PHẦN 2

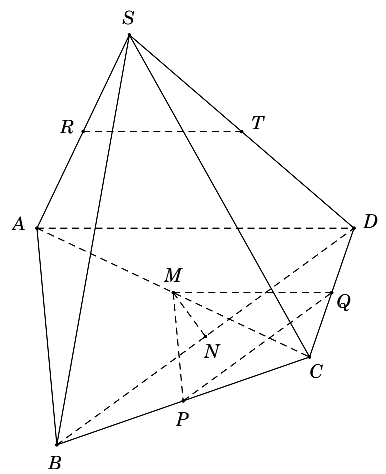
HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC. Gọi M, N, P, Q, R, T lần lượt là trung điểm AC, BD, BC, CD, SA, SD. Cặp đường thẳng nào sau đây song song với nhau?

A. MP và RT.. **B.** MQ và RT.. **C.** MN và RT.. **D.** PQ và RT.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Ta có: M, Q lần lượt là trung điểm của AC, CD

$\Rightarrow MQ$ là đường trung bình của tam giác $CAD \Rightarrow MQ // AD$ (1)

Ta có: R, T lần lượt là trung điểm của SA, SD

$\Rightarrow RT$ là đường trung bình của tam giác $SAD \Rightarrow RT // AD$ (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra: $MQ // RT$..

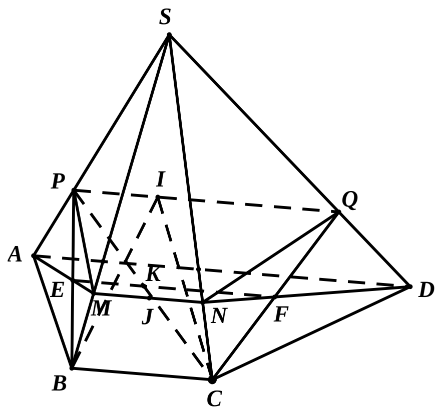
Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy AD và BC. Biết $AD = a, BC = b$. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD tại P, Q. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. MN song song với PQ. **B.** MN chéo với PQ.

C. MN cắt với PQ. **D.** MN trùng với PQ.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Ta có $I\in(SAD)\Rightarrow I\in(SAD)\cap(IBC)$.

Vậy $\begin{cases} AD\subset(SAD) \\ BC\subset(IBC) \\ AD\parallel BC \\ (SAD)\cap(IBC)=PQ \end{cases}\Rightarrow PQ\parallel AD\parallel BC\quad(1)$

Tương tự $J\in(SBC)\Rightarrow J\in(SBC)\cap(ADJ)$

Vậy $\begin{cases} AD\subset(ADJ) \\ BC\subset(SBC) \\ AD\parallel BC \\ (SBC)\cap(ADJ)=MN \end{cases}\Rightarrow MN\parallel AD\parallel BC\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $MN\parallel PQ$.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD, SC. Gọi Q là giao điểm của SD với (MNP). Tính $\dfrac{SQ}{SD}$?

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi E là giao điểm của MN với DC và F là trung điểm của CD.Dễ thấy Q chính là giao điểm của PE với SD.

Ta có: $ME=BC$. Áp dụng Thales ta có: $\dfrac{ND}{MF}=\dfrac{ED}{EF}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow EF=\dfrac{1}{2}EF$.

Suy ra D là trung điểm EF .

PQ là đường trung bình của tam giác EPF ta có: $\dfrac{DQ}{PF}=\dfrac{1}{2}$.

PF là đường trung bình của tam giác CSD ta có: $\dfrac{DS}{PF}=2$.

Từ đó suy ra: $\dfrac{SD}{DQ}=4\Rightarrow\dfrac{SQ}{SD}=\dfrac{3}{4}$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD và SO. Gọi H là giao điểm của SC với (MNP). Tính $\dfrac{SH}{SC}$?

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi I là giao điểm của MN với AO.

Dễ thấy H chính là giao điểm của PO với SC.

Do MN là đường trung bình của tam giác ABD nên I là trung điểm AO. Suy ra $\dfrac{AI}{AC}=\dfrac{1}{4}$ và PI là đường trung bình của tam giác OSA. Do đó: $IH//SA$.

Áp dụng định lí Thales ta có: $\dfrac{SH}{SD}=\dfrac{AI}{AC}=\dfrac{1}{4}$.

Câu 41: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a$, $AC=BD=b$, $AD=BC=c$. Xét các khẳng định sau:

a. Cosin của góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $\dfrac{\left|b^2-c^2\right|}{a^2}$.

b. Cosin của góc giữa hai đường thẳng AC và BD bằng $\dfrac{\left|a^2-c^2\right|}{b^2}$.

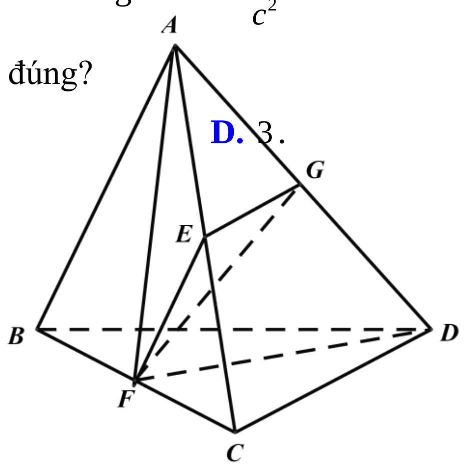
c. Cosin của góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng $\dfrac{b^2-a^2}{c^2}$.

Trong các khẳng định trên có bao nhiêu khẳng định đúng?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của AC, BC, AD.

Ta có: $EF//AB$, $EG//CD$, suy ra góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

Ta có: $AF^2=\dfrac{AB^2+AC^2}{2}-\dfrac{BC^2}{4}=\dfrac{a^2+b^2}{2}-\dfrac{c^2}{4}$.

Do $\Delta ABC=\Delta DBC\left(c.c.c\right)$ nên $AF=DF$.

Suy ra ΔAFD cân tại F. Vậy $FG\perp AD\Rightarrow FG=\sqrt{FA^2-AG^2}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}}$.

Xét tam giác EFG có: $\cos FEG=\dfrac{EF^2+EG^2-FG^2}{2EF.EG}=\dfrac{c^2-b^2}{a^2}$.

Vì $0^o\le\left(EF,EG\right)\le 90^o\Rightarrow\cos\left(EF,EG\right)=\left|\cos FEG\right|=\dfrac{\left|b^2-c^2\right|}{a^2}$.

Vậy cosin của góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $\dfrac{\left|b^2-c^2\right|}{a^2}$.

Tương tự ta cũng suy ra cosin của góc giữa AC và BD bằng $\dfrac{\left|a^2-c^2\right|}{b^2}$.

Nhận xét: Từ ví dụ này, ta còn suy ra được một trong ba giá trị $a^2\cos\left(AB,CD\right)$; $b^2\cos\left(AC,BD\right)$; $c^2\cos\left(AD,BC\right)$ bằng tổng hai giá trị còn lại. Cũng từ ví dụ này ta còn suy ra được với tứ diện đều $ABCD$ thì góc giữa các cặp cạnh đối diện luôn bằng 90^o

Câu 42: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi Bx, Cy, Dz là các đường thẳng song song với nhau lần lượt đi qua B, C, D và nằm về một phía của mặt phẳng $\left(ABCD\right)$, đồng thời không nằm trong mặt phẳng $\left(ABCD\right)$. Một mặt phẳng đi qua A và cắt Bx, Cy, Dz lần lượt tại B', C', D' với $BB'=2$, $DD'=4$. Khi đó CC' bằng:

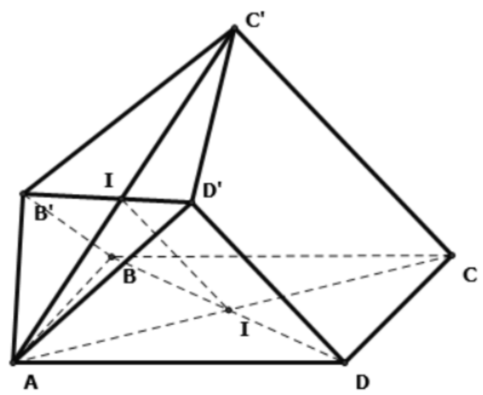
A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. I là trung điểm của $B'D'$.

Do Bx, Dz song song với nhau nên $BDD'B'$ là hình thang và OI là đường trung bình của hình thang đó. Suy ra $IO=\dfrac{BB'+DD'}{2}=3$.



Mặt khác OI song song với CC' (vì cùng song song với DD') nên có bốn điểm C, C', O, I đồng phẳng.

Giao tuyến của hai mặt phẳng $(AB'D')$ với (ACC') là AC'. Lại có I thuộc $(AB'D')$, I thuộc (ACC'). Do đó A, I, C' thẳng hàng. Từ đây dễ dàng suy ra, I là trung điểm đoạn AC'. Do vậy, $CC' = 2OI = 6$.

Nhận xét: Ta có bài toán tổng quát cho bài toán này như sau:

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi At, Bx, Cy, Dz là các đường thẳng song song với nhau lần lượt đi qua A, B, C, D đồng thời không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng cắt At, Bx, Cy, Dz lần lượt tại A', B', C', D'. Khi đó $A'B'C'D'$ là hình bình hành và $AA' + CC' = BB' + DD'$.

Do đó khi biết 3 trong 4 đối tượng AA', BB', CC', DD' ta sẽ dễ dàng tính được đối tượng còn lại.

Câu 43: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi At, Bx, Cy, Dz là các đường thẳng song song với nhau lần lượt đi qua A, B, C, D và nằm về một phía của mặt phẳng $(ABCD)$, đồng thời không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng (α) di động cắt At, Bx, Cy, Dz lần lượt tại A', B', C', D' sao cho $AA' + CC' + BB' + DD' = a$ (O có độ dài cho trước). Mặt phẳng (α) luôn đi qua điểm cố định I. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. I nằm trên đường thẳng O song song với At và $OI = \frac{a}{2}$.

