẳng (EFG) là:

A. Tam giác **B.** Tứ giác **C.** Ngũ giác. **D.** Lục giác.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD, E là một điểm thuộc mặt bên (SCD). F, G lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB và SB. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (EFG) có thể là:

A. Tam giác, tứ giác. **B.** Tứ giác, ngũ giác. **C.** Tam giác, ngũ giác. **D.** Ngũ giác.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$, E là trung điểm của SB, F thuộc SC sao cho $3\overrightarrow{SF}=2\overrightarrow{SC}$, G là một điểm thuộc miền trong tam giác SAD. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (EFG) là:

A. Tam giác, tứ giác. **B.** Tứ giác, ngũ giác. **C.** Tam giác, ngũ giác. **D.** Ngũ giác.

Câu 30: Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh bằng a. Trên tia đối của các tia CB, DA lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $CE=a, DF=a$. Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Diện tích S thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (MEF) là:

A. $S=\dfrac{a^2\sqrt{33}}{18}$. **B.** $S=\dfrac{a^2}{3}$. **C.** $S=\dfrac{a^2}{6}$. **D.** $S=\dfrac{a^2\sqrt{33}}{9}$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD tương ứng tại các điểm E, F, G, H. Gọi $I=AC\cap BD, J=EG\cap SI$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{SA}{SE}+\dfrac{SC}{SG}=\dfrac{SB}{SF}+\dfrac{SD}{SH}$. **B.** $\dfrac{SA}{SE}+\dfrac{SC}{SG}\geq 2\dfrac{SI}{SJ}$.

C. $\dfrac{SA}{SE}+\dfrac{SC}{SG}>\dfrac{SB}{SF}+\dfrac{SD}{SH}$. **D.** $\dfrac{SB}{SF}+\dfrac{SD}{SH}\geq 2\dfrac{SI}{SJ}$.

Câu 32: Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ chung cạnh AB và thuộc hai mặt phẳng vuông góc nhau. Lấy hai điểm M, N lần lượt trên hai đường chéo AC và BF sao cho $AM=BN$. Tìm quĩ tích trung điểm MN, biết O là trung điểm của AB.

A. Quỹ tích I là đoạn OI' với I' là trung điểm của CF.

B. Quỹ tích I là tia phân giác của góc xOy với $Ox//BF$ và $Oy//AC$.

C. Quỹ tích I là đường phân phân giác của góc xOy với $Ox//BF$ và $Oy//AC$.

D. Quỹ tích I là đường đoạn OI' với I' là trung điểm của CE.

Câu 33: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là 2 điểm cố định trên các cạnh AB và AC sao cho EF không song song với BC. Điểm M di động trên cạnh CD. Gọi N là giao điểm của mp (MEF) và BD. Tìm tập giao điểm I của EM và FN.

A. Tập hợp I là đoạn thẳng DG với $G = EC \cap BF$.

B. Tập hợp I là đường thẳng DG với $G = EC \cap BF$.

C. Tập hợp I là tia DG với $G = EC \cap BF$.

D. Tập hợp I là đường thẳng DK với K là giao điểm của EF và BC.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$. Giả sử AD và BC cắt nhau tại H. Gọi O là giao điểm của AC và BD, E và F lần lượt là trung điểm của SA và SB. Điểm M di động trên cạnh SC. Gọi N là giao điểm của SD và mp(EFM). Tìm tập hợp giao điểm J của EN và FM.

A. Tập hợp J là đoạn thẳng SJ_1 với $J_1 = CF \cap SH$.

B. Tập hợp J là đoạn thẳng SJ_1 với $J_1 = DE \cap SH$.

C. Tập hợp J là đoạn thẳng SH.

D. Tập hợp J là đường thẳng SH.

Câu 35: Cho hình chóp S.ABCD, trong đó AD không song song với BC. Gọi O là giao điểm của AC và BD, E là giao điểm của AD và BC. Điểm M di động trên cạnh SB, EM cắt SC tại N. Tập hợp giao điển I của AN và DM.

A. Tập hợp giao điển I là đoạn thẳng SO.

B. Tập hợp giao điển I là đường thẳng SO.

C. Tập hợp giao điển I là đoạn thẳng SO trừ 2 điểm S và O.

D. Tập hợp giao điển I là đoạn thẳng SE.

Câu 36: Cho tứ diện $ABCD$. Một mặt phẳng (P) di động luôn song song với AB và CD cắt các cạnh AC, AD, BD, BC tại M, N, E, F. Tìm tập hợp tâm I của hình bình hành $MNEF$.

A. Tập hợp tâm I là đoạn thẳng PQ với P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD (trừ 2 điểm P và Q).

B. Tập hợp tâm I là đoạn thẳng PQ với P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD.

C. Tập hợp tâm I là đoạn thẳng PQ với P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC (trừ 2 điểm P và Q).

D. Tập hợp tâm I là đoạn thẳng PQ với P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC.

HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC. Gọi M, N, P, Q, R, T lần lượt là trung điểm AC, BD, BC, CD, SA, SD. Cặp đường thẳng nào sau đây song song với nhau?

A. MP và RT.. **B.** MQ và RT.. **C.** MN và RT.. **D.** PQ và RT.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy AD và BC. Biết $AD = a, BC = b$. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD tại P, Q. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. MN song sonng với PQ.
B. MN chéo với PQ.
C. MN cắt với PQ.
D. MN trùng với PQ.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD, SC. Gọi Q là giao điểm của SD với (MNP). Tính $\frac{SQ}{SD}$?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD và SO. Gọi H là giao điểm của SC với (MNP). Tính $\frac{SH}{SC}$?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 41: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $AD = BC = c$. Xét các khẳng định sau:

a. Cosin của góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $\frac{|b^2 - c^2|}{a^2}$.

b. Cosin của góc giữa hai đường thẳng AC và BD bằng $\frac{|a^2 - c^2|}{b^2}$.

c. Cosin của góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng $\frac{b^2-a^2}{c^2}$.

Trong các khẳng định trên có bao nhiêu khẳng định đúng?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 42: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi Bx, Cy, Dz là các đường thẳng song song với nhau lần lượt đi qua B, C, D và nằm về một phía của mặt phẳng $(ABCD)$, đồng thời không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng đi qua A và cắt Bx, Cy, Dz lần lượt tại B', C', D' với $BB'=2$, $DD'=4$. Khi đó CC' bằng:

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 43: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi At, Bx, Cy, Dz là các đường thẳng song song với nhau lần lượt đi qua A, B, C, D và nằm về một phía của mặt phẳng $(ABCD)$, đồng thời không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng (α) di động cắt At, Bx, Cy, Dz lần lượt tại A', B', C', D' sao cho $AA'+CC'+BB'+DD'=a$ (O có độ dài cho trước). Mặt phẳng (α) luôn đi qua điểm cố định I. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. I nằm trên đường thẳng O song song với At và $OI=\frac{a}{2}$.

B. I nằm trên đường thẳng O song song với At và $OI=\frac{a}{4}$.

C. I nằm trên đường thẳng O song song với At và $OI=\frac{3a}{2}$.

D. I nằm trên đường thẳng O song song với At và $OI=a$.

Câu 44: *Cho tứ diện* $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và AC, Gọi E là điểm trên cạnh CD với $ED=3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là:

A. Tam giác MNE.

B. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD.

C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD mà $EF//BC$.

D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD và $EF//BC$.

Câu 45: Cho hình tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $6a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CA, CB. P là điểm trên cạnh BD sao cho $BP = 2PD$. Diện tích S thiết diện của tứ diện $ABCD$ bị cắt bởi (MNP) là:

A. $S = \frac{5a^2\sqrt{51}}{4}$. **B.** $S = \frac{5a^2\sqrt{147}}{4}$. **C.** $S = \frac{5a^2\sqrt{147}}{2}$. **D.** $S = \frac{5a^2\sqrt{51}}{2}$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy AD và BC. Biết $AD = a,\ BC = b$. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD tại P, Q. Giả sử AM cắt BD tại E; CQ cắt DN tại F. Độ dài đoạn thẳng EF là:

A. $EF = \frac{1}{2}(a+b)$. **B.** $EF = \frac{3}{5}(a+b)$. **C.** $EF = \frac{2}{3}(a+b)$. **D.** $EF = \frac{2}{5}(a+b)$.

Câu 47: Hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên cạnh AC lấy điểm M và trên cạnh BF lấy điểm N sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = k$. Tìm k để $MN // DE$.

A. $k = \frac{1}{3}$. **B.** $k = 3$. **C.** $k = \frac{1}{2}$. **D.** $k = 2$.

ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

Câu 48: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J, K, H lần lượt là trung điểm của các cạnh BA, AC, CB, AD. Gọi E, F lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và tam giác ACD. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (DIJ) và (DBC). Khi đó khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $d \parallel (IHK)$. **B.** $d \parallel (JHK)$. **C.** $d \parallel (AEF)$. **D.** $d \parallel (DIJ)$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi G, E lần lượt là trọng tâm của ΔSAD và ΔSCD. Lấy M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Xét các mệnh đề sau:

(1) Đường thẳng MN song song với (GAC).

(2) Đường thẳng MN song song với (DAC).

(3) Đường thẳng GE song song với (AMN).

(4) Đường thẳng GE và đường thẳng MN trùng nhau.

(5) Đường thẳng GE và đường thẳng MN song song.

Số mệnh đề **sai** là:

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P là ba điểm trên các cạnh AD, CD, SO. Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) là hình gì?

A. Ngũ giác. **B.** Tứ giác. **C.** Hình thang. **D.** Hình bình hành.

Câu 51: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, gọi O là tâm của đáy. Tam giác SAB là tam giác đều. Gọi M là điểm trên cạnh BC. Mặt phẳng (P) đi qua M và song song với SA, SB cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì?

A. Hình vuông. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình thang cân. **D.** Hình thang vuông.

Câu 52: Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các tia Ax, By, Cz, Dt song song, cùng hướng nhau và không nằm trong mp$(ABCD)$. Mp (α) cắt Ax, By, Cz, Dt lần lượt tại A', B', C', D'. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $A'B'C'D'$ là hình bình hành. **B.** mp$(AA'B'B)$ // $(DD'C'C)$.

C. $AA' = CC'$ và $BB' = DD'$. **D.** OO' // AA'.

Câu 53: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn là AB. M là trung điểm CD. Mặt phẳng (α) qua M song song với BC và SA. (α) cắt AB, SB lần lượt tại N và P. Nói gì về thiết diện của mặt phẳng (α) với khối chóp $S.ABCD$?

A. Là một hình bình hành. **B.** Là một hình thang có đáy lớn là MN.

C. Là tam giác MNP. **D.** Là một hình thang có đáy lớn là NP.

Câu 54: Cho hình chóp $S.ABCD$, M là một điểm trên cạnh AB, N là điểm trên cạnh CD. Mặt phẳng (α) chứa MN và song song với SA. Thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) là hình thang thì điều kiện là:

A. $AD = 2CD$. **B.** $MN // BC$. **C.** $BC // AD$. **D.** $MN // AD$.

Câu 55: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $SA = SB = a$, $SC = SD = \sqrt{3}a$. E là trung điểm của đoạn SA. M là một điểm trên cạnh BC. Đặt $BM = x\ (0 \le x \le a)$. Mặt phẳng (α) chứa ME và song song với AB. Thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) có diện tích tính theo a,x là:

A. $\frac{3a}{16}\sqrt{16x^2+8ax+3a^2}$. **B.** $\frac{a}{16}\sqrt{16x^2+8ax+3a^2}$.

C. $\frac{3a}{16}\sqrt{16x^2-4ax+3a^2}$. **D.** $\frac{3a}{16}\sqrt{16x^2+4ax+3a^2}$.

Câu 56: Cho tứ diệnđều $ABCD$ có cạnh bằng a. Điểm M là trung điểm của AB. Tính diện tích thiết diện của hình tứ diện cắt bởi $mp(P)$ đi qua M và song song với AD và AC.

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{9a^2\sqrt{3}}{16}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

Câu 57: Cho hình chóp $S.ABCD$,đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a,mặt bên (SAB) là tam giác đều.Cho $SC=SD=a\sqrt{3}$.Gọi H,K lần lượt là trung điểm của SA,SB.Gọi M là một điểm trên cạnh AD.Mặt phẳng (HKM) cắt BC tại N.Cho biết $(HKMN)$ là hình thang cân.Đặt $AM=x(0\le x\le a)$.Tìm x để diện tích $HKMN$ là nhỏ nhất.

A. $x=\frac{a}{5}$. **B.** $x=\frac{a}{3}$. **C.** $x=\frac{a}{4}$. **D.** $x=\frac{a}{2}$.

Câu 58: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi C' là điểm trên cạnh SC sao cho $\frac{C'S}{C'C}=\frac{1}{2}$, M là điểm trên cạnh SA. Mặt phẳng (P) qua $C'M$ và song song với BC. Xác định vị trí của điểm M để (P) cắt hình chóp theo thiết diện là hình bình hành.

A. M là trung điểm của SA. **B.** $\frac{MA}{MS}=2$.

C. $\frac{MA}{MS}=\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{MA}{MS}=\frac{2}{3}$.

Câu 59: Cho tứ diện $ABCD$ trong đó $AB\perp CD$ và $AB=AC=CD=a$. M là một điểm trên cạnh AC với $AM=x(0<x<a)$.Mặt phẳng (P) qua M, song song với AB và CD. Tính diện tích thiết diện của (P) và tứ diện $ABCD$ theo a và x.

