CHUYÊN ĐỀ: TÍCH PHÂN HÀM ẨN

KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Các tính chất tích phân:

◆ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ với $a<c<b$.

◆ $k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x\,(k\neq 0)$

◆ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$

◆ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$

◆ $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

◆ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(z)\mathrm{d}z$

◆ $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_a^b=f(b)-f(a)$

2. Công thức đổi biến số: $\int f\left(u(x)\right).u'(x)dx=\int f(u)du,\ u=u(x)$

$$\int_a^b f\left(u(x)\right).u'(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du,\ u=u(x).$$

Phương pháp đổi biến số thường được sử dụng theo hai cách sau đây:

◆ Giả sử cần tính $\int_a^b g(x)dx$. Nếu ta viết được $g(x)$ dưới dạng $f\left(u(x)\right)u'(x)$ thì $\int_a^b g(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$. Vậy bài toán quy về tính $\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$, trong nhiều trường hợp thì tích phân mới này đơn giản hơn .

◆ Giả sử cần tính $\int_\alpha^\beta f(x)dx$. Đặt $x=x(t)$ thỏa mãn $\alpha=x(a),\ \beta=x(b)$ thì

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_a^b f\left(x(t)\right)x'(t)dt=\int_a^b g(t)dt,\text{ trong đó } g(t)=f\left(x(t)\right).x'(t)$$

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 1-BDG 2020-2021) Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{khi } x\ge 2 \\ x^2-2x+3 & \text{khi } x<2 \end{cases}$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x+1)\cos x\,dx$ bằng:

A. $\frac{23}{3}$. **B.** $\frac{23}{6}$. **C.** $\frac{17}{6}$. **D.** $\frac{17}{3}$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm giá trị của tích phân của hàm số.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Dựa vào biểu thức bên trong dấu tích phân, ta sử dụng phương pháp đổi biến số để xử lý bài toán.

B2: Sử dụng tính chất $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx,\ \forall c\in(a;b)$.

B3: Lựa chọn hàm $f(x)$ thích hợp để tính giá trị tích phân.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Xét $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x+1)\cos x\,dx$

Đặt $t=2\sin x+1\Rightarrow \frac{1}{2}dt=\cos x dx$

Đổi cận: $\begin{matrix} x=0\Rightarrow t=1 \\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=3 \end{matrix}$.

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 f(t)dt=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 f(x)dx=\frac{1}{2}\left[\int\limits_1^2(x^2-2x+3)dx+\int\limits_2^3(x^2-1)dx\right]=\frac{23}{6}.$$

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 3

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} e^{2x} & khi\ x\ge 0 \\ x^2+x+2 & khi\ x<0 \end{cases}$. Biết tích phân $\int\limits_{-1}^1 f(x)dx=\frac{a}{b}+\frac{e^2}{c}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị $a+b+c$ bằng

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I=\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\left(x^2+x+2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}e^{2x}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}+\frac{e^2}{2}$.

Vậy $a+b+c=9$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x\left(1+x^2\right) & khi\ x\geq 3\\ \dfrac{1}{x-4} & khi\ x<3\end{cases}$. Tích phân $\int\limits_{\mathrm{e}^2}^{\mathrm{e}^4}\frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x$ bằng:

A. $\frac{40}{3}-\ln 2$. **B.** $\frac{95}{6}+\ln 2$. **C.** $\frac{189}{4}+\ln 2$. **D.** $\frac{189}{4}-\ln 2$.

Lời giải

Chọn D

Xét $I=\int\limits_{e^2}^{e^4}\frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x$

Đặt $t=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

Đổi cận: $\begin{matrix}x=\mathrm{e}^2\Rightarrow t=2\\ x=\mathrm{e}^4\Rightarrow t=4\end{matrix}$.