B. I nằm trên đường thẳng O song song với At và $OI = \frac{a}{4}$.

C. I nằm trên đường thẳng O song song với At và $OI = \frac{3a}{2}$.

D. I nằm trên đường thẳng O song song với At và $OI = a$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Theo kết quả bài trên ta có : $AA' + CC' = 2OI = BB' + AA' + CC' + BB' + DD' = a$ nên $OI = \frac{a}{4}$.

Câu 44: *Cho tứ diện* $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC, Gọi E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là:

A. Tam giác MNE.

B. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD.

C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD mà $EF // BC$.

D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD và $EF // BC$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Trong mặt phẳng (BCD), Gọi F là giao điểm của đường thẳng qua E, song song BC với BD

Ta có $\begin{cases}(MNE)\cap(ABC)=MN;(MNE)\cap(BCD)=EF\\(MNE)\cap(ABD)=MF;(MNE)\cap(ACD)=NE\end{cases}$

Vậy tứ giác $MNEF$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNE).

Lại có $\begin{cases}(MNE)\cap(ABC)=MN\\(MNE)\cap(BCD)=EF\\(MCD)\cap(ABC)=BC\\BC//MN\end{cases} \Rightarrow EF//MN.$

Suy ra tứ giác $MNEF$ là hình thang $(EF > MN)$.

Câu 45: Cho hình tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $6a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CA, CB. P là điểm trên cạnh BD sao cho $BP = 2PD$. Diện tích S thiết diện của tứ diện $ABCD$ bị cắt bởi (MNP) là:

A. $S=\dfrac{5a^2\sqrt{51}}{4}$. **B.** $S=\dfrac{5a^2\sqrt{147}}{4}$. **C.** $S=\dfrac{5a^2\sqrt{147}}{2}$. **D.** $S=\dfrac{5a^2\sqrt{51}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Trong mặt phẳng (BCD), gọi I là giao điểm của NP với CD.

Trong mặt phẳng (ACD), gọi Q là giao điểm của AD và MI. Suy ra Q là giao điểm của AD với (MNP). Khi đó, tứ giác $MNPQ$ là thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Trong tam giác BCI ta có P là trọng tâm của tam giác suy ra D là trung điểm của CI.

Trong tam giác ACI có Q là trọng tâm của tam giác nên $\dfrac{QA}{QD}=2$.

Ta có $\dfrac{IP}{IN}=\dfrac{IQ}{IM}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow PQ//MN$.

Suy ra $MNPQ$ là hình thang với đáy lớn MN.

Ta có: $AQ=4a, AM=3a=MN, PQ=2a.$ Áp dụng định lí cosin trong tam giác MAQ ta có:

$$MQ^2=AM^2+AQ^2-2AM.AQ.\cos 60^0=16a^2+9a^2-12a^2=13a^2\Rightarrow MQ=a\sqrt{13}.$$

Tương tự ta cũng tính được $NP=a\sqrt{13}$.

Dễ thấy $MNPQ$ là hình thang cân. Do đó:

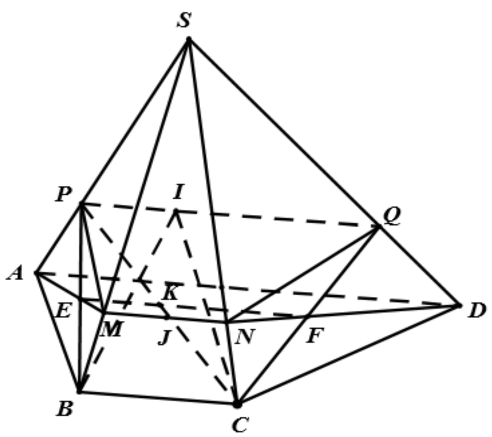
$$S=\frac{(MN+PQ)\sqrt{MQ^2-\left(\frac{MN-PQ}{2}\right)^2}}{2}=\frac{5a^2\sqrt{51}}{4}.$$

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy AD và BC. Biết $AD=a,\ BC=b$. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD tại P, Q. Giả sử AM cắt BD tại E; CQ cắt DN tại F. Độ dài đoạn thẳng EF là:

A. $EF=\dfrac{1}{2}(a+b)$. **B.** $EF=\dfrac{3}{5}(a+b)$. **C.** $EF=\dfrac{2}{3}(a+b)$. **D.** $EF=\dfrac{2}{5}(a+b)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Ta có $E=AM\cap BP\Rightarrow$ Gọi $K=CP\cap EF\Rightarrow EF=EK+KF$.

Ta có $EK \parallel BC \Rightarrow \dfrac{EK}{BC} = \dfrac{PE}{PB} (1)$

$PM \parallel AB \Rightarrow \dfrac{PE}{EB} = \dfrac{PM}{AB}$; Mà $\dfrac{PM}{AB} = \dfrac{SP}{SA} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{PE}{EB} = \dfrac{2}{3}$

Từ (1) suy ra $\dfrac{EK}{BC} = \dfrac{PE}{PB} = \dfrac{PE}{PE+EB} = \dfrac{1}{1+\dfrac{EB}{PE}} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow EK = \dfrac{2}{5}BC = \dfrac{2}{5}b$

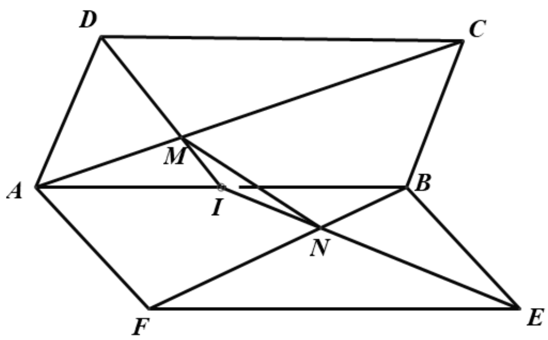
Tương tự $KF = \dfrac{2}{5}a$. Vậy $EF = EK + KF = \dfrac{2}{5}(a+b)$.

Câu 47: Hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên cạnh AC lấy điểm M và trên cạnh BF lấy điểm N sao cho $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{BN}{BF} = k$. Tìm k để $MN // DE$.

A. $k = \dfrac{1}{3}$. **B.** $k = 3$. **C.** $k = \dfrac{1}{2}$. **D.** $k = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



$MN // DE \Rightarrow \begin{cases} DM \cap NE = I \\ \dfrac{IM}{DM} = \dfrac{IN}{NE} \end{cases}$ Lại có $\dfrac{IM}{DM} = \dfrac{IA}{DC} = \dfrac{AM}{MC} = \dfrac{k}{1-k}$; $\dfrac{IN}{NE} = \dfrac{BI}{EF} = \dfrac{BN}{NF} = \dfrac{k}{1-k}$;

Mặt khác $\dfrac{AI}{DC} + \dfrac{BI}{EF} = \dfrac{AI}{FE} + \dfrac{BI}{EF} = 1 \Rightarrow 2.\dfrac{k}{1-k} = 1 \Rightarrow k = \dfrac{1}{3}$

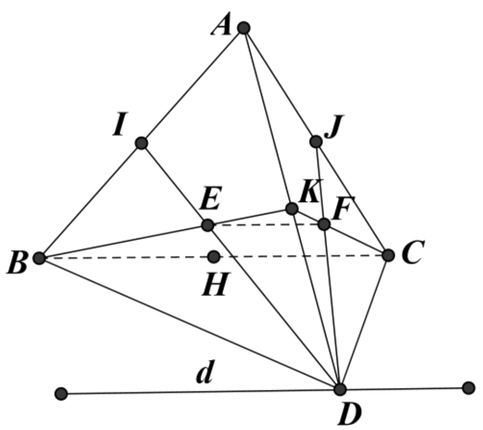
ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

Câu 48: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J, K, H lần lượt là trung điểm của các cạnh BA, AC, CB, AD. Gọi E, F lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và tam giác ACD. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (DIJ) và (DBC). Khi đó khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $d \parallel (IHK)$. **B.** $d \parallel (JHK)$. **C.** $d \parallel (AEF)$. **D.** $d \parallel (DIJ)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta có IJ là đường trung bình của tam giác ABC, suy ra $BC \parallel IJ$.

Như vậy $\begin{cases} D \in (DIJ) \cap (DBC) \\ IJ \parallel BC \\ IJ \subset (DIJ), BC \subset (DBC) \end{cases}$ suy ra giao tuyến d của 2 mặt phẳng (DIJ) và (DBC) là đường thẳng qua D và song song với IJ, BC.

E, F lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và tam giác ACD nên $IJ \parallel EF$ vì $\frac{DE}{DI} = \frac{DF}{DJ} = \frac{2}{3}$

Do đó $\begin{cases} d \parallel EF \\ EF \subset (AEF) \end{cases} \Rightarrow d \parallel (AEF)$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi G, E lần lượt là trọng tâm của ΔSAD và ΔSCD. Lấy M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Xét các mệnh đề sau:

(1) Đường thẳng MN song song với (GAC).

(2) Đường thẳng MN song song với (DAC).

(3) Đường thẳng GE song song với (AMN).

(4) Đường thẳng GE và đường thẳng MN trùng nhau.