A. $x(a-x)$. **B.** $\frac{x(a-x)}{2}$. **C.** $a(a-x)$. **D.** $\frac{a(a-x)}{2}$.

HavaMATH

Câu 60: Cho tứ diện $ABCD$ trong đó $AB\perp CD$ và $AB=AC=CD=a$. M là một điểm trên cạnh AC. Mặt phẳng (P) qua ., song song với AB và CD. Diện tích thiết diện của $mp\,(P)$ và tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. a^2. **B.** $\frac{a^2}{16}$. **C.** $\frac{a^2}{2}$. **D.** $\frac{a^2}{4}$.

Câu 61: Cho hình chóp $S.ABC$, M là một điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M song song với SA,SB,SC cắt các mặt phẳng $(SBC),(SAC),(SAB)$ lần lượt tại A',B',C'.

$\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}$ có giá trị không đổi bằng bao nhiêu khi M di động trong tam giác ABC?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 62: Cho hình chóp $S.ABC$, M là một điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M song song với SA,SB,SC cắt các mặt phẳng $(SBC),(SAC),(SAB)$ lần lượt tại A',B',C'. $\frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}$ nhận giá trị lớn nhất. Khi đó vị trí của M trong tam giác ABC là:

A. Trực tâm ΔABC. **B.** Trọng tâm ΔABC.

C. Tâm ngoại tiếp ΔABC. **D.** Tâm nội tiếp ΔABC.

Câu 63: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang với đáy AD và BC $(AD=a>BC=b)$. Gọi I,J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB,SC lần lượt tại M,N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA,SD lần lượt tại P,Q. Gọi E là giao điểm của AM và PB, F là giao điểm của CQ và DN. Trong các mệnh đề dưới đây, có bao nhiêu mệnh đề sai?

1) MN và PQ song song với nhau.

2) MN và EF song song với nhau.

3) $EF=\frac{2}{5}(a+b)$.

4) $EF=\frac{1}{4}(a+b)$

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3

HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Câu 64: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng $2a$. Gọi I, M lần lượt là trung điểm của BC, BD. Mặt phẳng (α) qua M và song song với mp(AID) cắt tứ diện theo thiết diện có diện tích bằng

A. $\frac{\sqrt{2}a^2}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}a^2}{16}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$.

Câu 65: Cho hình chóp $S.ABC$ có M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. P là điểm thuộc cạnh AC sao cho $CP=\frac{1}{4}CA$. (α) là mặt phẳng qua P và song song với $mp(CMN)$, (α) cắt SB tại E. Tỉ số $\frac{EB}{ES}$ bằng:

A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{3}{5}$ **C.** $\frac{5}{8}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 66: Cho hình chóp $S.ABC$. G, E lần lượt là trọng tâm tam giác ΔABC và ΔSBC. (α) là mặt phẳng qua G và song song với mặt phẳng (SBC). Gọi I là giao điểm của (α) và AE. Tỉ số $\frac{IA}{IE}$ bằng:

A. 2 **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 67: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. O là giao điểm của AC và BD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và SD. (α) là mặt phẳng qua O và song song mặt phẳng (SCD). Đường thẳng AM cắt (α) tại E, đường thẳng AN cắt (α) tại N. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau?

A. $\mathrm{EF}=CD$. **B.** $\mathrm{EF}=\frac{1}{2}CD$. **C.** $\mathrm{EF}=\frac{1}{3}CD$. **D.** $\mathrm{EF}=\frac{1}{4}CD$

Câu 68: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. P là điểm trên cạnh AB sao cho $\frac{AP}{AB}=\frac{1}{3}$. Gọi M là trung điểm của SD, (α) là mặt phẳng qua P và song song với mặt phẳng (SAC). (α) cắt BM tại I. Tỉ số $\frac{IM}{IB}$ bằng:

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** $\frac{5}{9}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 69: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. M là điểm thuộc đoạn $A'B$ sao cho $\frac{BM}{BA'}=\frac{1}{4}$. (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng đáy. Gọi I là giao điểm của (α) và CB'. Tính tỉ số $\frac{IC}{IB'}$

A. $\frac{IC}{IB'}=3$ **B.** $\frac{IC}{IB'}=\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{IC}{IB'}=\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{IC}{IB'}=\frac{1}{3}$

Câu 70: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi M,N là trung điểm của BC và CC'. Thiết diện của hình lăng trụ với mặt phẳng $(A'MN)$ cắt AB tại E. Tỷ số $\frac{EB}{EA}$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 71: Cho lăng trụ tam giác $\mathrm{ABC.A'B'C'}$. Gọi G, $\mathrm{G'}$ lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, $\mathrm{A'B'C'}$. Biết các mặt phẳng $(\mathrm{ABC'}),(\mathrm{BCA'}),(\mathrm{ACB'})$ cắt nhau tại O trên $\mathrm{GG'}$. Tính $\frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OG'}}$

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 72: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC=2$, hai đáy $AB=6$, $CD=4$. Mặt phẳng (P) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA=3SM$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** 2. **D.** $\frac{7\sqrt{3}}{9}$.

Câu 73: Cho tứ diện đều $SABC$ cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm của đoạn AB, M là điểm di động trên đoạn AI. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với (SIC). Tính chu vi của thiết diện tạo bởi (α) với tứ diện $SABC$, biết $AM=x$.

A. $x\left(1+\sqrt{3}\right)$. **B.** $2x\left(1+\sqrt{3}\right)$. **C.** $3x\left(1+\sqrt{3}\right)$. **D.** Không tính được.

Câu 74: Cho tứ diện đều $ABCD$. Trên đoạn thẳng BD lấy điểm M sao cho $\frac{MB}{MD}=\frac{1}{2}$. Gọi (α) là mặt phẳng qua điểm M và song song với mặt phẳng (ACD). Hỏi cạnh của tứ diện

$ABCD$ bằng bao nhiêu để diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và tứ diện $ABCD$ là $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$:

A. a. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $2a$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

C– HƯỚNG DẪN GIẢI

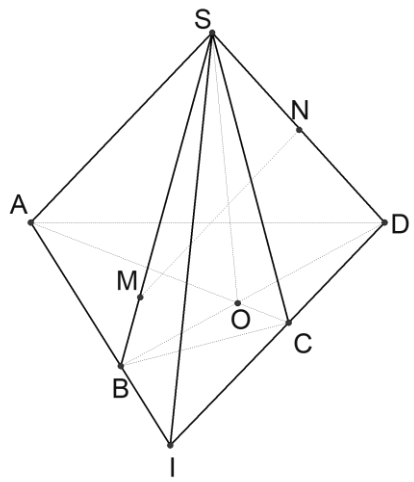
ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác (AB không song song CD). Gọi M là trung điểm của SD, N là điểm nằm trên cạnh SB sao cho $SN = 2NB, O$ là giao điểm của AC và BD. Giả sử đường thẳng d là giao tuyến của (SAB) và (SCD). Nhận xét nào sau đây là sai:

A. d cắt CD. **B.** d cắt MN. **C.** d cắt AB. **D.** d cắt SO.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Gọi $I = AB \cap CD$. Ta có:

$$\begin{cases} I \in AB, AB \subset (SAB) \Rightarrow I \in (SAB) \\ I \in CD, CD \subset (SCD) \Rightarrow I \in (SCD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$$

Lại có $S \in (SAB) \cap (SCD)$.

Do đó $SI = (SAB) \cap (SCD)$.

$\Rightarrow d \equiv SI$.

Vậy d cắt AB, CD, SO.

Giả sử d cắt MN. Khi đó M thuộc mp(SAB). Suy ra D thuộc (SAB) (vô lý). Vậy d không cắt MN. Đáp án B sai.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành $(BC // AD)$.Mặt phẳng (P) di động chứa đường thẳng AB và cắt các đoạn SC, SD lần lượt tại E, F. Mặt phẳng (Q) di động chứa đường thẳng CD và cắt SA, SB lần lượt tại $G, H. I$ là giao điểm của $AE, BF; J$ là giao điểm của CG, DH. Xét các mệnh đề sau:

(1) Đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

(2) Đường thẳng GH luôn đi qua một điểm cố định.

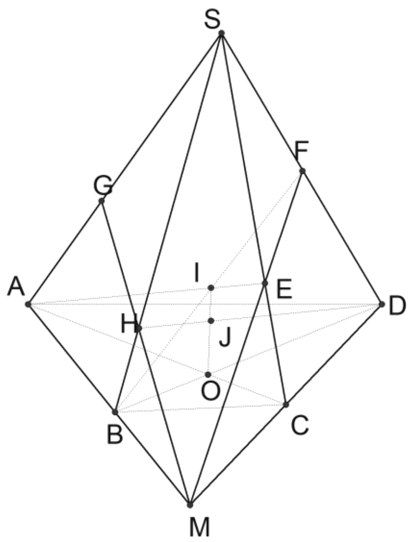
(3) Đường thẳng IJ luôn đi qua một điểm cố dịnh.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Trong mp$(ABCD)$, gọi $M = AB \cap CD; O = AC \cap BD$. Khi đó M, O cố định.

Như vậy: E, F, M cùng nằm trên hai mp (P) và (SCD), do đó ba điểm E, F, M thẳng hàng. Vậy đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định M.

Tương tự, ta có G, H, M cùng nằm trên hai mp (Q) và (SAB),do đó G, H, M thẳng hàng. Vậy các đường thẳng GH luôn đi qua một điểm cố định M.

Do $\begin{cases} I \in AE \subset (SAC) \\ I \in BF \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD)$.

Tương tự ta cũng có $J \in (SAC) \cap (SBD); O \in (SAC) \cap (SBD)$

Do đó ba điểm I, J, O thẳng hàng. Vậy IJ luôn đi qua điểm cố định O.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SC. Gọi I là giao điểm của đường thẳng AM với mặt phẳng (SBD). Khi đó tỉ số $\dfrac{MA}{IA}$ bằng bao nhiêu:

A. 2. **B.** 3. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

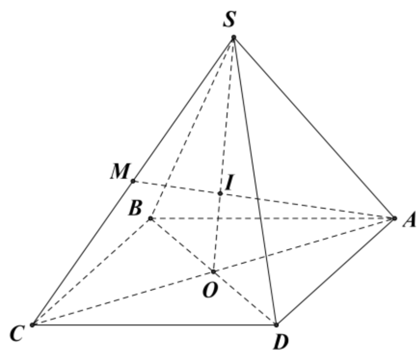
Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có: $SO = mp(SAC) \cap (SBD)$;

$I = AM \cap SO$.

Suy ra $I = AM \cap (SBD)$.



Xét tam giác SAC có hai đường trung tuyến SO và MA cắt nhau tại điểm I. Vậy I là trọng tâm tam giác SAC. Vậy ta có $\frac{MA}{IA}=\frac{3}{2}$.

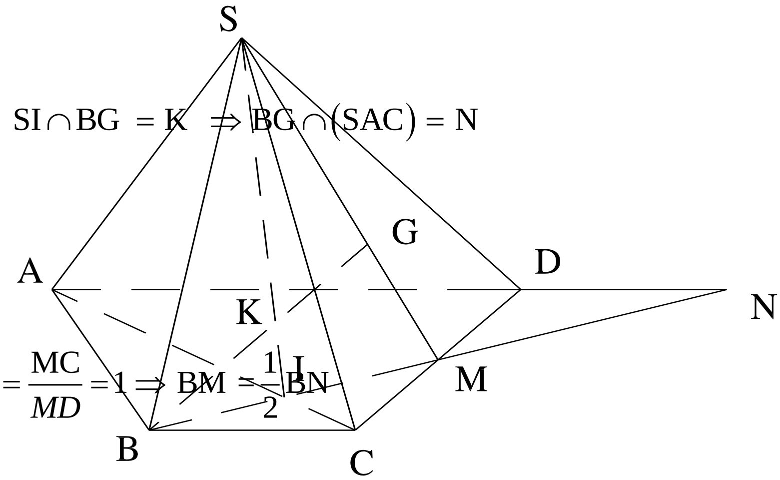
Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang với AD là đáy lớn $AD=2BC$, G là trọng tâm tam giác SCD. Mặt phẳng (SAC) cắt cạnh BG tại K. Khi đó, tỷ số $\frac{KB}{KG}$ bằng:

A. 2 **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** 1 **D.** $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Gọi M là trung điểm của BC



$(ABCD): BM\cap AC=I;\ (SBM): SI\cap BG=K \Rightarrow BG\cap(SAC)=N$

$(ABCD): BM\cap AD=N$

Ta có:

$AD\,//\,BC\ 1\Rightarrow \frac{BI}{IN}=\frac{BC}{AD}=\frac{1}{2};\ \frac{MC}{MN}=\frac{MC}{MD}=1\Rightarrow BM=\frac{1}{2}BN$

Suy ra, I là trung điểm của BM

Xét ΔBGM: $\frac{KB}{KG}.\frac{SG}{SM}.\frac{IM}{IB}=1\Rightarrow \frac{KB}{KG}=\frac{3}{2}$

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm điểm I trên đường chéo $B'D$ và điểm J trên đường chéo AC sao cho $IJ\,//\,BC'$. Tính tỉ số $\frac{ID}{IB'}$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 2 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