$$I=\int\limits_{2}^{4}f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{2}^{4}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{2}^{3}\frac{1}{x-4}\mathrm{d}x+\int\limits_{3}^{4}x\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{189}{4}-\ln 2.$$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & khi\ x\geq 1\\ x+1 & khi\ x<1\end{cases}$. Tích phân $\int\limits_{-2}^{1}f(\sqrt[3]{1-x})\mathrm{d}x=\frac{m}{n}$ ($\frac{m}{n}$ là phân số tối giản), khi đó $m-2n$ bằng:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Xét $I=\int\limits_{-7}^{1}f(\sqrt[3]{1-x})\mathrm{d}x$

Đặt $t=\sqrt[3]{1-x}\Rightarrow -3t^2\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$

Đổi cận: $\begin{matrix}x=-7\Rightarrow t=2\\ x=1\Rightarrow t=0\end{matrix}$.

$$I=-3\int\limits_{2}^{0}t^2f(t)\mathrm{d}t=3\int\limits_{0}^{2}x^2f(x)\mathrm{d}x=3\left[\int\limits_{0}^{1}x^2\left(x+1\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}x\mathrm{d}x\right]=\frac{25}{12}.$$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=4$, $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int\limits_{-1}^{1} f(|2x+1|)\mathrm{d}x$

A. $I=3$. **B.** $I=5$. **C.** $I=6$. **D.** $I=4$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u=2x+1 \Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}u$. Khi $x=-1$ thì $u=-1$. Khi $x=1$ thì $u=3$.

Nên $I=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{3} f(|u|)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^{0} f(|u|)\mathrm{d}u+\int\limits_{0}^{3} f(|u|)\mathrm{d}u\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^{0} f(-u)\mathrm{d}u+\int\limits_{0}^{3} f(u)\mathrm{d}u\right)$.

Xét $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=4$. Đặt $x=-u \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$.

Khi $x=0$ thì $u=0$. Khi $x=1$ thì $u=-1$.

Nên $4=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^{-1} f(-u)\mathrm{d}u=\int\limits_{-1}^{0} f(-u)\mathrm{d}u$.

Ta có $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=6 \Rightarrow \int\limits_0^3 f(u)\mathrm{d}u=6$.

Nên $I=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^{0} f(-u)\mathrm{d}u+\int\limits_{0}^{3} f(u)\mathrm{d}u\right)=\frac{1}{2}(4+6)=5$.

Câu 4. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=|1+x|-|1-x|$ trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(1)=3$. Tính tổng $F(0)+F(2)+F(-3)$.

A. 8. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 10.

Lời giải:

Chọn C

Bảng khử dấu giá trị tuyệt đối:

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$1+x$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$ $\quad$ | $\quad$ $+$
$1-x$	$+$ $\quad$ | $\quad$ $+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
$f(x)$	-2 $\quad$ | $\quad$ $2x$ $\quad$ | $\quad$ 2

Ta có: $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = F(2)-F(1)=F(2)-3$ mà $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 2\mathrm{d}x=2$ nên $F(2)=5$.

➢ $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = F(1)-F(0)=3-F(0)$ mà $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 2x\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^1=1$ nên $F(0)=2$.

➢ $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x = F(0)-F(-1)=2-F(-1)$ mà $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 2x\mathrm{d}x=x^2\Big|_{-1}^0=-1$ nên $F(-1)=3$.

➢ $\int_{-3}^{-1} f(x)\mathrm{d}x = F(-1)-F(-3)=3-F(-3)$ mà $\int_{-3}^{-1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{-1} -2\mathrm{d}x=-4$ nên $F(-3)=7$.

Vậy $F(0)+F(2)+F(-3)=2+5+7=14$.

Câu 5. Biết $I=\int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x=4+a\ln 2+b\ln 5$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $S=a+b$.

A. $S=9$. **B.** $S=11$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=5$.

Lời giải:

Chọn D

Ta có $|x-2|=\begin{cases} x-2 \text{ khi } x\ge 2 \\ 2-x \text{ khi } x\le 2\end{cases}$.

Do đó $I=\int_1^2 \frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^5 \frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x$.