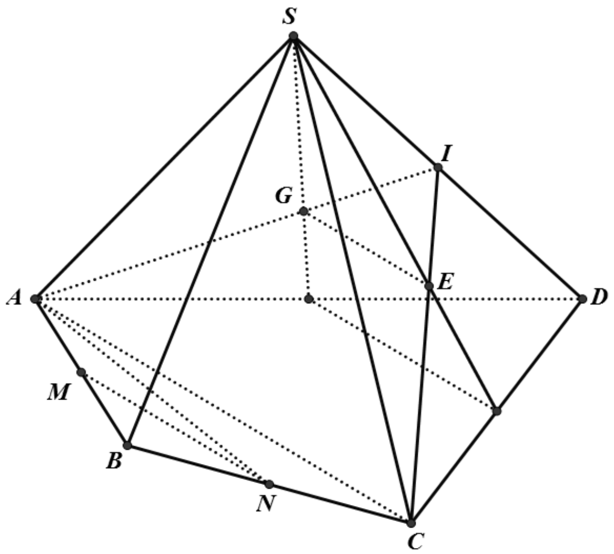
(5) Đường thẳng GE và đường thẳng MN song song.

Số mệnh đề **sai** là:

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Hai mệnh đề sai là (2) và (4).

(2) sai vì $MN \subset (DAC)$.

(4) sai vì $GE \| MN$.

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P là ba điểm trên các cạnh AD, CD, SO. Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) là hình gì?

A. Ngũ giác. **B.** Tứ giác. **C.** Hình thang. **D.** Hình bình hành.

Hướng dẫn giải

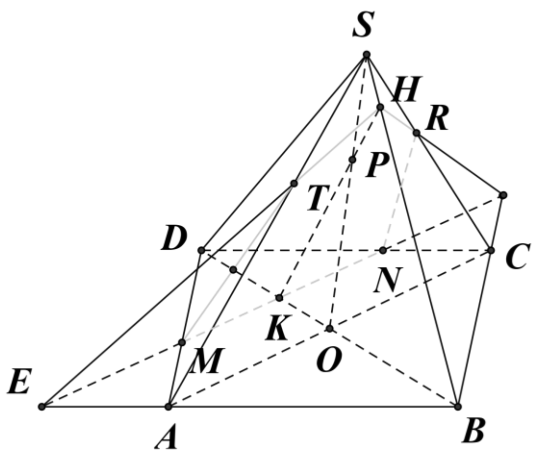
Chọn A.

Trong $mp(ABCD)$ gọi E, K, F lần lượt là giao điểm của MN với DA, DB, DC.

Trong $mp(SDB)$ gọi $H = KP \cap SB$

Trong $mp(SAB)$ gọi $T = EH \cap SA$

Trong $mp(SBC)$ gọi $R = FH \cap SC$



Ta có: $\begin{cases} E \in MN \\ H \in KP \end{cases} \Rightarrow EH \subset (MNP)$

$\begin{cases} T \in SA \\ T \in EH \end{cases} \Rightarrow T = SA \cap (MNP)$

Lí luận tương tự ta có $R = SC \cap (MNP)$

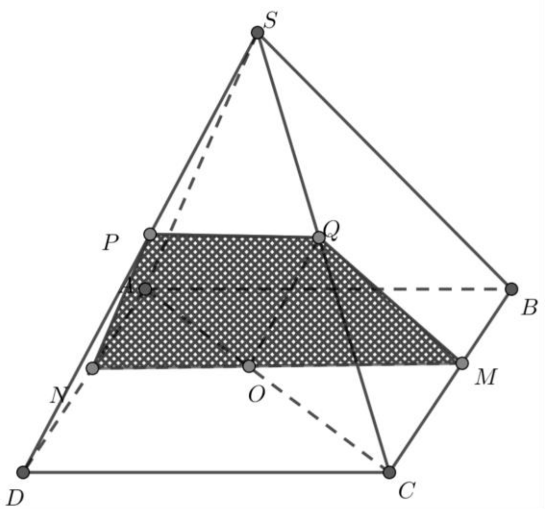
Thiết diện là ngũ giác $MNRHT$.

Câu 51: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, gọi O là tâm của đáy. Tam giác SAB là tam giác đều. Gọi M là điểm trên cạnh BC. Mặt phẳng (P) đi qua M và song song với SA, SB cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì?

A. Hình vuông. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình thang cân. **D.** Hình thang vuông.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Qua M kẻ một đường thẳng song song với SB, cắt SC tại Q.

Qua Q kẻ một đường thẳng song song với SA, cắt AC tại O.

Gọi $M = MO \cap AD$. Qua N kẻ đường thẳng song song với SA, cắt SD tại P.

Thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $MNPQ$.

Do $MQ//SB; QO//SA; NP//SA$ nên

$\frac{CM}{CB} = \frac{CQ}{CS} = \frac{CO}{CA} = \frac{DP}{DS} \Rightarrow MN//PQ (1)$

Đặt $BM = x$. Có $MQ//SB \Rightarrow \frac{MQ}{SB} = \frac{CM}{CB}$

$MQ = \frac{CM.SB}{CB} = \frac{(a-x)a}{a} = a - x$

Tương tự, $NP = a - x \Rightarrow MQ = NP (2)$

Từ (1) và (2) ta có thiết diện $MNPQ$ là hình thang cân.

Câu 52: Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các tia Ax, By, Cz, Dt song song, cùng hướng nhau và không nằm trong $\text{mp}(ABCD)$. Mp (α) cắt Ax, By, Cz, Dt lần lượt tại A', B', C', D'. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $A'B'C'D'$ là hình bình hành. **B.** $\text{mp}(AA'B'B) // (DD'C'C)$.

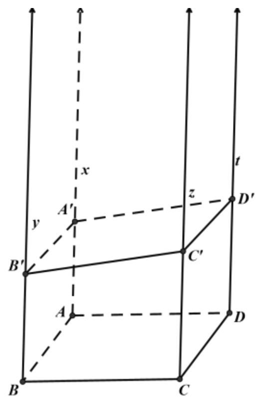
C. $AA' = CC'$ và $BB' = DD'$. **D.** $OO' // AA'$.

(O là tâm hình bình hành $ABCD$, O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$).

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\left.\begin{array}{l} AB \ // \ DC \\ AA' \ // DD' \\ AB, AA' \subset (ABB'A') \\ DC, DD' \subset (DD'C'C) \end{array}\right\} \Rightarrow (ABB'A') \ // \ (DD'C'C).$$



Câu **B** đúng.

Mặt khác

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha) \cap (ABB'A') = A'B' \\ (\alpha) \cap (DCC'D') = C'D' \\ (ABB'A') // (DCC'D') \end{array}\right\} \Rightarrow A'B' \ // \ C'D'.$$

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha) \cap (ADD'A') = A'D' \\ (\alpha) \cap (BCC'B') = C'B' \\ (ABB'A') // (DCC'D') \end{array}\right\} \Rightarrow A'D' \ // \ C'B'.$$

Do đó câu **A** đúng.

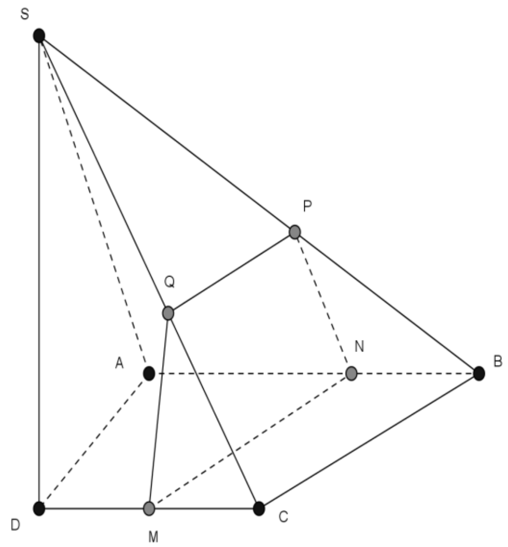
O, O' lần lượt là trung điểm của $AC, A'C'$ nên OO' là đường trung bình trong hình thang $AA'C'C$. Do đó $OO' // AA'$. Câu **D** đúng.

Câu 53: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn là $AB.$ M là trung điểm $CD.$ Mặt phẳng (α) qua M song song với BC và $SA.$ (α) cắt AB, SB lần lượt tại N và $P.$ Nói gì về thiết diện của mặt phẳng (α) với khối chóp $S.ABCD$?

A. Là một hình bình hành. **B.** Là một hình thang có đáy lớn là $MN.$

C. Là tam giác $MNP.$ **D.** Là một hình thang có đáy lớn là $NP.$

Hướng dẫn giải



Chọn B

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, qua M kẻ đường thẳng $MN \parallel BC\left(N \in BC\right)$. Khi đó, $MN \subset (\alpha)$.

Trong mặt phẳng (SAB), qua N kẻ đường thẳng $NP \parallel SA\left(P \in SB\right)$. Khi đó, $NP \subset (\alpha)$.

Vậy $(\alpha) \equiv (MNP)$.

Xét hai mặt phẳng (MNP) và (SBC) có

$$\begin{cases} MN \subset (MNP) \\ BC \subset (SBC) \\ MN \parallel BC \\ P \in (MNP), P \in (SBC) \end{cases}$$ $\Rightarrow$ hai mặt phẳng cắt nhau theo một giao tuyến đi qua điểm P và song song với BC.

Trong mặt phẳng (SBC) kẻ $PQ \parallel BC\left(Q \in SC\right)$. Khi đó, PQ là giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (SBC). Vậy mặt phẳng (α) cắt khối chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Tứ giác $MNBC$ có $\begin{cases} MN \parallel BC \\ MC \parallel NB \end{cases} \Rightarrow MNBC$ là hình bình hành. Từ đó suy ra $MN = BC$.

Trong tam giác SBC có P thuộc đoạn SB, Q thuộc đoạn SC và $PQ \parallel BC$ nên $PQ < BC$.