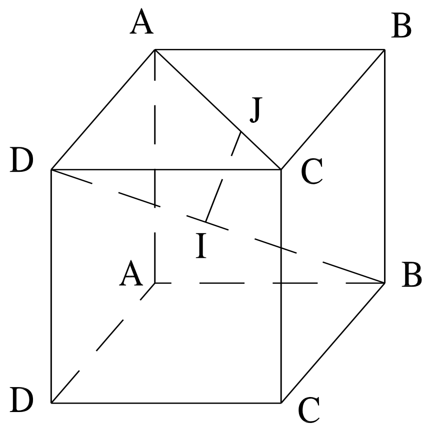
Chọn A

Đặt $\overrightarrow{BA}=\vec{x},\ \overrightarrow{BC}=\vec{y},\ \overrightarrow{BB'}=\vec{z}$

Suy ra: $\overrightarrow{BC'}=\vec{y}+\vec{z};\quad \overrightarrow{B'D}=\vec{x}+\vec{y}-\vec{z}$

Giả sử $\overrightarrow{B'I}=h\overrightarrow{B'D}=h\left(\vec{x}+\vec{y}-\vec{z}\right)$

Ta có $\overrightarrow{AJ}=k\overrightarrow{AC}=k\left(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{B'J}\right)\Rightarrow \overrightarrow{B'J}=(1-k)\vec{x}+k\vec{y}-\vec{z}$



Suy ra $\begin{array}{l}\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{B'J}-\overrightarrow{B'I}=(1-k)\vec{x}+k\vec{y}-\vec{z}-h\vec{x}-h\vec{y}+h\vec{z}\\ =(1-k-h)\vec{x}+(k-h)\vec{y}+(h-1)\vec{z}\end{array}$

Ta có: $IJ // BC' \Rightarrow \begin{cases}1-k-h=0\\ k-h=h-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k+h=1\\ k-2h=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=\dfrac{1}{3}\\ h=\dfrac{2}{3}\end{cases}$

Suy ra $\overrightarrow{B'I}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{B'D} \Rightarrow \dfrac{ID}{IB'}=\dfrac{1}{3}$

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$ có P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. M là điểm thuộc cạnh AD sao cho $MA=2MD$. Gọi N là giao điểm của BC với (MPQ). Tỉ số $\dfrac{NB}{NC}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{2}{3}$ **C.** 2 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

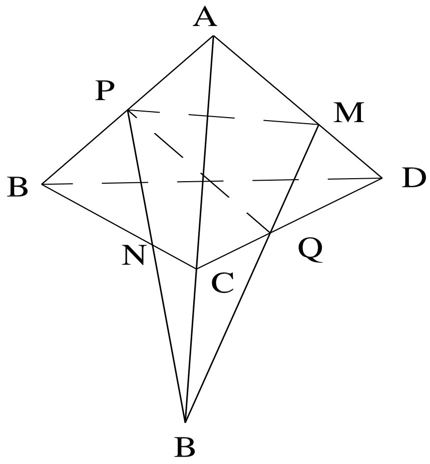
Chọn C

$(ACD): MG \cap AC = I;\ (ABC): PI \cap BC = N$

Suy ra: $BC \cap (MNP) = N$

Xét ΔACD: $\dfrac{IC}{IA}.\dfrac{MG}{MD}.\dfrac{QD}{QC}=1 \Rightarrow \dfrac{IC}{IA}=\dfrac{1}{2}$

Xét ΔABC: $\dfrac{NB}{NC}.\dfrac{IC}{IA}.\dfrac{PA}{PB}=1 \Rightarrow \dfrac{NB}{NC}=1$

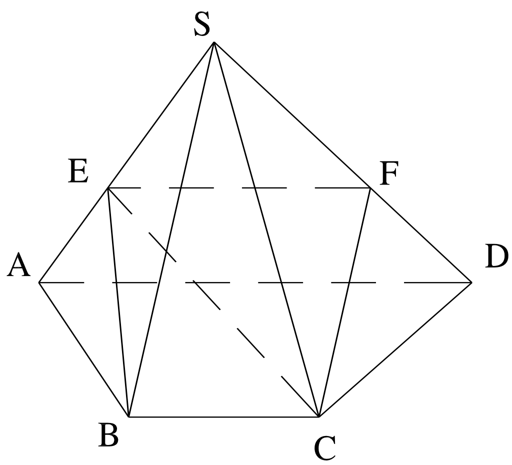


Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang $(AD // BC, AD > BC)$, E là điểm thuộc cạnh SA sao cho $SE = 2EA$. Mặt phẳng (EBC) cắt cạnh SD tại F. Khi đó, tỷ số $\dfrac{SF}{SD}$ bằng:

A. $\dfrac{2}{3}$ **B.** $\dfrac{1}{3}$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{4}$

Hướng dẫn giải:

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} (EBC)\cap(SAD)=d,\ E\in d \\ BC\subset(EBD),\ AD\subset(SAD) \\ BC//AD \end{cases} \Rightarrow d\ //\ BC\ //\ AD$

$(SAD): d\cap SD=F \Rightarrow EF//\ AD//\ BC$

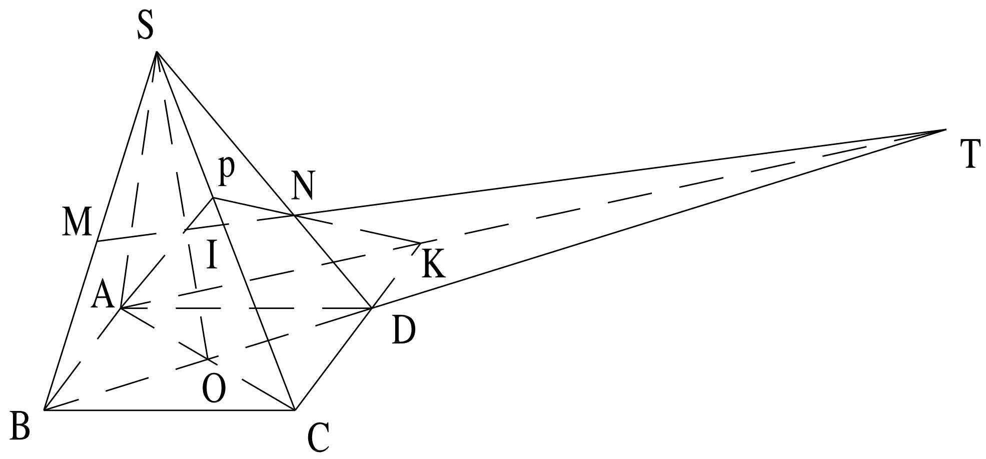
Suy ra: $\dfrac{SF}{SD}=\dfrac{SE}{SA}=\dfrac{2}{3}$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, gọi M,N lần lượt là 2 điểm thuộc cạnh SB,SD sao cho $SM=MB, SN=2ND$. Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại P thỏa mãn $SP=kSC$. Số k bằng?

A. $\dfrac{2}{5}$ **B.** $\dfrac{3}{5}$ **C.** $\dfrac{3}{2}$ **D.** $\dfrac{2}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A



$(ABCD): AC\cap BD=O;$

$(SBD): MN\cap BD=T$

$(ABCD): AT\cap CD=K,\ (SCD): KN\cap SC=P$

Xét ΔABD: $\dfrac{TD}{TB}.\dfrac{NS}{ND}.\dfrac{MB}{MS}=1\Rightarrow\dfrac{TD}{TB}=\dfrac{1}{2}$

Ta có: $\dfrac{TD}{TB}=\dfrac{KD}{AB}=\dfrac{KD}{DC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{KC}{KD}=3$

Xét ΔSCD: $\dfrac{PS}{PC}.\dfrac{ND}{NS}.\dfrac{KC}{KD}=1\Rightarrow\dfrac{PS}{PD}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow SP=\dfrac{2}{5}SC$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của AB,AD và SO. Gọi H là giao điểm của SC với (MNP). Tính $\frac{SH}{SC}$?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Trong mp $(ABCD)$, gọi $I = MN \cap AO$. Dễ thấy $H = PO \cap SC$.

Do MN là đường trung bình của tam giác ABD nên I là trung điểm AO. Suy ra $\frac{AI}{AC} = \frac{1}{4}$ và PI là đường trung bình của tam giác OSA. Do đó $IH // SA$.

Áp dụng định lý Thales ta có: $\frac{SH}{SD} = \frac{AI}{AC} = \frac{1}{4}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD và CD. Trên đường thẳng DS lấy điểm P sao cho D là trung điểm SP. Gọi R là giao điểm của SB với mặt phẳng (MNP). Tính $\frac{SR}{SB}$?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Trong mp $(ABCD)$, gọi $I = BD \cap MN, O = AC \cap BD$.

Dễ thấy $R = IP \cap SB$.

Do MN là đường trung bình của tam giác ABD nên I là trung điểm DO. Suy ra $\frac{DI}{IB} = \frac{1}{3}$.

Áp dụng định lý Menelaus vào taam giác SBD ta có:

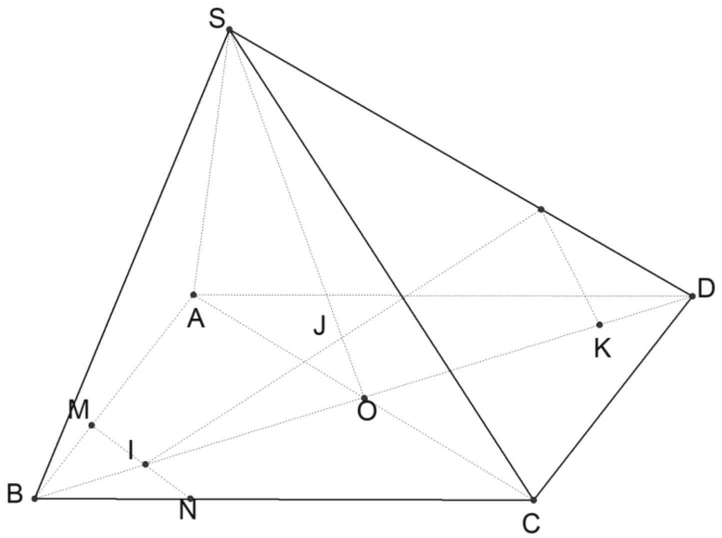
$$\frac{BR}{RS}.\frac{PS}{PD}.\frac{BI}{ID} = 1 \Rightarrow \frac{BR}{RS}.2.\frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \frac{SR}{SB} = \frac{2}{3}$$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là các điểm nằm trên cạnh AB, AD sao cho $\frac{BM}{MA}=\frac{2}{3}, \frac{NC}{BN}=\frac{1}{2}$. Gọi P là điểm trên cạnh SD sao cho $\frac{PD}{PS}=\frac{1}{5}$. J là giao điểm của SO với (MNP). Tính $\frac{SJ}{SO}$?

A. $\frac{10}{11}$. **B.** $\frac{1}{11}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Theo chú ý câu 30 ta có:

$$\frac{BA}{BM}+\frac{BC}{BN}=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4 \Rightarrow \frac{2BO}{BI}=4 \Rightarrow \frac{BO}{BI}=2 \Rightarrow \frac{OI}{BO}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OI}{OD}=\frac{1}{2}$$

Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác SOD ta có:

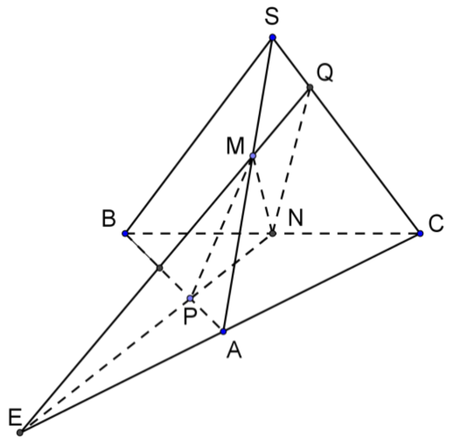
$$\frac{IO}{ID}.\frac{PD}{PS}.\frac{JS}{JO}=1 \Rightarrow \frac{JS}{JO}=10 \Rightarrow \frac{SJ}{SO}=\frac{10}{11}$$

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. P là điểm nằm trên cạnh AB sao cho $\frac{AP}{AB}=\frac{1}{3}$. Gọi Q là giao điểm của SC với mặt phẳng (MNP). Tính $\frac{SQ}{SC}$

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Trong mặt phẳng (ABC), gọi $E = NP \cap AC$

Khi đó Q chính là giao điểm của SC với EM.

Áp dụng địnhlý Menelaus vào tam giác ABC ta có: $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \Rightarrow \frac{CE}{EA} = 2$

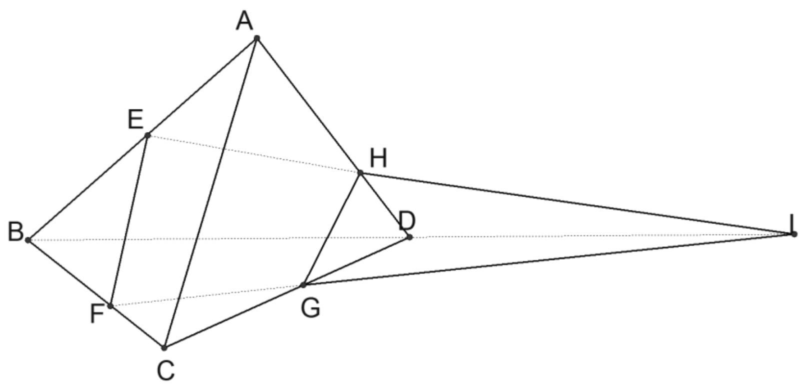
Áp dụng địnhlý Menelaus vào tam giác SAC ta có: $\frac{AM}{MS} \cdot \frac{SQ}{QC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \Rightarrow \frac{SQ}{QC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SQ}{SC} = \frac{1}{3}$

Câu 13: Cho tứ diện đều $ABCD$ có các cạnh bằng a. Gọi E là trung điểm AB, F là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BF = 2FC, G$ là điểm thuộc cạnh CD sao cho $CG = 2GD$. Tính độ dài đoạn giao tuyến của mặt phẳng (EFG) với mặt phẳng (ACD) của hình chóp $ABCD$ theo a.