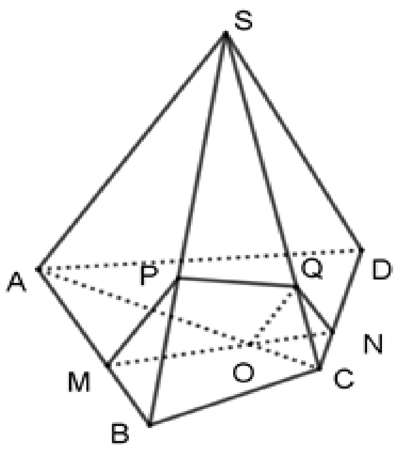
Tứ giác $MNPQ$ có $\begin{cases} MN \parallel PQ \\ PQ < MN \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình thang có đáy lớn là MN.

Câu 54: Cho hình chóp $S.ABCD$, M là một điểm trên cạnh AB, N là điểm trên cạnh CD. Mặt phẳng (α) chứa MN và song song với SA. Thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) là hình thang thì điều kiện là:

A. $AD = 2CD$. **B.** $MN//BC$. **C.** $BC//AD$. **D.** $MN//AD$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Do $(\alpha)//AB$ nên (α) cắt (SAB) và (SAC) lần lượt theo các giao tuyến song song với SA.

Trong (SAB) kẻ $MP//SA, P\in SB$.

Trong $(ABCD)$ kẻ $MN\cap AC=\{O\}$.

Trong (SAC) kẻ $OQ//SA, Q\in SC$.

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $MNQP$.

Ta có $MNQP$ là hình thang thì $\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} MP//QN & (1) \\ MN//PQ & (2) \end{array}\right.$

- Xét (1)

  $(1)\Rightarrow SA//QN$ vì $SA//MP$.

  $\Rightarrow SA//(SCD)$: điều này vô lí.

- Xét (2)

  Có: $\begin{cases} BC=(ABCD)\cap(SBC) \\ MN\subset(ABCD) \\ PQ\subset(SBC) \\ MN//PQ \end{cases} \Rightarrow MN//BC$.

Đảo lại nếu có $MN//BC$ thì $MN//PQ$ vì $\begin{cases} PQ=(\alpha)\cap(SBC) \\ BC\subset(SBC) \\ MN\subset(\alpha) \\ MN//BC \end{cases}$

Câu 55: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $SA=SB=a$, $SC=SD=\sqrt{3}a$. E là trung điểm của đoạn SA. M là một điểm trên cạnh BC. Đặt $BM=x(0\le x\le a)$. Mặt phẳng (α) chứa ME và song song với AB. Thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) có diện tích tính theo a,x là:

A. $\dfrac{3a}{16}\sqrt{16x^2+8ax+3a^2}$.
B. $\dfrac{a}{16}\sqrt{16x^2+8ax+3a^2}$.

C. $\dfrac{3a}{16}\sqrt{16x^2-4ax+3a^2}$.
D. $\dfrac{3a}{16}\sqrt{16x^2+4ax+3a^2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Do $(\alpha)//AB$ nên (α) cắt $(ABCD)$ và (SAB) lần lượt theo các giao tuyến song song với AB.

Trong $(ABCD)$ kẻ $MN//AB, N \in AD$ (1).

Trong (SAB) kẻ $EF//AB, F \in SB$ (2).

Từ (1) và (2),suy ra $MN//FE$ nên tứ giác $MNEF$ là hình thang.

Hai tam giác SAD và SBC bằng nhau (c.c.c) nên $SAD = SBC$.

Hai tam giác EAN và FBM bằng nhau (c.g.c) nên $EN = FM$.

Vậy thiết diện $MNEF$ là hình thang cân.

Áp dụng hệ quả của định lý hàm số cosin trong tam giác SBC ta có:

$$\cos SBC = \frac{SB^2 + BC^2 - SC^2}{2SB.BC} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2}.$$

Tam giác FBM có

□ $$FM^2 = BF^2 + BM^2 - 2BF.BM.\cos SBC = \frac{a^2}{4} + x^2 - 2.\frac{a}{2}.x\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{a^2}{4} + x^2 + \frac{ax}{2}.$$

$$\Rightarrow FM = \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2 + \frac{ax}{2}}.$$

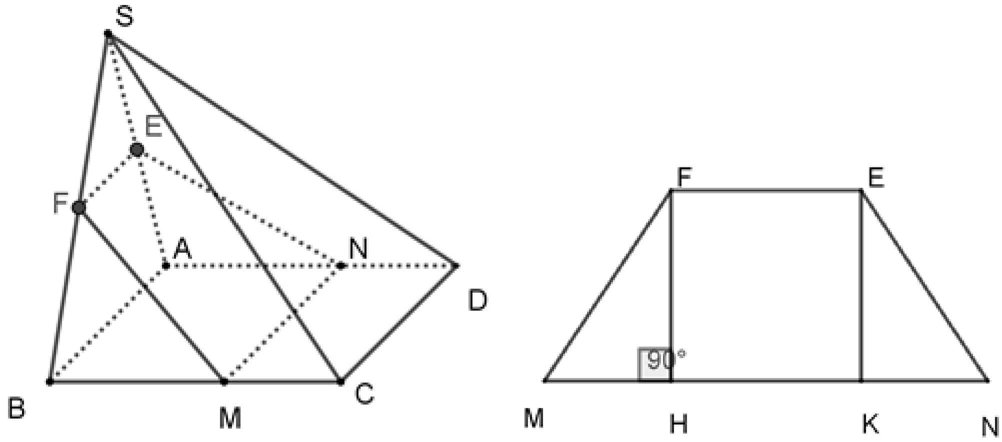
□ $$S_{MNEF} = \frac{1}{2}(MN + EF).FH.$$

Ta có $MH = \dfrac{MN - EF}{2} = \dfrac{a}{4}$

$$FH^2 = FM^2 - MH^2 = \frac{a^2}{4} + x^2 + \frac{ax}{2} - \frac{a^2}{16} = x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{3a^2}{16}.$$

$$\Rightarrow FH = \sqrt{x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{3a^2}{16}}$$

Vậy $S_{MNEF} = \dfrac{1}{2}(MN + EF).FH = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{a}{2}\right)\sqrt{x^2 + \dfrac{ax}{2} + \dfrac{3a^2}{16}} = \dfrac{3a}{16}\sqrt{16x^2 + 8ax + 3a^2}$.



Câu 56: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Điểm M là trung điểm của AB. Tính diện tích thiết diện của hình tứ diện cắt bởi $mp(P)$ đi qua M và song song với AD và AC.

A. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\dfrac{9a^2\sqrt{3}}{16}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

Hướng dẫn giải

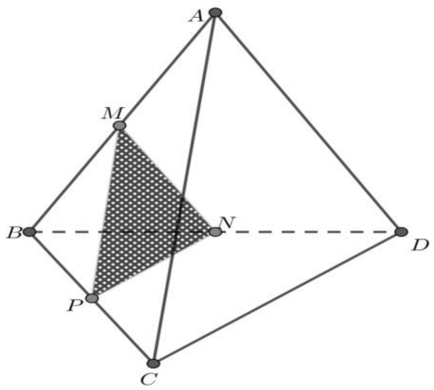
Chọn D.

Qua M kẻ 2 đường thẳng lần lượt song song với AD, AC cắt BD tại N và cắt BC tại P.

Thiết diện tạo bởi (P) và tứ diện là tam giác đều MNP.

Có $MN = NP = PM = \dfrac{a}{2}$

Diện tích thiết diện



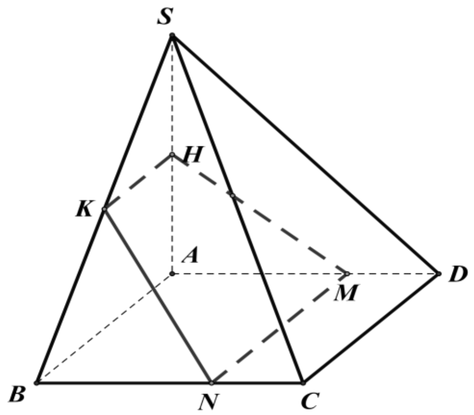
$$S_{MNP} = \frac{1}{2}MN.MP = \frac{1}{2}.\frac{a^2}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}.$$

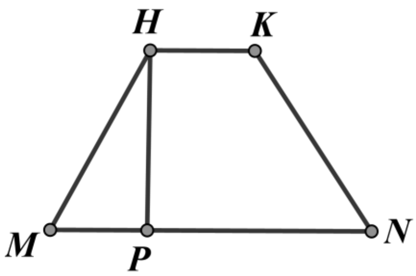
Câu 57: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAB) là tam giác đều. Cho $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SA, SB. Gọi M là một điểm trên cạnh AD. Mặt phẳng (HKM) cắt BC tại N. Cho biết $(HKMN)$ là hình thang cân. Đặt $AM = x\,(0 \le x \le a)$. Tìm x để diện tích $HKMN$ là nhỏ nhất.

A. $x = \dfrac{a}{5}$. **B.** $x = \dfrac{a}{3}$. **C.** $x = \dfrac{a}{4}$. **D.** $x = \dfrac{a}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.





Ta có ngay $MN = a$ và $KH = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$.Trong tam giác SAD,ta có

$\cos SAD = \frac{SA^2 + AD^2 - SD^2}{2.SA.AD} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2}$

Trong tam giác HAM,ta có $MH^2 = AH^2 + AM^2 - 2AH.AM.\cos HAM = \frac{a^2}{4} + x^2 - 2.\frac{a}{2}.x.\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow MH = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 2ax + a^2}$.

Trong hình thang cân $MNKH$,gọi P là chân đường cao hạ từ H,ta có $HP = \sqrt{MH^2 - MP^2} = \sqrt{MH^2 - \left(\frac{MN - HK}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{16x^2 - 8ax + 3a^2}$.Suy ra

$S_{MNKH} = \frac{1}{2}(MN + KH)HP = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right).\frac{1}{4}\sqrt{16x^2 - 8ax + 3a^2} = \frac{3a}{16}\sqrt{16x^2 - 8ax + 3a^2}$.