A. $\frac{\sqrt{19}}{15}a$. **B.** $\frac{a\sqrt{141}}{30}$. **C.** $\frac{a\sqrt{34+15\sqrt{3}}}{15}$. **D.** $\frac{a\sqrt{34-15\sqrt{3}}}{15}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Trong mp (BCD), gọi $I = FG \cap BD$.

Trong mp(ADB), gọi $H = IE \cap AD$.

Khi đó $HG=(EFG)\cap(ACD)$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác BCD với ba điểm I,G,F thẳng hàng ta có:

$$\frac{ID}{IB}.\frac{FB}{FC}.\frac{GC}{GD}=1\Rightarrow\frac{ID}{IB}=\frac{1}{4}$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABD với ba điểm I,H,E thẳng hàng ta có:

$$\frac{HD}{HA}.\frac{EA}{EB}.\frac{IB}{ID}=1\Rightarrow\frac{HD}{HA}=\frac{1}{4}\Rightarrow HD=\frac{a}{5}$$

Áp dụng định lý cosin vào tam giác HDG ta có:

$$HG^2=HD^2+DG^2-2DH.DG.\cos 60^0$$

$$=\frac{a^2}{25}+\frac{a^2}{9}-\frac{a^2}{15}=\frac{19a^2}{225}\Rightarrow HG=\frac{\sqrt{19}}{15}a$$

Câu 14: Cho tứ diện $SABC$ có $AB=c,BC=a,AC=b$. AD,BE,CF là các đường phân giác trong của tam giác ABC. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SBE) và (SCF) là:

A. SI trong đó I thuộc AD sao cho $\overrightarrow{AI}=\frac{b+c}{a}\overrightarrow{ID}$

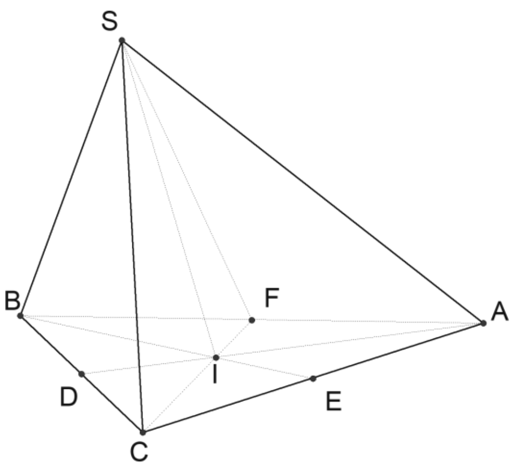
B. SI trong đó I thuộc AD sao cho $\overrightarrow{AI}=-\frac{b+c}{a}\overrightarrow{ID}$

C. SI trong đó I thuộc AD sao cho $\overrightarrow{AI}=\frac{a}{b+c}\overrightarrow{ID}$

D. SI trong đó I thuộc AD sao cho $\overrightarrow{AI}=\frac{-a}{b+c}\overrightarrow{ID}$

Hướng dẫn giải

Chọn A



Do I thuộc đoạn AD nên $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{ID}$ cùng hướng.

Do đó B, D bị loại.

AD là phân giác trong của tam giác ABC nên theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}\Rightarrow BD=\frac{ac}{b+c}$$

Ta có: BI là phân giác trong của tam giác ABD nên theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{IA}{ID}=\frac{BA}{BD}=\frac{b+c}{a}\Rightarrow IA=\frac{b+c}{a}ID$$

Do đó: $\overrightarrow{AI} = \dfrac{b+c}{a}\overrightarrow{ID}$

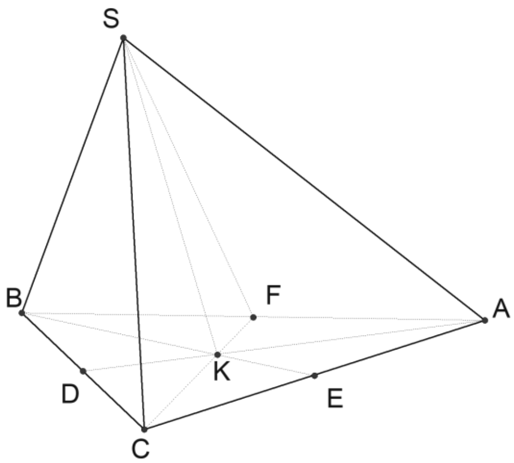
Câu 15: Cho tứ diện $SABC, E, F$ lần lượt thuộc đoạn AC, AB. Gọi K là giao điểm của BE và CF. Gọi D là giao điểm của (SAK) với BC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{AK}{KD}+\dfrac{BK}{KE}+\dfrac{CK}{KF}\ge 6$. **B.** $\dfrac{AK}{KD}+\dfrac{BK}{KE}+\dfrac{CK}{KF}\le 6$.

C. $\dfrac{AK}{KD}+\dfrac{BK}{KE}+\dfrac{CK}{KF}> 6$. **D.** $\dfrac{AK}{KD}+\dfrac{BK}{KE}+\dfrac{CK}{KF}< 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Nếu K trùng với trọng tâm G thì $\dfrac{AK}{KD}+\dfrac{BK}{KE}+\dfrac{CK}{KF}=6$. Do đó C, D bị loại.

Ta có $\dfrac{DK}{DA}+\dfrac{EK}{EB}+\dfrac{FK}{FC}=\dfrac{S_{KBC}}{S_{ABC}}+\dfrac{S_{KAC}}{S_{ABC}}+\dfrac{S_{KAB}}{S_{ABC}}=1$

Áp dụng định lý bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\left(\dfrac{DK}{DA}+\dfrac{EK}{EB}+\dfrac{FK}{FC}\right)\left(\dfrac{DA}{DK}+\dfrac{EB}{EK}+\dfrac{FC}{FK}\right)\ge 9$$

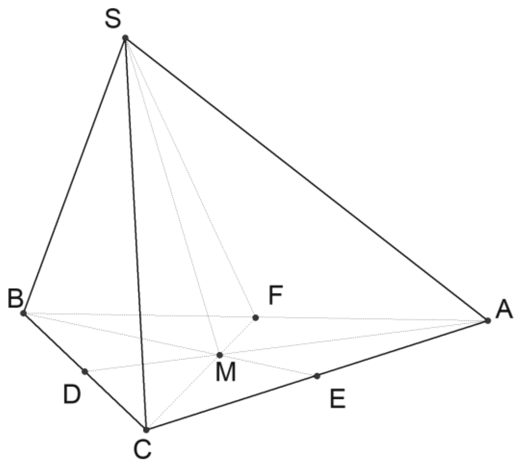
$$\Rightarrow \dfrac{DA}{DK}+\dfrac{EB}{EK}+\dfrac{FC}{FK}\ge 9 \Rightarrow \dfrac{AK}{KD}+\dfrac{BK}{KE}+\dfrac{CK}{KF}\ge 6$$

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD, D, M$ lần lượt là trung điểm của BC, AD. Gọi E là giao điểm của (SBM) với AC, F là giao điểm của (SCM) với AB. Tính $\dfrac{MF}{CM-ME}+\dfrac{ME}{BM-ME}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Ta có: $\begin{matrix} \dfrac{BM}{ME}=\dfrac{S_{ABM}}{S_{AME}}=\dfrac{S_{CBM}}{S_{CME}}=\dfrac{S_{ABM}+S_{CBM}}{S_{AME}+S_{CME}} \\ =\dfrac{S_{ABM}+S_{CBM}}{S_{AME}}=\dfrac{BD}{CD}+\dfrac{BF}{FA} \end{matrix} \Rightarrow \dfrac{BF}{AF}=\dfrac{BM}{ME}-1=\dfrac{BM-ME}{ME}(1)$.

Tương tự ta cũng chứng minh được: $\dfrac{CM}{MF}=\dfrac{CE}{AE}+\dfrac{CD}{BD}\Rightarrow \dfrac{CE}{AE}=\dfrac{CM}{MF}-1=\dfrac{CM-MF}{MF}(2)$

Và $1=\dfrac{AM}{MD}=\dfrac{AE}{CE}+\dfrac{AF}{BF}(3)$

Từ (1,2,3) suy ra $\dfrac{MF}{CM-MF}+\dfrac{ME}{BM-ME}=1$

Câu 17: Cho hình bình hành $ABCD$, S là điểm không thuộc $(ABCD)$,M và N lần lượt là trung điểm của đoạn AB và SC. Xác định các giao điểm I, J của AN và MN với (SBD),từ đó tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Ba điểm J, I, M thẳng hàng. **B.** Ba điểm J, I, N thẳng hàng.

C. Ba điểm J, I, D thẳng hàng. **D.** Ba điểm J, I, B thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

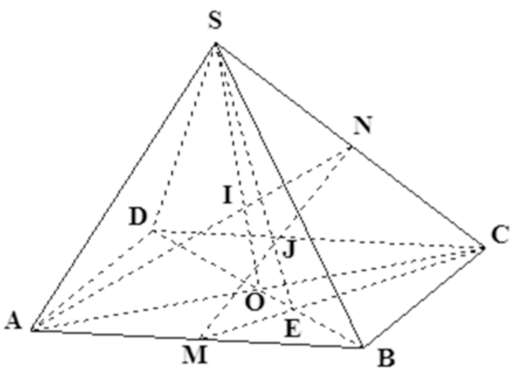
Chọn D.

*Xác định giao điểm $I=AN\cap(SBD)$

Chọn mặt phẳng phụ $(SAC)\supset AN$

Tìm giao tuyến của (SAC)và (SBD):

$(SAC)\cap(SBD)=SO$



Trong (SAC), gọi $I = AN \cap SO$, $I \in AN$, $I \in SO$ mà $SO \subset (SBD) \Rightarrow I \in (SBD)$

Vậy: $I = AN \cap (SBD)$

* Xác định giao điểm $J = MN \cap (SBD)$

Chọn mp phụ $(SMC) \subset MN$

Tìm giao tuyến của (SMC) và (SBD), S là điểm chung của (SMC) và (SBD)

Trong $(ABCD)$, gọi $E = MC \cap BD$ $\Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SE$

Trong (SMC), gọi $J = MN \cap SE$, $H \in SE$ mà $SE \subset (SBD) \Rightarrow J \in (SBD)$

Vậy $J = MN \cap (SBD)$

* Chứng minh I, J, B thẳng hàng

Ta có: B là điểm chung của (ANB) và (SBD)

- $I \in SO$ mà $SO \subset (SBD) \Rightarrow I \in (SBD)$
- $I \in AN$ mà $AN \subset (ANB) \Rightarrow I \in (ANB)$

$\Rightarrow$ I là điểm chung của (ANB) và (SBD)

- $J \in SE$ mà $SE \subset (SBD) \Rightarrow J \in (SBD)$
- $J \in MN$ mà $NM \subset (ANB) \Rightarrow J \in (ANB)$

$\Rightarrow$ J là điểm chung của (ANB) và (SBD). Vậy: B, I, J thẳng hàng.

Câu 18: Cho tứ giác $ABCD$ và $S \in (ABCD)$. Gọi I, J là hai điểm trên AD và SB, AD cắt BC tại O và OJ cắt SC tại M. Xác định các giao điểm K, L của IJ và DJ với (SAC), từ đó tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Ba điểm A, K, L thẳng hàng. **B.** Ba điểm A, L, M thẳng hàng.