Ta có biến đổi: $S_{MNKH} = \frac{3a}{16}\sqrt{16x^2 - 8ax + 3a^2} = \frac{3a}{16}\sqrt{(4x - a)^2 + 2a^2} \ge \frac{3a^2\sqrt{2}}{16}$.

Vậy $(S_{MNKH})_{\min} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{16}$ đạt được khi $x = \frac{a}{4}$.

Câu 58: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi C' là điểm trên cạnh SC sao cho $\frac{C'S}{C'C} = \frac{1}{2}$, M là điểm trên cạnh SA. Mặt phẳng (P) qua $C'M$ và song song với BC. Xác định vị trí của điểm M để (P) cắt hình chóp theo thiết diện là hình bình hành.

A. M là trung điểm của SA.

B. $\frac{MA}{MS} = 2$.

C. $\frac{MA}{MS} = \frac{1}{2}$.

D. $\frac{MA}{MS} = \frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

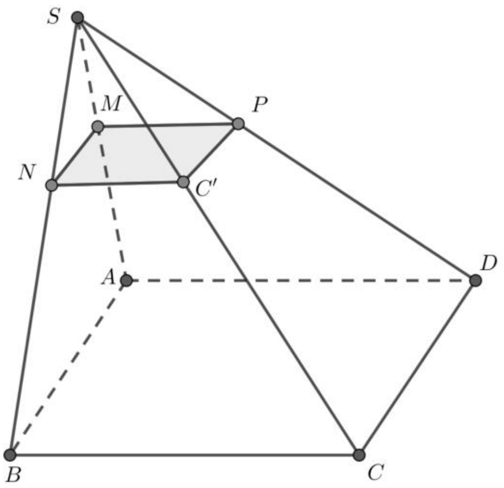
Chọn B.

(P) song song BC

$\Rightarrow (P)\cap(SBC)=d_1\begin{cases} d_1 \text{ qua } C' \\ d_1 // BC \end{cases}$

$d_1 \cap SB = N; (P)\cap(SAB)=MN$

$(P)//BC \Rightarrow (P)//AD \Rightarrow (P)\cap(SAD)=d_2\begin{cases} d_2 \text{ qua } I \\ d_2 // AD \end{cases}$



$d_2 \cap SD = P.$ Khi đó (P) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $MNC'P$ có $C'N//MP$ nên thiết diện là hình thang.

Có $C'N//BC \Rightarrow \dfrac{SC'}{SC}=\dfrac{C'N}{BC}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow C'N=\dfrac{1}{3}BC.$

Tứ giác $MNC'P$ là hình bình hành khi $MP=NC'=\dfrac{1}{3}BC=\dfrac{1}{3}AD \Leftrightarrow \dfrac{MP}{AD}=\dfrac{1}{3}.$

$MP//AD \Rightarrow \dfrac{SM}{SA}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow \dfrac{MA}{MS}=2.$

Câu 59: Cho tứ diện $ABCD$ trong đó $AB\perp CD$ và $AB=AC=CD=a$. M là một điểm trên cạnh AC với $AM=x(0<x<a)$. Mặt phẳng (P) qua M, song song với AB và CD. Tính diện tích thiết diện của (P) và tứ diện $ABCD$ theo a và x.

A. $x(a-x)$. **B.** $\dfrac{x(a-x)}{2}$. **C.** $a(a-x)$. **D.** $\dfrac{a(a-x)}{2}$.

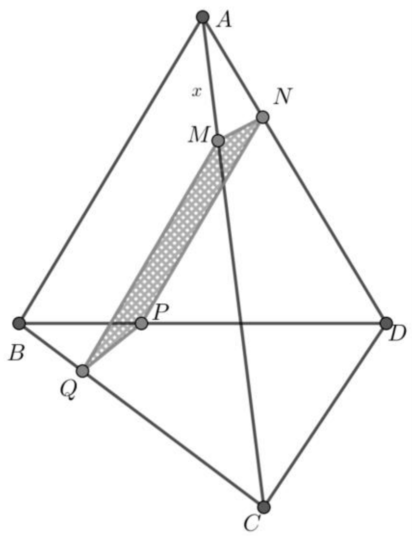
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Qua M kẻ các đường thẳng song song với AB và CD cắt BC và AD lần lượt tại Q và N.

Qua N kẻ đường thẳng song song với AB cắt BD tại P.

Suy ra thiết diện là tứ giác $MNPQ$ có $MN//PQ; MQ//NP; MP\perp MQ$ nên thiết diện $MNPQ$ là hình chữ nhật.



Có $\dfrac{MN}{DC}=\dfrac{AM}{AC}\Rightarrow MN=\dfrac{AM.DC}{AC}=x$

$\dfrac{MQ}{AB}=\dfrac{MC}{AC}=\dfrac{a-x}{a}\Rightarrow MQ=a-x$

$\Rightarrow S_{MNPQ}=MN.MQ=x(a-x)$.

Câu 60: Cho tứ diện $ABCD$ trong đó $AB\perp CD$ và $AB=AC=CD=a.$ M là một điểm trên cạnh AC. Mặt phẳng (P) qua ., song song với AB và CD. Diện tích thiết diện của $mp\,(P)$ và tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. a^2. **B.** $\dfrac{a^2}{16}$. **C.** $\dfrac{a^2}{2}$. **D.** $\dfrac{a^2}{4}$.

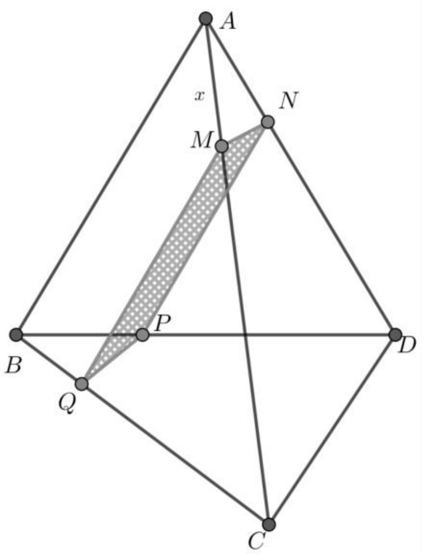
Hướng dẫn giải

Chọn D.

Qua M kẻ các đường thẳng song song với AB và CD cắt BC và AD lần lượt tại Q và N.

Qua N kẻ đường thẳng song song với AB cắt BD tại P.

Suy ra thiết diện là tứ giác $MNPQ$ có $MN//PQ; MQ//NP; MP\perp MQ$ nên thiết diện $MNPQ$ là hình chữ nhật.



Có $\dfrac{MN}{DC}=\dfrac{AM}{AC}\Rightarrow MN=\dfrac{AM.DC}{AC}=x$

$\dfrac{MQ}{AB}=\dfrac{MC}{AC}=\dfrac{a-x}{a}\Rightarrow MQ=a-x$

$\Rightarrow S_{MNPQ}=MN.MQ=x(a-x)$.

Theo bất đẳng thức Cô-si: $x(a-x)\le\left(\dfrac{x+a-x}{2}\right)^2=\dfrac{a^2}{4}$ khi $x=\dfrac{a}{2}$.

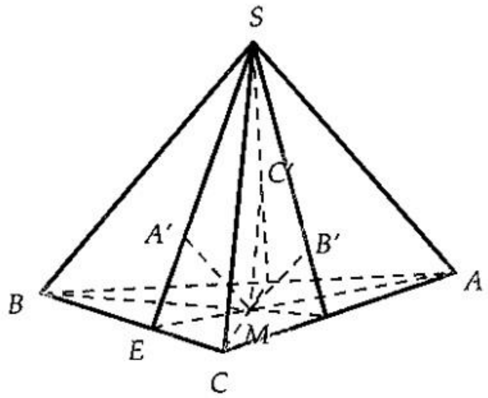
Câu 61. Cho hình chóp $S.ABC$, M là một điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M song song với SA,SB,SC cắt các mặt phẳng $(SBC),(SAC),(SAB)$ lần lượt tại A',B',C'.

$\dfrac{MA'}{SA}+\dfrac{MB'}{SB}+\dfrac{MC'}{SC}$ có giá trị không đổi bằng bao nhiêu khi M di động trong tam giác ABC?

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Do $MA'//SA$ nên bốn điểm này nằm trong cùng mặt phẳng. Giả sử E là giao điểm của mặt phẳng này với BC. Khi đó A, M, E thẳng hàng và ta có: $\dfrac{MA'}{SA}=\dfrac{ME}{EA}=\dfrac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$.

Tương tự ta có: $\dfrac{MB'}{SB}=\dfrac{S_{MAC}}{S_{ABC}}, \dfrac{MC'}{SC}=\dfrac{S_{MAB}}{S_{ABC}}$. Vậy $\dfrac{MA'}{SA}+\dfrac{MB'}{SB}+\dfrac{MC'}{SC}=1$.

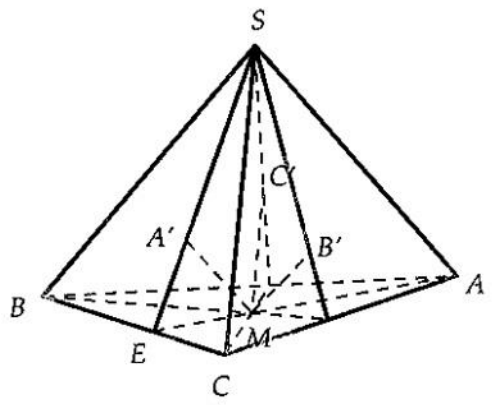
Câu 62. Cho hình chóp $S.ABC$, M là một điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M song song với SA, SB, SC cắt các mặt phẳng $(SBC),(SAC),(SAB)$ lần lượt tại A', B', C'. $\dfrac{MA'}{SA}.\dfrac{MB'}{SB}.\dfrac{MC'}{SC}$ nhận giá trị lớn nhất. Khi đó vị trí của M trong tam giác ABC là:

A. Trực tâm ΔABC. **B.** Trọng tâm ΔABC.

C. Tâm ngoại tiếp ΔABC. **D.** Tâm nội tiếp ΔABC.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Do $MA'//SA$ nên bốn điểm này nằm trong cùng mặt phẳng. Giả sử E là giao điểm của mặt phẳng này với BC. Khi đó A, M, E thẳng hàng và ta có: $\frac{MA'}{SA} = \frac{ME}{EA} = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$.

Tương tự ta có: $\frac{MB'}{SB} = \frac{S_{MAC}}{S_{ABC}}, \frac{MC'}{SC} = \frac{S_{MAB}}{S_{ABC}}$. Vậy $\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} = 1$.

Ap dụng bất đẳng thức Cauchy ta có :

$$\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} \geq 3\sqrt[3]{\frac{MA'}{SA} \cdot \frac{MB'}{SB} \cdot \frac{MC'}{SC}} \Rightarrow \frac{MA'}{SA} \cdot \frac{MB'}{SB} \cdot \frac{MC'}{SC} \leq \frac{1}{27}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{MA'}{SA} = \frac{MB'}{SB} = \frac{MC'}{SC} \Rightarrow S_{MAC} = S_{MAB} = S_{MBC}$.

Điều này chỉ xảy ra khi M là trọng tâm tam giác ABC. Vậy đáp án đúng là B.

Câu 63: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang với đáy AD và BC $(AD = a > BC = b)$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD lần lượt tại P, Q. Gọi E là giao điểm của AM và PB, F là giao điểm của CQ và DN. Trong các mệnh đề dưới đây, có bao nhiêu mệnh đề sai?

1) MN và PQ song song với nhau.

2) MN và EF song song với nhau.

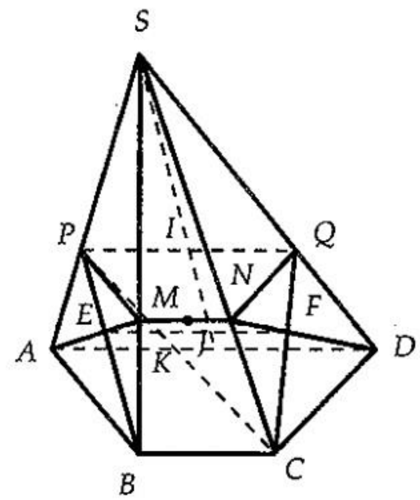
3) $EF = \frac{2}{5}(a+b)$.

4) $EF = \frac{1}{4}(a+b)$

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Ta có $I \in (SAD)$, suy ra $I \in (SAD) \cap (BCI)$.

Do $\begin{cases} (SAD) \cap (BCI) = PQ \\ AD \subset (SAD), BC \subset (BCI) \Rightarrow PQ \,//\, AD \,//\, BC \\ AD \,//\, BC \end{cases}$.

Ta có: $J \in (SBC)$, suy ra $J \in (SBC) \cap (ADJ)$.

Do $\begin{cases} (SBC) \cap (ADJ) = MN \\ BC \subset (SBC), AD \subset (ADJ) \Rightarrow MN \,//\, AD \,//\, BC \\ AD \,//\, BC \end{cases}$.

Từ đó suy ra MN và PQ song song với nhau.

Ta có: $\begin{cases} EF = (ADNM) \cap (BCQP) \\ AD = (ADNM) \cap (ABCD) \\ BC = (ABCD) \cap (BCQP) \\ AD \,//\, BC \end{cases} \Rightarrow EF \,//\, AD$.

Suy ra $EF \,//\, MN$. Gọi K là giao điểm của CP với EF $EF = EK + KF$.

Do $\dfrac{SP}{SA} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{SM}{SB} \Rightarrow PM \,//\, AB$.

Theo định lý Thalet ta có: $\dfrac{PE}{EB} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{PE}{PB} = \dfrac{2}{5}$. Do EK song song với BC nên theo định lý Thalet ta có : $\dfrac{PE}{PB} = \dfrac{EK}{BC} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow EK = \dfrac{2}{5}b$.

Tương tự ta cũng có: $\dfrac{QF}{FC} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{QC}{FC} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow \dfrac{PQ}{FK} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow FK = \dfrac{3}{5}PQ = \dfrac{3}{5}.\dfrac{2}{3}AD = \dfrac{2}{5}a$.

Từ đây suy ra $EF = \dfrac{2}{5}(a+b)$.

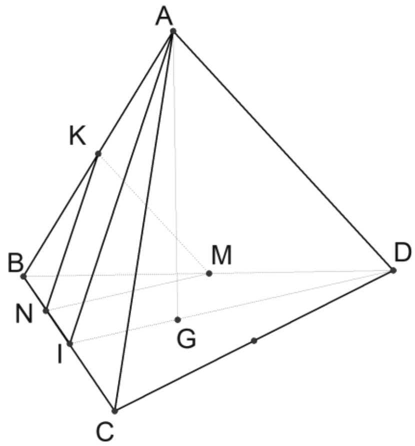
HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Câu 64: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng $2a$. Gọi I, M lần lượt là trung điểm của BC, BD. Mặt phẳng (α) qua M và song song với mp(AID) cắt tứ diện theo thiết diện có diện tích bằng

A. $\frac{\sqrt{2}a^2}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}a^2}{16}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Thiết diện của mặt phẳng (α) và tứ diện là tam giác KMN.

$$MN = KI = \frac{1}{2}DI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$KM = \frac{1}{2}AD = a; h = \frac{1}{2}AG = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

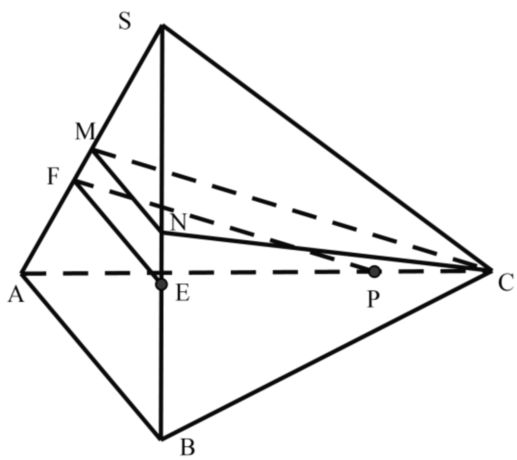
$$\Rightarrow S_{\Delta KMN} = \frac{1}{2}h.MN = \frac{\sqrt{2}a^2}{4}$$

Câu 65: Cho hình chóp $S.ABC$ có M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. P là điểm thuộc cạnh AC sao cho $CP = \frac{1}{4}CA$. (α) là mặt phẳng qua P và song song với $mp(CMN)$, (α) cắt SB tại E. Tỉ số $\frac{EB}{ES}$ bằng:

A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{3}{5}$ **C.** $\frac{5}{8}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



(α) là mặt phẳng qua P và song song với $mp(CMN)$ nên

+) (α) cắt (SAC) theo giao tuyến là đường thẳng d_1

qua P và song song CM.

Gọi $F = d_1 \cap SA$.

+) (α) cắt (SAB) theo giao tuyến là đường thẳng d_2

qua F và song song MN.

Gọi $E = d_2 \cap SB$. Khi đó $E = SB \cap (\alpha)$

Xét ΔAMC có $PF//CM$ nên: $\dfrac{AF}{AM} = \dfrac{AP}{AC} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{AF}{AS} = \dfrac{3}{4}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$

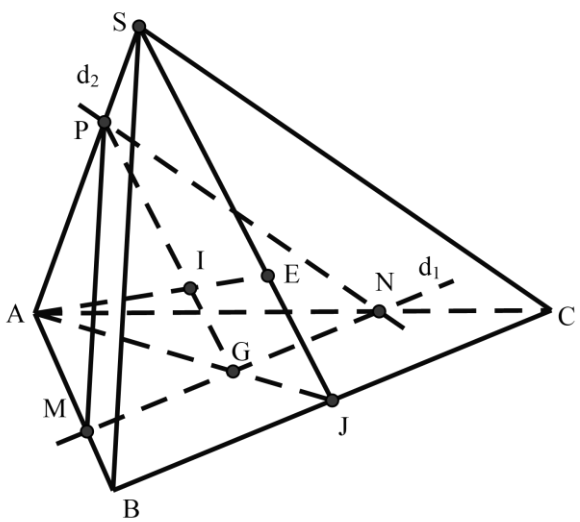
Xét ΔSAB có $EF//BA$ nên $\dfrac{BE}{BS} = \dfrac{AF}{AS} = \dfrac{3}{8} \Rightarrow \dfrac{EB}{ES} = \dfrac{3}{5}$

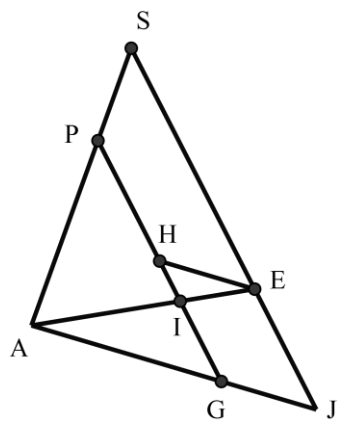
Câu 66: Cho hình chóp $S.ABC$. G, E lần lượt là trọng tâm tam giác ΔABC và ΔSBC. (α) là mặt phẳng qua G và song song với mặt phẳng (SBC). Gọi I là giao điểm của (α) và AE. Tỉ số $\dfrac{IA}{IE}$ bằng:

A. 2 **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.





Gọi J là trung điểm của BC

(α) là mặt phẳng qua G và song song với (SBC) nên:

+) (α) cắt mặt phẳng (ABC) theo giao tuyến là đường thẳng d_1 qua G và song song với BC.