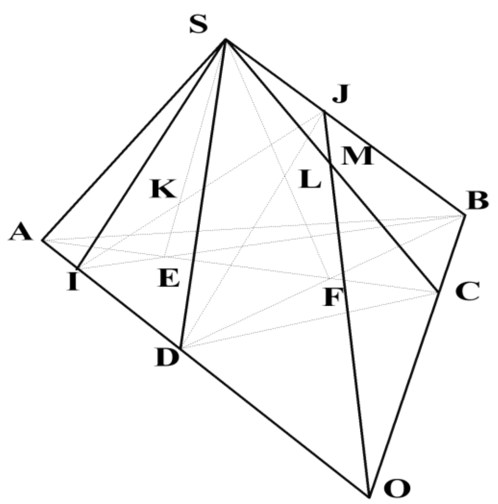
C. Bốn điểm A, K, L, M thẳng hàng. **D.** Bốn điểm A, K, L, J thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

** Tìm giao điểm $K = IJ \cap (SAC)$*

- Chọn mp phụ $(SIB) \supset IJ$
- Tìm giao tuyến của (SIB) và (SAC), S là điểm chung của (SIB) và (SAC). Trong



$(ABCD)$, gọi $E = AC \cap BI \Rightarrow (SIB) \cap (SAC) = SE$

•Trong (SIB), gọi $K = IJ \cap SE$. $K \in IJ, K \in SE$ mà $SE \subset (SAC) \Rightarrow K \in (SAC)$

Vậy: $K = IJ \cap (SAC)$

** Xác định giao điểm* $L = DJ \cap (SAC)$

• Chọn mp phụ $(SBD) \supset DJ$

• Tìm giao tuyến của (SBD)và (SAC), S là điểm chung của (SBD) và (SAC)

Trong $(ABCD)$, gọi $F = AC \cap BD \Rightarrow SE = (SBD) \cap (SAC)$

Trong (SBD), gọi $L = DJ \cap SE, L \in DJ, L \in SF$ mà $SF \subset (SAC) \Rightarrow L \in (SAC)$

Vậy: $L = DJ \cap (SAC)$

** Chứng minh A,K,L,M thẳng hàng*

Ta có:A là điểm chung của (SAC)và (AJO)

• $K \in IJ$ mà $IJ \subset (AJO) \Rightarrow K \in (AJO)$

• $K \in SE$ mà $SE \subset (SAC) \Rightarrow K \in (SAC)$

$\Rightarrow$ K là điểm chung của (SAC)và (AJO)

$L \in DJ$ mà $DJ \subset (AJO) \Rightarrow L \in (AJO)$

$L \in SF$ mà $SF \subset (SAC) \Rightarrow L \in (SAC)$

$\Rightarrow$ L là điểm chung của (SAC)và (AJO)

$M \in JO$ mà $JO \subset (AJO) \Rightarrow M \in (AJO)$

$M \in SC$ mà $SC \subset (SAC) \Rightarrow M \in (SAC)$

$\Rightarrow$ M là điểm chung của (SAC)và (AJO)

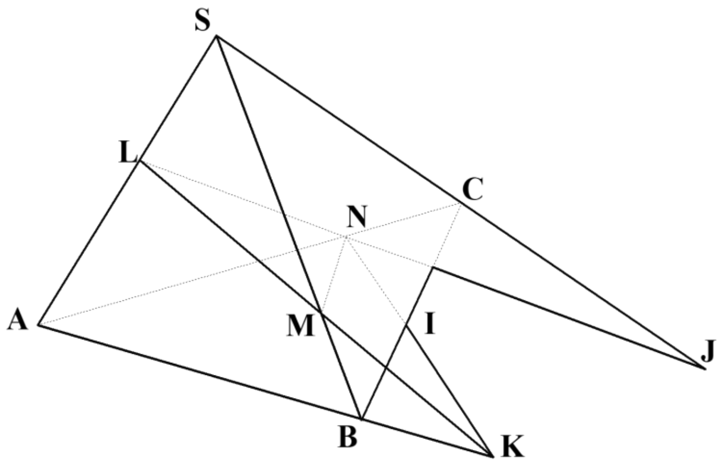
Vậy: Bốn điểm A,K,L,M thẳng hàng

Câu 19: Cho tứ diện $SABC$.Gọi L, M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB và AC sao cho LM không song song với AB, LN không song song với SC. Gọi LK giao tuyến của mp (LMN)và (ABC). Xác định I, J lần lượt là giao điểm của BC và SC với (LMN). Khẳng định nào sau đây đúng:

A. Ba điểm L, I, J thẳng hàng. **B.** Ba điểm L, I, K thẳng hàng.
C. Ba điểm M, I, J thẳng hàng. **D.** Ba điểm M, I, K thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



** Tìm giao tuyến của mp* (LMN) *và* (ABC)

Ta có: N là điểm chung của (LMN) và (ABC)

Trong (SAB), LM không song song với AB

Gọi $K = AB \cap LM$

$K \in LM$ mà $LM \subset (LMN) \Rightarrow K \in (LMN)$

$K \in AB$ mà $AB \subset (ABC) \Rightarrow K \in (ABC)$

** Tìm giao điểm* $I = BC \cap (LMN)$

• Chọn mp phụ $(ABC) \supset BC$

• Tìm giao tuyến của (ABC) và $(LMN) \Rightarrow (ABC) \cap (LMN) = NK$. Trong (ABC), gọi $I = NK \cap BC$, $I \in BC, I \in NK$ mà $NK \subset (LMN) \Rightarrow I \in (LMN)$

Vậy: $I = BC \cap (LMN)$

**Tìm giao điểm* $J = SC \cap (LMN)$

•Trong (SAC), LN không song song với SC. Gọi $J = LN \cap SC, J \in SC, J \in LN$ mà $LN \subset (LMN) \Rightarrow J \in (LMN)$

Vậy: $J = SC \cap (LMN)$

** Chứng minh M, I, J thẳng hàng*

Ta có: M, I, J là điểm chung của (LMN) và (SBC)

Vậy: M, I, J thẳng hàng

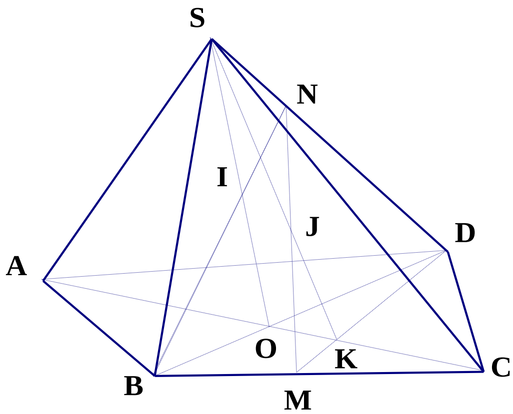
Câu 20: Cho tứ giác $ABCD$ và S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N là hai điểm trên BC và SD. Xác định I, J lần lượt là giao điểm của BN và MN với (SAC). Từ đó tìm bộ 3 điểm thẳng hàng trong những điểm sau:

A. Ba điểm A, I, J thẳng hàng. **B.** Ba điểm K, I, K thẳng hàng.

C. Ba điểm M, I, J thẳng hàng. **D.** Ba điểm C, I, J thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



* Tìm giao điểm $I = BN \cap (SAC)$

Chọn mp phụ $(SBD) \supset BN$

• Tìm giao tuyến của (SBD) và (SAC)

Trong $(ABCD)$,

$O = AC \cap BD \Rightarrow (SBD) \cap (SAC) = SO$

•Trong (SBD), gọi

$I = BN \cap SO, I \in BN, I \in SO$ mà $SO \subset (SAC) \Rightarrow I \in (SAC)$

Vậy: $I = BN \cap (SAC)$

* Tìm giao điểm $J = MN \cap (SAC)$:

• Chọn mp phụ $(SMD) \supset MN$

• Tìm giao tuyến của (SMD) và (SAC)

Trong $(ABCD)$, gọi $K = AC \cap DM \Rightarrow (SMD) \cap (SAC) = SK$

•Trong (SMD), gọi $J = MN \cap SK, J \in MN, J \in SK$ mà $SK \subset (SAC) \Rightarrow J \in (SAC)$

Vậy: $J = MN \cap (SAC)$

* Chứng minh C, I, J thẳng hàng:

Ta có: C, I, J là điểm chung của (BCN) và (SAC)

Vậy: C, I, J thẳng hàng

Câu 21: Cho tứ diện $ABCD$. E là điểm thuộc đoạn AB sao cho $EA = 2EB$. F, G là các điểm thuộc đường thẳng BC sao cho $\overrightarrow{FC} = 5\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{GC} = -5\overrightarrow{GB}$. H, I là các điểm thuộc đường thẳng CD sao cho $\overrightarrow{HC} = -5\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{ID} = -5\overrightarrow{IC}, J$ thuộc tia đối của tia DA sao cho D là trung điểm của AJ. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Bốn điểm E, F, H, J đồng phẳng **B.** Bốn điểm E, F, I, J đồng phẳng.

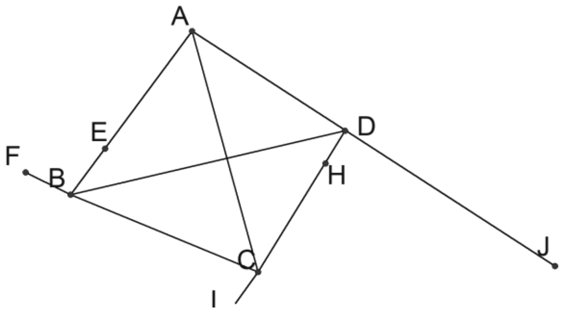
C. Bốn điểm E, G, H, I đồng phẳng. **D.** Bốn điểm E, G, I, J đồng phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Dựa vào nhận xét ví dụ 2, ta có:

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}.\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\frac{1}{5}.(-5).\frac{1}{2}=1$ nên E,F,H,J đồng phẳng.



$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}.\frac{\overline{CI}}{\overline{DI}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\frac{1}{5}.\left(\frac{1}{5}\right).\frac{1}{2}=\frac{1}{25}$ nên E,F,I,J không đồng phẳng.

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}.\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\left(-\frac{1}{5}\right).(-5).\frac{1}{2}=-1$ nên E,G,H,J không đồng phẳng.

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}.\frac{\overline{CI}}{\overline{DI}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\left(-\frac{1}{5}\right).\left(\frac{1}{5}\right).\frac{1}{2}=\frac{1}{25}$ nên E,G,I,J không đồng phẳng.

Câu 22: Cho tứ diện $ABCD$. E là điểm thuộc đoạn AB sao cho $EA=2EB$. F,G là các điểm thuộc đường thẳng BC sao cho $\overrightarrow{FC}=5\overrightarrow{FB},\overrightarrow{GC}=-5\overrightarrow{GB}$. H,I là các điểm thuộc đường thẳng CD sao cho $\overrightarrow{HC}=-5\overrightarrow{HD},\overrightarrow{ID}=-5\overrightarrow{IC}$, J thuộc tia đối của tia DA sao cho D là trung điểm của AJ. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Bốn điểm E,F,H,J đồng phẳng **B.** Bốn điểm E,F,I,J đồng phẳng.

C. Bốn điểm E,G,H,I đồng phẳng. **D.** Bốn điểm E,G,I,J đồng phẳng.

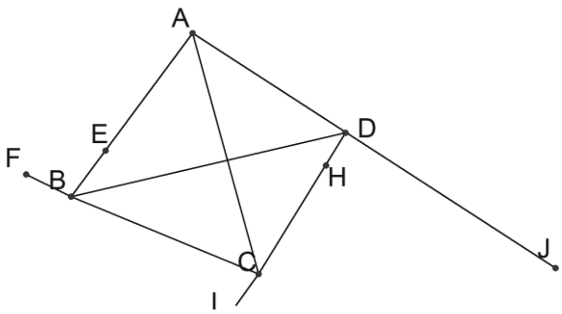
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Dựa vào nhận xét ví dụ 2, ta có:

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}.\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\frac{1}{5}.(-5).\frac{1}{2}=1$ nên E,F,H,J đồng phẳng.

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}.\frac{\overline{CI}}{\overline{DI}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\frac{1}{5}.\left(\frac{1}{5}\right).\frac{1}{2}=\frac{1}{25}$ nên E,F,I,J không đồng phẳng.



$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}.\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\left(-\frac{1}{5}\right).(-5).\frac{1}{2}=-1$ nên E,G,H,J không đồng phẳng.

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}.\frac{\overline{CI}}{\overline{DI}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\left(-\frac{1}{5}\right).\left(\frac{1}{5}\right).\frac{1}{2}=\frac{1}{25}$ nên E,G,I,J không đồng phẳng.

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD, E, U$ là điểm thuộc đường thẳng AB sao cho $\overrightarrow{EA}=-2\overrightarrow{EB}, 5\overrightarrow{UA}=4\overrightarrow{UB}$. F,G là các điểm thuộc đường thẳng BC sao cho $\overrightarrow{FC}=5\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{GB}$. H,I là các điểm thuộc đường thẳng CD sao cho $\overrightarrow{HC}=-5\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{ID}=5\overrightarrow{IC}$. J,K là các điểm nằm trên đường thẳng DA sao cho $\overrightarrow{JA}=2\overrightarrow{JD}, \overrightarrow{KD}=5\overrightarrow{KA}$. Bốn điểm nào dưới đây lập nên một tứ diện?

A. E,F,H,J. **B.** E,G,I,K. **C.** U,G,H,J. **D.** U,F,I,K.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Dựa vào nhận xét ví dụ 2, ta có:

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}.\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\frac{1}{5}.(-5).\frac{1}{2}=1$ nên E,F,H,J đồng phẳng.

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}.\frac{\overline{CI}}{\overline{DI}}.\frac{\overline{DK}}{\overline{AK}}=-2.\left(-\frac{1}{2}\right).(5).\frac{1}{5}=1$ nên $E,\mathrm{G},I,\mathrm{K}$ đồng phẳng.

$\frac{\overline{AU}}{\overline{BU}}.\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}.\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=\frac{4}{5}.\left(-\frac{1}{2}\right).(-5).\frac{1}{2}=1$ nên $\mathrm{U},\mathrm{G},H,J$ đồng phẳng.

$\frac{\overline{AU}}{\overline{BU}}.\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}.\frac{\overline{CI}}{\overline{DI}}.\frac{\overline{DK}}{\overline{AK}}=\frac{4}{5}.\left(\frac{1}{5}\right).(5).\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$ nên $\mathrm{U},\mathrm{F},\mathrm{I},\mathrm{K}$ không đồng phẳng. Do đó 4 điểm này lập nên 1 tứ diện.

Câu 24: Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M,N,P,Q lần lượt thuộc các cạnh AB,BC,CD,DA sao cho MN không song song với AC. M,N,P,Q đồng phẳng khi :

A. $\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CP}{DP}.\frac{DQ}{AQ}=1$ **B.** $\frac{BM}{AM}.\frac{CN}{BN}.\frac{CP}{DP}.\frac{DQ}{AQ}=1$

C. $\frac{BM}{AM}.\frac{CN}{BN}.\frac{DP}{CP}.\frac{DQ}{AQ}=1$ **D.** $\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{DP}{CP}.\frac{AQ}{DQ}=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

+ Giả sử M,N,P,Q cùng thuộc mặt phẳng (α).

Nếu MN cắt AC tại K thì K là điểm chung của các mặt phẳng $(\alpha),(ABC),(ADC)$ nên PQ cũng đi qua K.

Áp dụng định lí *Menelaus* cho các tam giác ABC, ADC ta được :

$\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CK}{AK}=1$; $\frac{AK}{CK}.\frac{CP}{DP}.\frac{DQ}{AQ}=1 \Rightarrow \frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CP}{DP}.\frac{DQ}{AQ}=1$

Nhận xét :

Trường hợp MN song song với AC thì ví dụ trên vẫn đúng.

+ Liệu trường hợp ngược lại, có $\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CP}{DP}.\frac{DQ}{AQ}=1$ thì M,N,P,Q có đồng phẳng hay không ?

Câu trả lời là trường hợp ngược là ví dụ vẫn đúng. Ta sẽ cùng chứng minh nhé :

Trong mặt phẳng (ACD), KO cắt AD tại Q' thì các điểm M,N,P,Q' đồng phẳng.

Theo ví dụ 2 ta có: $\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CP}{DP}.\frac{AQ'}{DQ'}=1\Rightarrow\frac{DQ'}{AQ'}=\frac{DQ}{AQ}\Rightarrow Q\equiv Q'$. Ví dụ được chứng minh.

+ Ví dụ này có thể được mở rộng đối với các điểm M,N,P,Q bất kì trên các đường thẳng AB,BC,CD,DA như sau :

M,N,P,Q' đồng phẳng khi và chỉ khi $\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}.\frac{\overline{BN}}{\overline{CN}}.\frac{\overline{CP}}{\overline{DP}}.\frac{\overline{DQ}}{\overline{AQ}}=1$ (khẳng định này dôi khi còn được gọi là định lí Menelaus mở rộng trong không gian)

Câu 25: Cho tứ diện $ABCD$ có M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD và P là điểm thuộc cạnh BC (P không là trung điểm BC). Gọi Q là giao điểm của (MNP) với AD, I là giao điểm của MN với PQ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_{MNPQ}=2S_{MPN}$. **B.** $S_{MNPQ}=2S_{MPQ}$. **C.** $S_{MNPQ}=4S_{MPI}$ **D.** $S_{MNPQ}=4S_{PIN}$.

Hướng dẫn giải

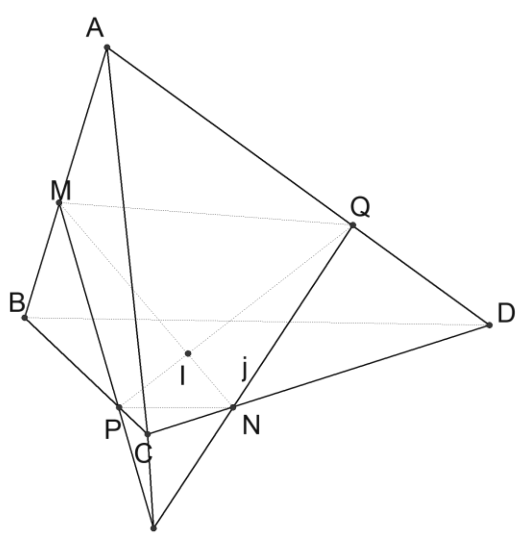
Chọn A.

Do tứ diện ABCD có 4 mặt nên thiết diện không thể là ngũ giác hay lục giác. Nó chỉ có thể là tam giác hoặc tứ giác.

Trong mp (ABC), gọi $K=MP\cap AC$ (P không phải là trung điểm đoạn BC nên MP cắt AC)

Trong mp(ACD), gọi $Q=KN\cap AD$

Do $Q\in KN\subset(MNP)$ nên $Q=(MNP)\cap AD$



Ta có: $\begin{cases}(MNP)\cap(ABD)=MQ\\(MNP)\cap(ABC)=MP\\(MNP)\cap(BCD)=PN\\(MNP)\cap(ACD)=NQ\end{cases}$

Suy ra thiết diện cần tìm là tứ giác $MPNQ$.

Ta chọn đáp án **B.**

Áp dụng ví dụ 11, do M,N,P,Q đồng phẳng nên $\frac{AM}{BM}.\frac{BP}{CP}.\frac{CN}{DN}.\frac{DQ}{AQ}=1\Rightarrow\frac{BP}{CP}.\frac{DQ}{AQ}=1$

(Do M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD). Từ đây suy ra $\frac{BP}{CP}=\frac{AQ}{DQ}$.

Giả sử $\frac{BP}{PC}=k$. Khi đó ta suy ra $\overrightarrow{BP}=k\overrightarrow{PC},\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{QD}$

Suy ra $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AQ}=-k\left(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{QD}\right)(1)$

Do J là trung điểm của PQ.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{MJ}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PJ}\\\overrightarrow{MJ}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QJ}\end{cases}\Rightarrow 2\overrightarrow{MJ}=\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{BP}(2)$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $2\overrightarrow{NJ}=\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DQ}(3)$

Từ (1,2,3) suy ra $\overrightarrow{MJ}=-k\overrightarrow{NJ}$. Điều này dẫn đến M, N, J thẳng hàng. Như vậy I trùng J.

Điều này suy ra $S_{MNPQ}=2S_{MPN}$.

Chọn đáp án **A.**

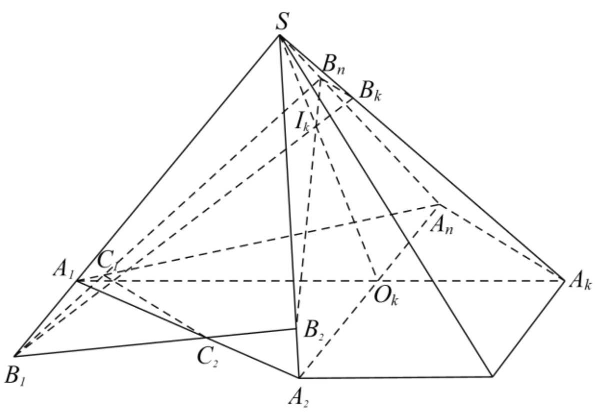
Câu 26: Cho hình chóp $SA_1A_2...A_n$ với đáy là đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ $(n\geq 3,n\in\mathbb{N})$. Trên tia đối của tia A_1S lấy điểm $B_1,B_2,...B_n$ là các điểm nằm trên cạnh SA_2,SA_n. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng $(B_1B_2B_n)$ là:

A. Đa giác $n-2$ cạnh. **B.** Đa giác $n-1$ cạnh.

C. Đa giác n cạnh. **D.** Đa giác $n+1$ cạnh.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Trong mặt phẳng (SA_1A_2) gọi C_2 là giao điểm của B_1B_2 với A_1A_2.

Trong mặt phẳng (SA_1A_n) gọi C_n là giao điểm của B_1B_n với A_1A_n.

Trong mặt phẳng $(A_1A_2...A_n)$ gọi O_k $(k=3,4,...,n-1)$ là giao điểm của A_1A_k với A_2A_n.

Trong mặt phẳng (SA_2A_n), gọi I_k $(k=3,4,...,n-1)$ là giao điểm của SO_k với B_2B_n.

Trong mặt phẳng (SA_1A_k), gọi B_k $(k=3,4,...,n-1)$ là giao điểm của SA_k với B_1I_k.

Do $B_k \in B_1I_k \subset (B_1B_2B_n)$ nên B_k là giao điểm của SA_k $(k=3,4,...,n-1)$ với mặt phẳng $(B_1B_2B_n)$.

Vậy thiết diện của hình chóp cắt bởi $(B_1B_2B_n)$ là đa giác $C_2B_2...B_nC_n$.

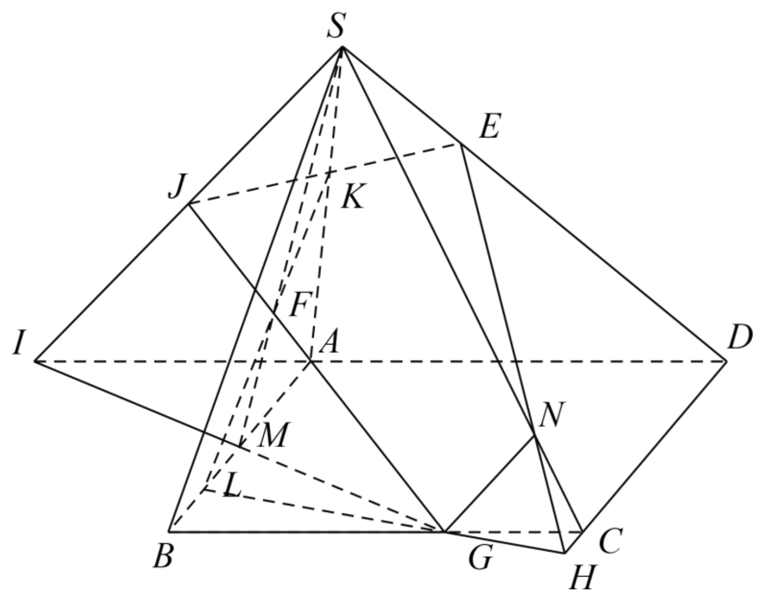
Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, E là điểm thuộc cạnh bên SD sao cho $SD=3SE$. F là trọng tâm tam giác SAB, G là điểm thay đổi trên cạnh BC. Thiết diện cắt bởi mặt phẳng (EFG) là:

A. Tam giác **B.** Tứ giác **C.** Ngũ giác. **D.** Lục giác.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Cách 1:



Gọi M là trung điểm của AB, khi đó S, F, M thẳng hàng.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi I là giao điểm của MG với AD. Khi đó $SI=(SMG)\cap(SAD)$.

Trong mặt phẳng (SMG), gọi J là giao điểm của FG với SI. Ta thấy J thuộc FG nên J thuộc (EFG). Trong (SAD), gọi K là giao điểm của JE với SA. Trong mặt phẳng (SAB), gọi L là giao điểm của KF với AB.

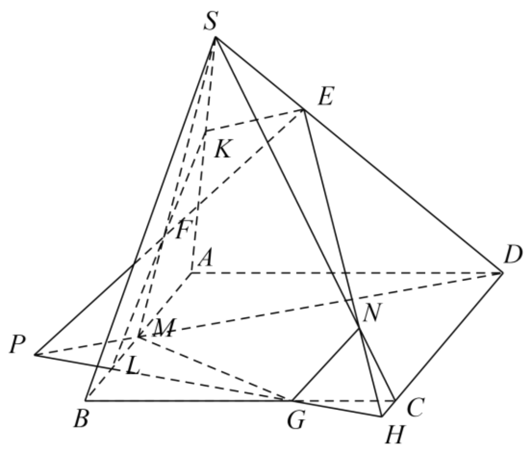
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi H là giao điểm của LG với CD. Trong mặt phẳng (SCD), gọi N là giao điểm của EH với SC.

Ta có: $\begin{cases}(EFG)\cap(ABCD)=LG;(EFG)\cap(SBC)=GN\\(EFG)\cap(SCD)=NE;(EFG)\cap(SAD)=EK\\(EFG)\cap(SAB)=KL\end{cases}$.

Vậy ngũ giác $LGNEK$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG).

Chú ý: Mấu chốt của ví dụ trên là việc dựng được điểm J là giao điểm của FG với (SAD) (thông qua việc dựng giao tuyến SI của mặt phẳng (SFG) với mặt phẳng (SAD)). Có thể dựng thiết diện trên bằng nhiều cách với việc dựng giao điểm (khác E,F,G) của một trong các đường thẳng EF,FG; hoặc GE với một mặt của hình chóp. Sau đây, tôi xin trình bày cách hai, điểm mấu chốt là xác định giao điểm của EF với mặt phẳng $(ABCD)$.

Cách 2:



Trong mặt phẳng (SMD), gọi P là giao điểm của EF với MD.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi H,L là giao điểm của P,G với CD, AB.

Trong mặt phẳng (SAB), gọi K là giao điểm của LF với SA.

Trong mặt phẳng (SCD), gọi N là giao điểm của EH với SC.

Ta có: $\begin{cases} (EFG)\cap(ABCD)=LG;(EFG)\cap(SBC)=GN \\ (EFG)\cap(SCD)=NE;(EFG)\cap(SAD)=EK \\ (EFG)\cap(SAB)=KL \end{cases}$.

Vậy ngũ giác $LGNEK$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG).

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD, E là một điểm thuộc mặt bên (SCD). F, G lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB và SB. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (EFG) có thể là:

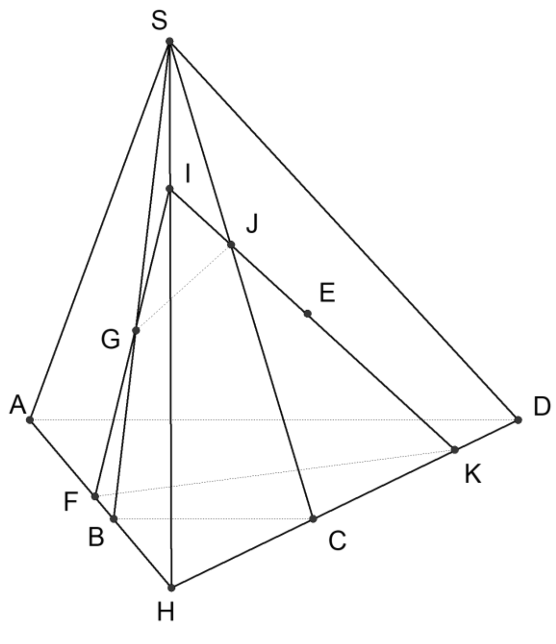
A. Tam giác, tứ giác. **B.** Tứ giác, ngũ giác. **C.** Tam giác, ngũ giác. **D.** Ngũ giác.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi H là giao điểm của AB và CD. Trong mặt phẳng (SAB), gọi I là giao điểm của FG và SH.