Trong mặt phẳng (ABC) gọi $M = d_1 \cap AB; N = d_1 \cap AC$

+) (α) cắt mặt phẳng (SAC) theo giao tuyến là đường thẳng d_2 qua N và song song với SC.

Trong $mp(SAC)$, gọi $P = d_2 \cap SA$

Thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp $S.ABC$ là tam giác MNP.

Ta có $AE \subset (SAJ)$; $(SAJ) \cap (\alpha) = PG$

Trong (SAJ), gọi $AE \cap PG = I \Rightarrow I = AE \cap (\alpha)$

Trong (SAJ), dựng $EH // AJ$ $(H \in PG) \Rightarrow \frac{HE}{AG} = \frac{GJ}{AG} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{IE}{IA} = \frac{1}{2}$

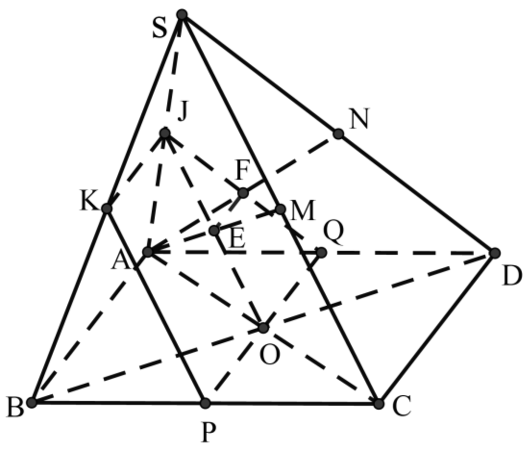
Vậy $\frac{IA}{IE} = 2$.

Câu 67: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. O là giao điểm của AC và BD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và SD. (α) là mặt phẳng qua O và song song mặt phẳng (SCD). Đường thẳng AM cắt (α) tại E, đường thẳng AN cắt (α) tại N. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau?

A. $EF = CD$.
B. $EF = \frac{1}{2}CD$.
C. $EF = \frac{1}{3}CD$.
D. $EF = \frac{1}{4}CD$

Hướng dẫn giải

Chọn D.



(α) cắt $(ABCD)$ theo giao tuyến là đường thẳng d_1 qua O và song song với CD.

(α) cắt (SAC) theo giao tuyến là đường thẳng d_2 qua O và song song với SC.

Gọi $P = d_1 \cap BC; Q = d_1 \cap AD; J = d_2 \cap SA$

(α) cắt (SAB) theo giao tuyến là đường thẳng d_3 qua J và song song với CD

Gọi $K = d_3 \cap SB \Rightarrow JK // CD$

Giả thiết đường thẳng AM cắt (α) tại E, đường thẳng AN cắt (α) tại N $\Rightarrow E = AM \cap OJ; F = AN \cap QJ$

Dễ thấy E là trung điểm của AM; F là trung điểm của AN

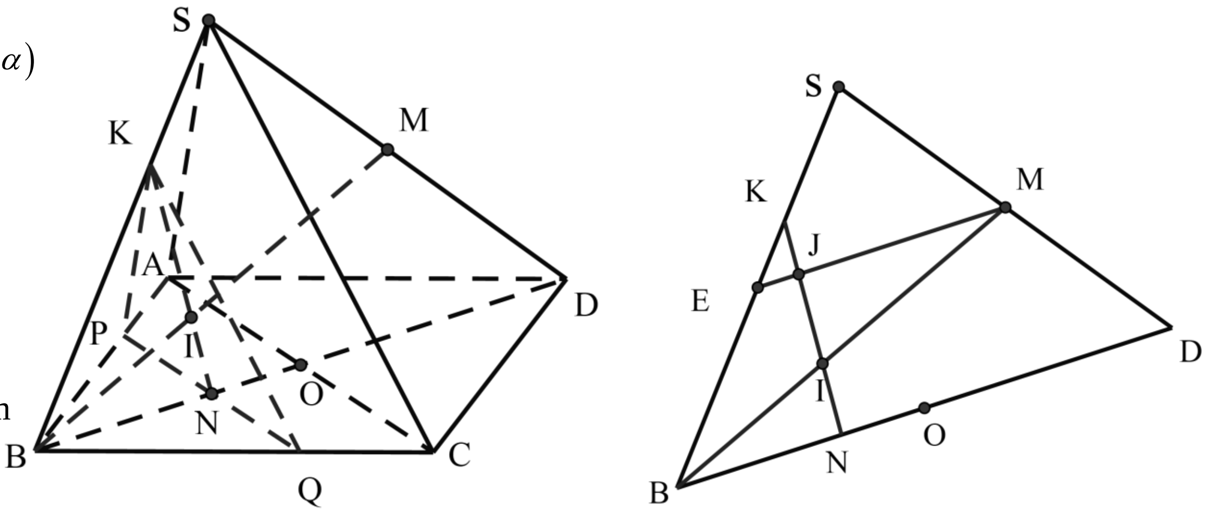
Do đó $EF = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}CD = \frac{1}{4}CD$

Câu 68: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. P là điểm trên cạnh AB sao cho $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{3}$. Gọi M là trung điểm của SD, (α) là mặt phẳng qua P và song song với mặt phẳng (SAC). (α) cắt BM tại I. Tỉ số $\frac{IM}{IB}$ bằng:

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** $\frac{5}{9}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



(α) cắt mặt phẳng $(ABCD)$ theo giao tuyến là đường thẳng d_1 qua P và song song AC

(α) cắt mặt phẳng (SAB) theo giao tuyến là đường thẳng d_2 qua P và song song SC

Gọi $Q = d_1 \cap BC; N = d_1 \cap BD; K = d_2 \cap SB$. Khi đó (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tam giác KPQ.

Trong (SBD), gọi $I = KN \cap BM \Rightarrow I = (\alpha) \cap BM$

Trong (SBD), dựng đường thẳng d_3 qua M và song song BD. d_3 cắt SB, KN lần lượt tại E và J.

Ta có: $\frac{IM}{IB} = \frac{JM}{BN}$

$\frac{JM}{BN} = \frac{ME - EJ}{BN}$

Có $ME=\frac{1}{2}BD$; $BN=\frac{1}{3}BD$

$$\frac{\mathrm{EJ}}{BN}=\frac{KE}{KB}=\frac{SE-SK}{KB}=\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)SB}{\frac{2}{3}SB}=\frac{1}{4}\Rightarrow \mathrm{EJ}=\frac{1}{4}BN=\frac{1}{4}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2}BD=\frac{1}{12}BD.$$

$$MJ=ME-\mathrm{EJ}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)\mathrm{BD}=\frac{5}{12}\mathrm{BD}$$

Từ đó ta có: $\frac{JM}{BN}==\frac{\frac{5}{12}BD}{\frac{1}{3}\mathrm{BD}}=\frac{5}{4}$

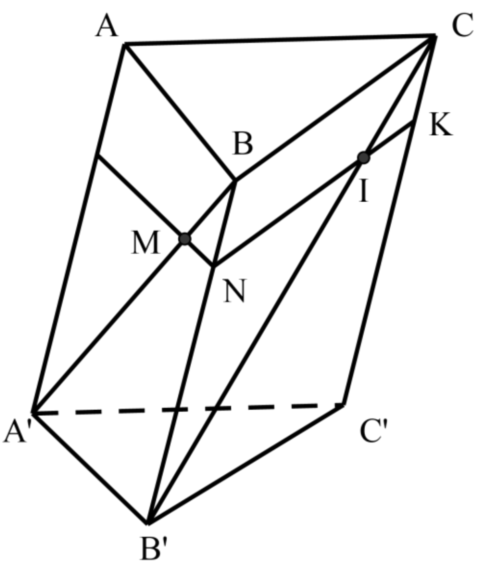
Vậy $\frac{IM}{IB}=\frac{5}{4}$.

Câu 69: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. M là điểm thuộc đoạn $A'B$ sao cho $\frac{BM}{BA'}=\frac{1}{4}$. (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng đáy. Gọi I là giao điểm của (α) và CB'. Tính tỉ số $\frac{IC}{IB'}$

A. $\frac{IC}{IB'}=3$ **B.** $\frac{IC}{IB'}=\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{IC}{IB'}=\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{IC}{IB'}=\frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Vì (α) qua M và song song với mặt phẳng đáy nên (α) cắt mặt phẳng $(ABB'A')$ theo giao tuyến là đường thẳng d_1 qua M và song song AB, $\mathrm{d}_1\cap BB'=N$

(α) cắt mặt $(BCC'B')$ theo giao tuyến là đường thẳng d_2 qua N và song song BC

Gọi $\mathrm{d}_2\cap CC'=K$; $\mathrm{d}_2\cap CB'=I\Rightarrow(\alpha)\cap CB'=I$

Ta có $BN=CK$ nên $\frac{IC}{IB'}=\frac{CK}{NB'}=\frac{BN}{NB'}=\frac{1}{3}$

Vậy $\frac{IC}{IB'}=\frac{1}{3}$

Câu 70: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi M,N là trung điểm của BC và CC'. Thiết diện của hình lăng trụ với mặt phẳng $(A'MN)$ cắt AB tại E. Tỷ số $\frac{EB}{EA}$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

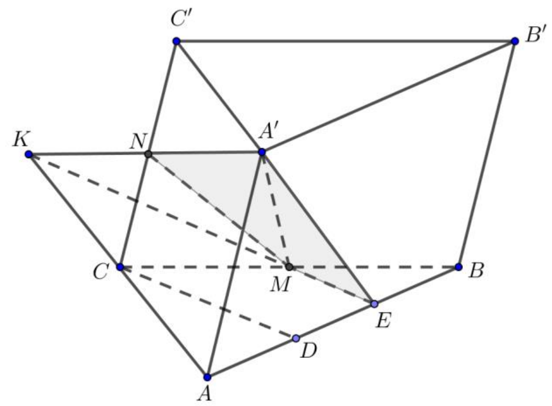
Chọn B.

Ta có:

□ $(A'MN)\cap(ACC'A') = MN$ (1)

□ Trong mặt phẳng $(ACC'A')$ gọi $K = AB \cap A'N \Rightarrow (A'MN)\cap(ABC) = KM$ (2)

□ Trong mặt phẳng (ABC) gọi $E = KM \cap AB \Rightarrow (A'MN)\cap(ABB'A') = A'E$ (3)



Từ (1), (2), (3) suy ra thiết diện tứ giác $A'NME$.

Vì $CN \parallel AA'$ và $CN = \frac{1}{2}AA'$ nên C là trung điểm của AK.

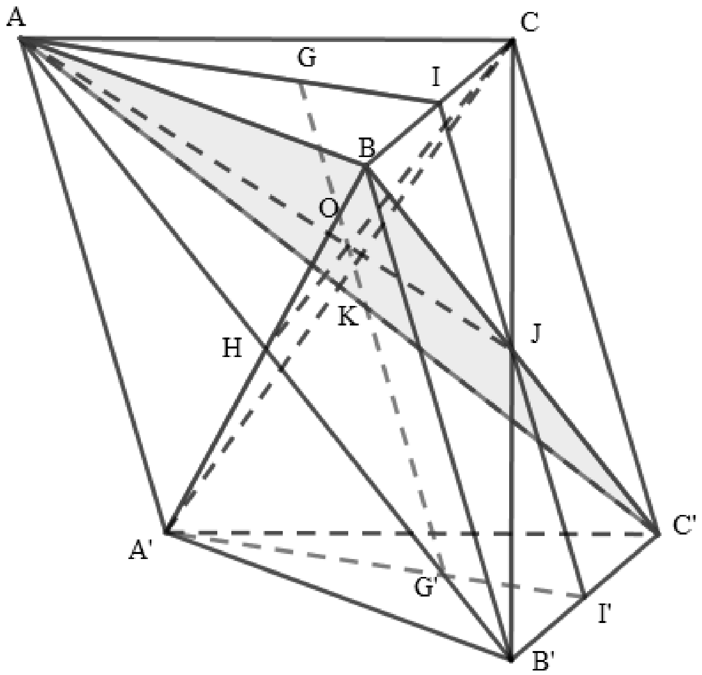
Gọi D là trung điểm của $AB \Rightarrow CD \parallel MK$ mà M là trung điểm của BC nên E là trung điểm của BD. Suy ra $\frac{EB}{EA} = \frac{1}{2}$.

Câu 71: Cho lăng trụ tam giác $\mathrm{ABC.A'B'C'}$. Gọi G, $\mathrm{G'}$ lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, $\mathrm{A'B'C'}$. Biết các mặt phẳng $(\mathrm{ABC'}),(\mathrm{BCA'}),(\mathrm{ACB'})$ cắt nhau tại O trên $\mathrm{GG'}$. Tính $\frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OG'}}$

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Vì G và O là trọng tâm tam giác ABC và ABC' nên $\frac{AG}{AI}=\frac{AO}{AJ}=\frac{2}{3}\Rightarrow OG\,//\,II'$ (1).

Lại có $GII'G'$ là hình bình hành nên $GG'\,//\,II'$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $O\in GG'$.

Ta có $GG'\,//\,IJ$ nên $\frac{OG}{IJ}=\frac{AG}{AI}=\frac{2}{3}\Rightarrow OG=\frac{2}{3}IJ=\frac{II'}{3}$

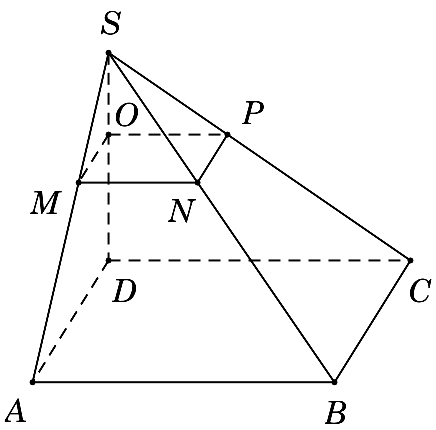
Mà $GG'=II'\Rightarrow OG=\frac{1}{3}GG'\Rightarrow\frac{OG}{OG'}=\frac{1}{2}$

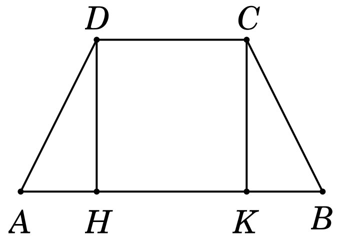
Câu 72: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC=2$, hai đáy $AB=6$, $CD=4$. Mặt phẳng (P) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA=3SM$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** 2. **D.** $\frac{7\sqrt{3}}{9}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A





Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D, C trên AB

$ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow \begin{cases} AH = BK;\ CD = HK \\ AH + HK + BK = AB \end{cases} \Rightarrow BK = 1$.

Tam giác BCK vuông tại K, có $CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

Suy ra diện tích hình thang $ABCD$ là $S_{ABCD} = CK.\dfrac{AB + CD}{2} = \sqrt{3}.\dfrac{4+6}{2} = 5\sqrt{3}$.

Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của (P) và các cạnh SB, SC, SD.

Vì $(P) // (ABCD)$ nên theo định lí Talet, ta có $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{NP}{BC} = \dfrac{PQ}{CD} = \dfrac{QM}{AD} = \dfrac{1}{3}$.

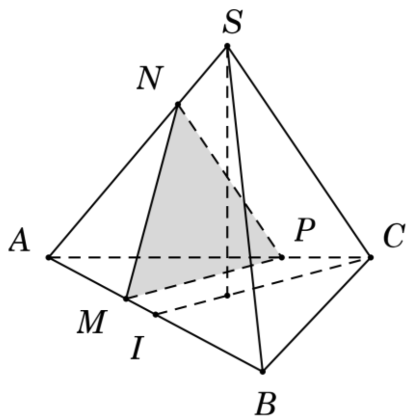
Khi đó (P) cắt hình chóp theo thiết diện $MNPQ$ có diện tích $S_{MNPQ} = k^2.S_{ABCD} = \dfrac{5\sqrt{3}}{9}$.

Câu 73: Cho tứ diện đều $SABC$ cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm của đoạn AB, M là điểm di động trên đoạn AI. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với (SIC). Tính chu vi của thiết diện tạo bởi (α) với tứ diện $SABC$, biết $AM = x$.

A. $x\left(1+\sqrt{3}\right)$ **B.** $2x\left(1+\sqrt{3}\right)$ **C.** $3x\left(1+\sqrt{3}\right)$ **D.** Không tính được

Hướng dẫn giải

Chọn B



Để ý hai tam giác MNP và SIC đồng dạng với tỉ số $\dfrac{AM}{AI} = \dfrac{2x}{a}$

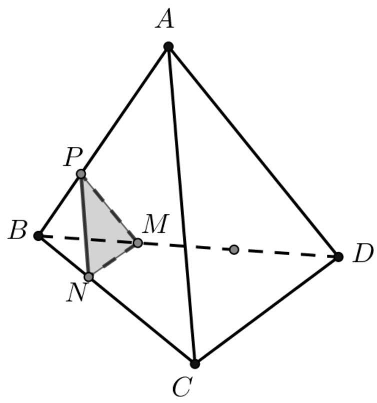
$$\Rightarrow \frac{C_{MNP}}{C_{SIC}} = \frac{2x}{a} \Leftrightarrow C_{MNP} = \frac{2x}{a}(SI + IC + SC) = \frac{2x}{a}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} + a\right) = 2x\left(\sqrt{3}+1\right).$$

Câu 74: Cho tứ diện đều $ABCD$. Trên đoạn thẳng BD lấy điểm M sao cho $\frac{MB}{MD}=\frac{1}{2}$. Gọi (α) là mặt phẳng qua điểm M và song song với mặt phẳng (ACD). Hỏi cạnh của tứ diện $ABCD$ bằng bao nhiêu để diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và tứ diện $ABCD$ là $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$:

A. a. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $2a$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án: D



Ta có:

$\left.\begin{array}{l} M\in(\alpha)\cap(BCD) \\ (\alpha)\parallel(ACD) \\ (ACD)\cap(BCD)=CD \end{array}\right\}\Rightarrow(\alpha)\cap(BCD)=d,\ d$ đi qua điểm M và song song với CD; $d\cap BC=\{N\}$. (1)

$\left.\begin{array}{l} N\in(\alpha)\cap(ABC) \\ (\alpha)\parallel(ACD) \\ (ACD)\cap(ABC)=AC \end{array}\right\}\Rightarrow(\alpha)\cap(ABC)=b,\ b$ đi qua điểm N và song song với AC; $b\cap AB=\{P\}$. (2)

$(\alpha)\cap(ABD)=PM$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và tứ diện $ABCD$ là tam giác MNP.

Giả sử cạnh của tứ diện đều $ABCD$ bằng $x\,(x>0)$.

Vì $MN\parallel CD$ nên $\frac{MN}{CD}=\frac{MB}{BD}=\frac{1}{3}\Rightarrow MN=\frac{x}{3}$.

Tương tự $PN=PM=\frac{x}{3}\Rightarrow\Delta MNP$ là tam giác đều $\Rightarrow S_{\Delta MNP}=\left(\frac{x}{3}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{x^2\sqrt{3}}{36}$.

Theo giả thiết diện tích thiết diện bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\frac{x^2\sqrt{3}}{36}=\frac{a^2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=2a\sqrt{3}$