Xét các trường hợp sau:



Trường hợp 1:

Trong mặt phẳng (SCD), IE cắt SC tại J và cắt đoạn CD tại K.

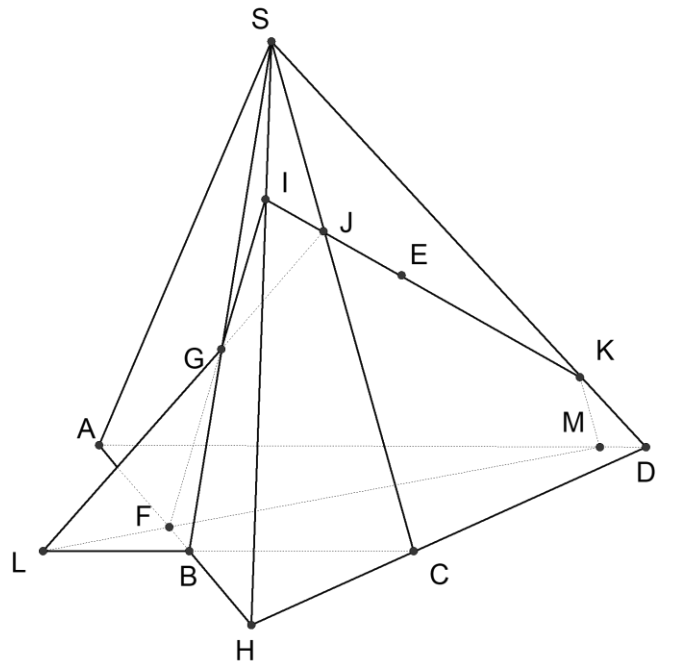
Ta có $J\in IE\subset(EFG)$ nên J là giao điểm của (EFG) với SC,

$K\in IE\subset(EFG)$ nên K là giao điểm của (EFG) với CD.

Ta có $\begin{cases} (EFG)\cap(ABCD)=FK;\ (EFG)\cap(SAB)=FG \\ (EFG)\cap(SBC)=GJ;\ (EFG)\cap(SCD)=JK \end{cases}$

Suy ra tứ giác $KFGJ$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG).

Trường hợp 2:



Trong mặt phẳng (SCD), IE cắt SC tại J và cắt đoạn SD tại K (cắt CD tại một điểm nằm ngoài đoạn CD).

Trong mặt phẳng (SBC):

Nếu GJ song song với BC thì ta có: $\dfrac{BG}{GS}=\dfrac{CJ}{JS}$. Gọi T là giao điểm của IE với CD.

Áp dụng định lí Menelaus vào các tam giác SBH và SCH ta có

$\dfrac{FB}{FH}.\dfrac{IH}{IS}.\dfrac{GS}{GB}=1=\dfrac{TC}{TH}.\dfrac{IH}{IS}.\dfrac{JS}{JC}\Rightarrow\dfrac{FB}{FH}=\dfrac{TC}{TH}$. Điều này chỉ xảy ra khi T thuộc đoạn CD (vô lí)

Do vậy GJ cắt BC, giả sử tại L.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi M là giao điểm của LF với AD.

Ta có $\begin{cases} (EFG)\cap(ABCD)=FM;\ (EFG)\cap(SAB)=FG \\ (EFG)\cap(SBC)=GJ;\ (EFG)\cap(SCD)=JK \\ (EFG)\cap(SAD)=KM \end{cases}$

Suy ra ngũ giác $KJGFM$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG).

Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (EFG) hoặc là tứ giác hoặc là ngũ giác.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$, E là trung điểm của SB, F thuộc SC sao cho $3\overrightarrow{SF}=2\overrightarrow{SC}$, G là một điểm thuộc miền trong tam giác SAD. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (EFG) là:

A. Tam giác, tứ giác. **B.** Tứ giác, ngũ giác. **C.** Tam giác, ngũ giác. **D.** Ngũ giác.

Hướng dẫn giải

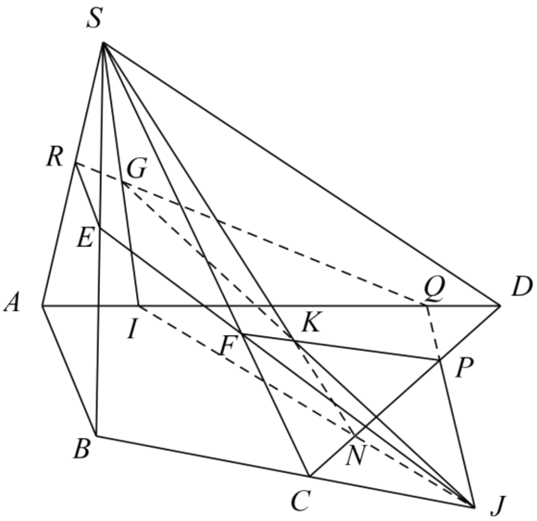
Chọn B.

Trong mặt phẳng (SBC), gọi J là giao điểm của EF với BC. Trong mặt phẳng (SAD), gọi I là giao điểm của SG với AD. Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi N là giao điểm của IJ với CD. Trong mặt phẳng (SIJ), gọi K là giáo điểm của JG với SN.

Trong mặt phẳng (SCD), có hai khả năng xảy ra như sau:

Trường hợp 1: FK cắt đoạn CD tại P.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi Q là giao điểm của JP với AD. Trong mặt phẳng (SAD), gọi R là giao điểm của QG với SA.



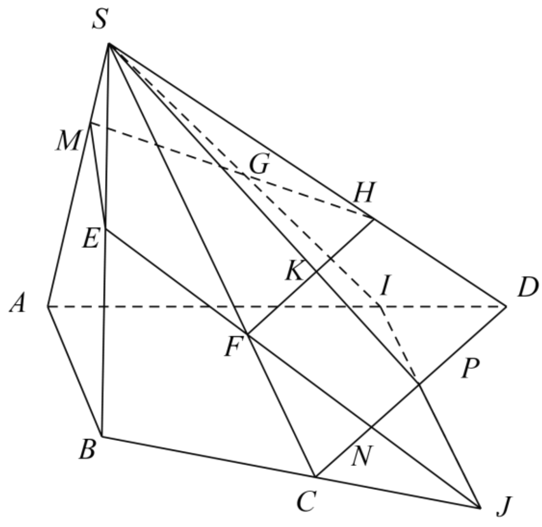
Ta có

$$\begin{cases}(EFG)\cap(ABCD)=PQ;\ (EFG)\cap(SAD)=QR\\(EFG)\cap(SAB)=RE;\ (EFG)\cap(SBC)=EF\\(EFG)\cap(SCD)=FP\end{cases}$$

Trường hợp này, ngũ giác $REFPQ$ là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (EFG).

Trường hợp 2: FK cắt SD tại H (FK không cắt đoạn CD).

Trong mặt phẳng (SAD), gọi M là giao điểm của HG với SA (HG không thể cắt đoạn AD vì giả sử ngược lại HG cắt cạnh



AD tại O, khi đó JO sẽ cắt cạnh CD (vô lí vì (EFG) đã cắt cạnh SC, SD)).

Khi đó $\begin{cases} (EFG)\cap(SCD)=FH;\ (EFG)\cap(SAD)=MH \\ (EFG)\cap(SAB)=ME;\ (EFG)\cap(SBC)=EF \end{cases}$

Trường hợp này, tứ giác $MEFH$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG).

Câu 30: Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh bằng a. Trên tia đối của các tia CB, DA lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $CE=a, DF=a$. Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Diện tích S thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (MEF) là:

A. $S=\dfrac{a^2\sqrt{33}}{18}$. **B.** $S=\dfrac{a^2}{3}$. **C.** $S=\dfrac{a^2}{6}$. **D.** $S=\dfrac{a^2\sqrt{33}}{9}$.

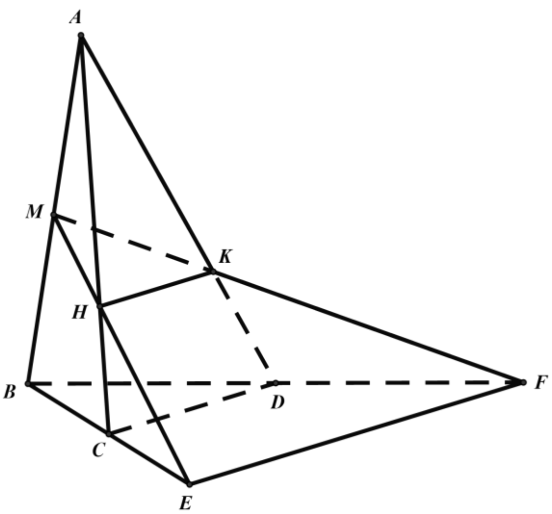
Hướng dẫn giải

Chọn C

Trong mặt phẳng (ABC), gọi H là giao điểm của ME với AC.

Trong mặt phẳng (ABD), gọi K là giao điểm của MF và AD.

Ta có: $\begin{cases} (MEF)\cap(ABC)=MH \\ (MEF)\cap(ABD)=MK \\ (MEF)\cap(ACD)=HK \end{cases}$.



Do đó tam giác MHK là thiết diện của tứ diện cắt bởi (MEF).

Dễ thấy H, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABE và ABF.

Ta có: $AH=AK=HK=\dfrac{2a}{3}$.

Xét hai tam giác AMH và AMK có AM chung, $MAH=MAK=60^0, AH=AK=\dfrac{2a}{3}$

nên hai tam giác này bằng nhau. Suy ra $MH=MK$. Vậy tam giác MHK cân tại M.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác AMH:

$$MH^2=AM^2+AH^2-2AMAH.\cos 60^0=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{2a}{3}\right)^2-\frac{a^2}{3}=\frac{13a^2}{36}\Rightarrow MH=\frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

Gọi I là trung điểm của đoạn HK. Ta có $MI\perp HK$.

Suy ra: $MI^2=MH^2-HI^2=\dfrac{13a^2}{36}-\dfrac{a^2}{9}=\dfrac{a^2}{4}\Rightarrow MI=\dfrac{a}{2}$.

Diện tích thiết diện MHK là: $S=\frac{1}{2}MI.HK=\frac{1}{2}.\frac{2a}{3}.\frac{a}{2}=\frac{a^2}{6}$.

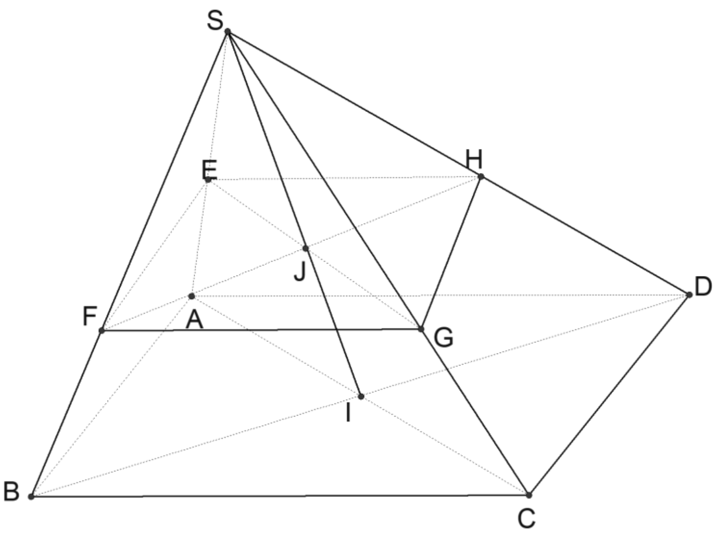
Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ cắt các cạnh bên SA,SB,SC,SD tương ứng tại các điểm $E,\ F,\ G,\ H$. Gọi $I=AC\cap BD, J=EG\cap SI$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{SA}{SE}+\frac{SC}{SG}=\frac{SB}{SF}+\frac{SD}{SH}$.
B. $\frac{SA}{SE}+\frac{SC}{SG}\geq 2\frac{SI}{SJ}$.

C. $\frac{SA}{SE}+\frac{SC}{SG}>\frac{SB}{SF}+\frac{SD}{SH}$.
D. $\frac{SB}{SF}+\frac{SD}{SH}\geq 2\frac{SI}{SJ}$.

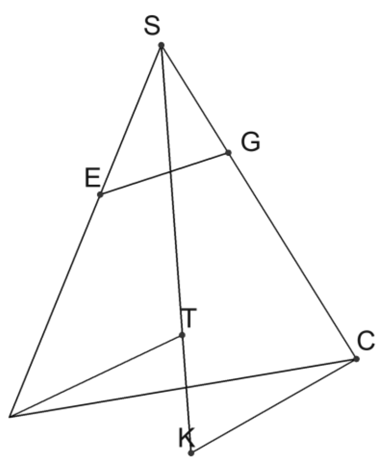
Hướng dẫn giải

Chọn A



Xét trường hợp đặc biệt E,F,G,H lần lượt là trung điểm của SA,SB,SC,SD. Khi đó ta dễ dàng loại được đáp án **D.**

Dựng $AT//EG\left(T\in SI\right),CK//EG\left(KESI\right)$



Theo định lý Thales, ta có:

$\frac{SA}{SE}=\frac{ST}{SJ},\frac{SC}{SG}=\frac{SK}{SJ};\frac{IT}{IK}=\frac{IA}{IC}=1$

Suy ra: $\frac{SA}{SE}+\frac{SC}{SG}=\frac{ST+SK}{SJ}=\frac{SI-IT+SI+IK}{SJ}=2\frac{SI}{SJ}$

Như vậy, ý B bị loại.

Tương tự, ta chứng minh được $\frac{SB}{SF}+\frac{SD}{SH}=2\frac{SI}{SJ}$.

Từ đây ta thấy ngay ý C bị loại và A là đáp án A là đáp án lựa chọn.

Chú ý: Cho tam giác ABC. Gọi O là trung điểm AC, M, N là hai điểm nằm trên cạnh AB, AC. MN cắt BO tại I. Khi đó: $\frac{BA}{BM}+\frac{BC}{BN}=\frac{2BO}{BI}$.

Câu 32: Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ chung cạnh AB và thuộc hai mặt phẳng vuông góc nhau. Lấy hai điểm M, N lần lượt trên hai đường chéo AC và BF sao cho $AM = BN$. Tìm quĩ tích trung điểm MN, biết O là trung điểm của AB.

A. Quỹ tích I là đoạn OI' với I' là trung điểm của CF.

B. Quỹ tích I là tia phân giác của góc xOy với $Ox//BF$ và $Oy//AC$.

C. Quỹ tích I là đường phân phân giác của góc xOy với $Ox//BF$ và $Oy//AC$.

D. Quỹ tích I là đường đoạn OI' với I' là trung điểm của CE.

Hướng dẫn giải:

Tìm mặt phẳng cố định chứa I: Gọi O là trung điểm của AB.

Do điểm I là trung điểm của MN, theo định lý Thales đảo thì I sẽ nằm trong mặt phẳng qua O và song song với AC và BN.

Mặt phẳng đó dựng như sau:

Từ O kẻ Ox// AC, Oy //BF

Ox, Oy tạo mặt phẳng (P) chứa I. Quỹ tích của I sẽ ở trên (P)

Xác định điểm I: (phương pháp dựng giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng)

+ Chọn mặt phẳng chứa I: Từ M và N kẻ những đường thẳng song song với AB.

Chúng cắt Ox, Oy lần lượt tại M' và N'. Mặt phẳng (NN'MM') là mặt phẳng này.

+ Giao tuyến của (NN'MM') với P là M'N'. Nó cắt MN tại I. I là trung điểm của MN cũng là trung điểm của M'N'.

Trên (P) sự di chuyển của I phụ thuộc vào M' và N'

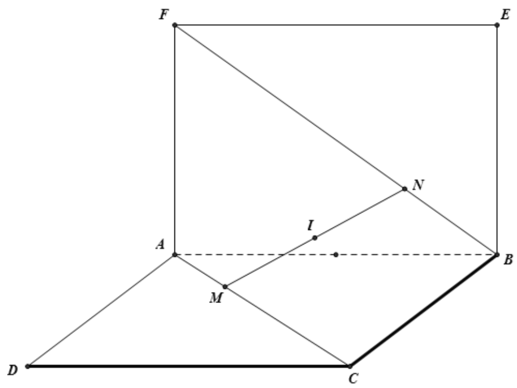
Tính chất của M' và N' là OM'= ON'

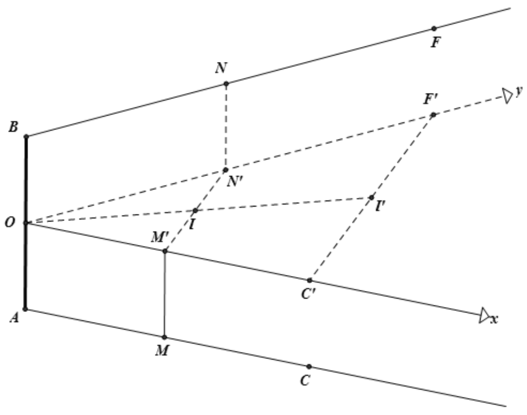
Vì OM' = ON' nên trung điểm I chạy trên đường phân giác của góc xOy.

Giới hạn: Khi M chạy đến C thì N chạy đến F. I chạy đến trung điểm I' của CF.

Kết luận: Quỹ tích của I là đoạn thẳng OI' trên mặt phẳng (Ox;Oy).

Các hình vẽ minh họa:





Câu 33: Cho tứ diện $ABCD.$ Gọi E, F lần lượt là 2 điểm cố định trên các cạnh AB và AC sao cho EF không song song với $BC.$ Điểm M di động trên cạnh $CD.$ Gọi N là giao điểm của mp (MEF) và $BD.$ Tìm tập giao điểm I của EM và FN.

A. Tập hợp I là đoạn thẳng DG với $G = EC \cap BF$.

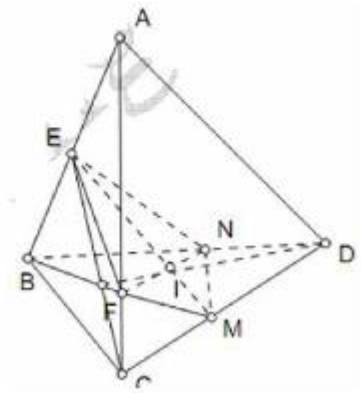
B. Tập hợp I là đường thẳng DG với $G = EC \cap BF$.

C. Tập hợp I là tia DG với $G = EC \cap BF$.

D. Tập hợp I là đường thẳng DK với K là giao điểm của EF và $BC.$

Hướng dẫn giải:

Do EF không song song với $BC.$ Nên EF cắt BC tại K. Trong mặt phẳng (BCD), đường thẳng KM cắt BD tại N. Suy ra N là giao điểm của mp(MEF) và $BD.$



Do $I \in EM$ và $EM \subset (ECD)$ cố định nên I thuộc mặt phẳng (ECD). Tương tự $I \in FN$ và FN thuộc mặt phẳng (FBD) cố định. Nên I thuộc giao tuyến của mp(FBD) và (ECD). Gọi $G = EC \cap BF$ thì I thuộc đường thẳng DG là giao tuyến 2 mặt phẳng (ECD) và (FBD). Khi M di động trên CD thì I di động trên đoạn DG.

Vậy tập hợp I là đoạn thẳng DG.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD.$ Giả sử AD và BC cắt nhau tại H. Gọi O là giao điểm của AC và BD, E và F lần lượt là trung điểm của SA và $SB.$ Điểm M di động trên cạnh $SC.$ Gọi N là giao điểm của SD và mp(EFM). Tìm tập hợp giao điểm J của EN và FM.

A. Tập hợp J là đoạn thẳng SJ_1 với $J_1 = CF \cap SH$.

B. Tập hợp J là đoạn thẳng SJ_1 với $J_1 = DE \cap SH$.

C. Tập hợp J là đoạn thẳng SH.

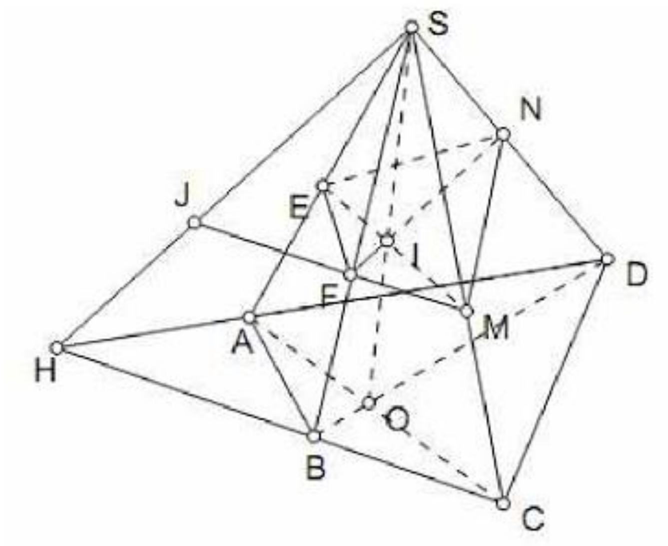
D. Tập hợp J là đường thẳng SH.

Hướng dẫn giải:

Gọi O là giao điểm của AC và $BD.$ Suy ra (SAC) cắt (SBD) theo giao tuyến là SO. Gọi I là giao của EM và SO. Khi đó FI cắt SD tại N. Do FM thuộc mp (SBC) cố định và EN thuộc mp (SAD) cố định nên giao điểm J của FM và EN thuộc giao tuyến của mp (SBC) và mp (SAD). Gọi H =AD $\cap$ BC, suy ra (SBC) $\cap$(SAD) =SH. Do đó I thuộc đường thẳng SH.

Giới hạn: Nếu $M \equiv S$ thì $J \equiv S$; Nếu $M \equiv C$ thì $J \equiv J_1$ với $J_1 = CF \cap SH$.

Vậy tập hợp J là đoạn thẳng SJ_1.



Câu 35: Cho hình chóp S.ABCD, trong đó AD không song song với $BC.$ Gọi O là giao điểm của AC và BD, E là giao điểm của AD và $BC.$ Điểm M di động trên cạnh SB, EM cắt SC tại N. Tập hợp giao điển I của AN và DM.

A. Tập hợp giao điển I là đoạn thẳng SO.

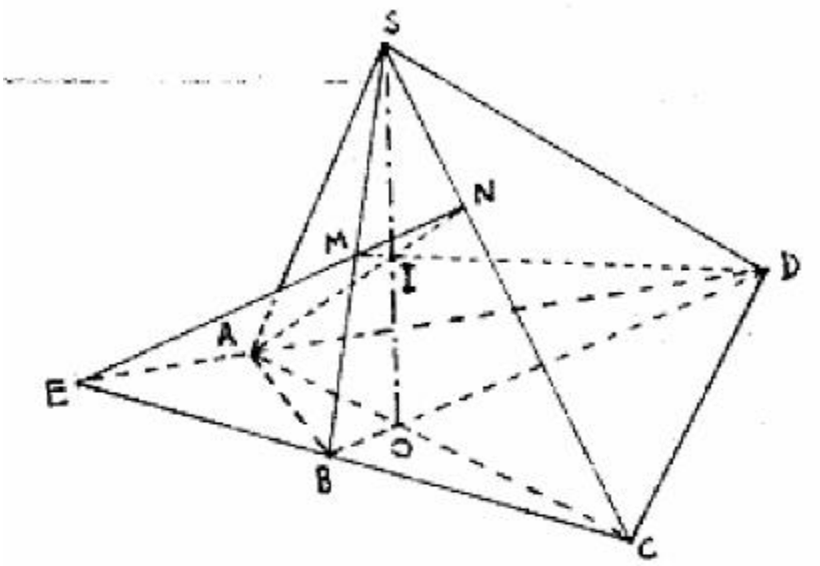
B. Tập hợp giao điển I là đường thẳng SO.

C. Tập hợp giao điển I là đoạn thẳng SO trừ 2 điểm S và O.

D. Tập hợp giao điển I là đoạn thẳng SE.

Hướng dẫn giải:

Do AN thuộc mp (SAC) cố định và DM thuộc mp (SBD) cố định nên giao điểm I của AN và DM thuộc giao tuyến của (SAC) và (SBD) là SO. Khi M trùng S thì I trùng S; Khi M trùng B thì I trùng O. Vậy tập hợp I là đoạn thẳng SO.



Câu 36: Cho tứ diện $ABCD$. Một mặt phẳng (P) di động luôn song song với AB và CD cắt các cạnh AC, AD, BD, BC tại M, N, E, F. Tìm tập hợp tâm I của hình bình hành $MNEF$.

A. Tập hợp tâm I là đoạn thẳng PQ với P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD (trừ 2 điểm P và Q).

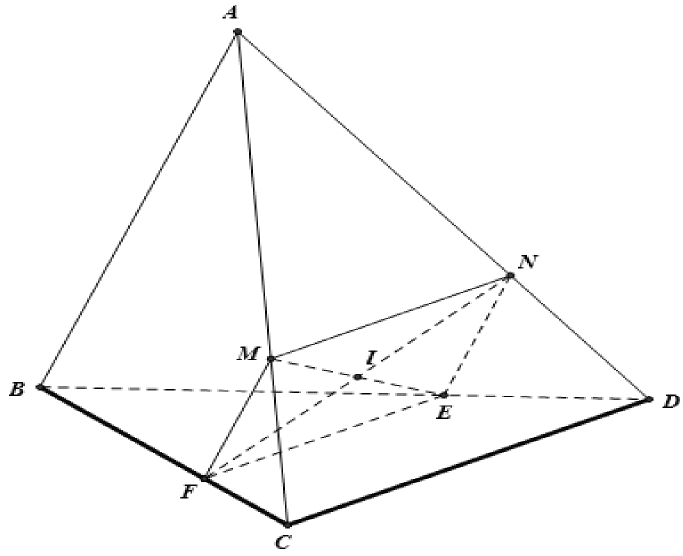
B. Tập hợp tâm I là đoạn thẳng PQ với P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD.

C. Tập hợp tâm I là đoạn thẳng PQ với P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC (trừ 2 điểm P và Q).

D. Tập hợp tâm I là đoạn thẳng PQ với P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC.

Hướng dẫn giải:

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó AQ cắt MN tại K; BQ cắt FE tại H. Dễ thấy H, K lần lượt là trung điểm của MN và FE nên I thuộc KH, đồng thời là trung điểm KH. Do đó I thuộc đường trung tuyến QP của tam giác QAB.


A
N
M
I
B
E
D
F
C