$=\int_1^2 \frac{2(2-x)+1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^5 \frac{2(x-2)+1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^2\left(\frac{5}{x}-2\right)\mathrm{d}x+\int_2^5\left(2-\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$

$=\left(5\ln|x|-2x\right)\Big|_1^2+\left(2x-3\ln|x|\right)\Big|_2^5=4+8\ln 2-3\ln 5$.

$\Rightarrow\begin{cases} a=8 \\ b=-3\end{cases}\Rightarrow S=a+b=5$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x^3+3x+1\right)=3x+2$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_1^5 xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{31}{4}$. **B.** $\frac{17}{4}$. **C.** $\frac{33}{4}$. **D.** $\frac{49}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết ta có $f\left(x^3+3x+1\right)=3x+2$ nên suy ra $f(1)=2$, $f(5)=5$.

Suy ra $I=\int_1^5 xf'(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_1^5 - \int_1^5 f(x)\mathrm{d}x = 23-\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $x=t^3+3t+1 \Rightarrow \mathrm{d}x=\left(3t^2+3\right)\mathrm{d}t$.

Với $x=1 \Rightarrow t=0; x=5 \Rightarrow t=1$

Do đó $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f\left(t^3+3t+1\right)\left(3t^2+3\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 (3t+2)\left(3t^2+3\right)\mathrm{d}t = \frac{59}{4}$.

Vậy $I=23-\frac{59}{4}=\frac{33}{4}$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả $f\left(x^5+4x+3\right)=2x+1, \forall x\in\mathbb{R}$.

Tích phân $\int_{-2}^{8} f(x)dx$ bằng

A. 2. **B.** 10. **C.** $\frac{32}{3}$. **D.** 72.

Lời giải

Chọn B

Đặt $x=t^5+4t+3 \Rightarrow dx=\left(5t^4+4\right)dt$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=-2 \Rightarrow t=-1 \\ x=8 \Rightarrow t=1 \end{cases}$

Khi đó $\int_{-2}^{8} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(t^5+4t+3\right)\left(5t^4+4\right)dt = \int_{-1}^{1}(2t+1)\left(5t^4+4\right)dt = 10$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2\left[f(x)\right]^3+3f(x)+5=x$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_5^{10} f(x)dx$.

A. $I=0$. **B.** $I=3$. **C.** $I=5$. **D.** $I=6$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=f(x) \Rightarrow 2t^3+3t+5=x \Rightarrow dx=(6t^2+3)dt$ và

$x=5 \Rightarrow 2t^3+3t+5=5 \Leftrightarrow t=0$

$x=10 \Rightarrow 2t^3+3t+5=10 \Leftrightarrow t=1$

Vậy $I=\int_5^{10} f(x)dx = \int_0^1 t(6t^2+3)dt = 3$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, thỏa $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $\ln 15$. **B.** $2+\ln 15$. **C.** $3+\ln 15$. **D.** $4+\ln 15$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$

$$\Rightarrow f(x)=\int\frac{2}{2x-1}dx=\ln|2x-1|+C=\begin{cases}\ln(1-2x)+C_1 & ;x<\frac{1}{2}\\ \ln(2x-1)+C_2 & ;x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

$f(0)=1\Rightarrow C_1=1$ và $f(1)=2\Rightarrow C_2=2$.

Do đó $f(x)=\begin{cases}\ln(1-2x)+1 & ;x<\frac{1}{2}\\ \ln(2x-1)+2 & ;x>\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(-1)=\ln 3+1\\ f(3)=\ln 5+2\end{cases}$

$\Rightarrow f(-1)+f(3)=3+\ln 15$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2+2x & \text{khi } x\ge 0\\ 5-x & \text{khi } x<0\end{cases}$. Khi đó $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x f(\sin x)dx$ bằng

A. $\frac{15}{2}$. **B.** 15. **C.** 8. **D.** $\frac{17}{2}$.

Lời giải:

Chọn A

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x dx$. Đổi cận $\begin{cases}x=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=-1\\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\end{cases}$.

$$\Rightarrow I=\int\limits_{-1}^{1}f(t)dt=\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx$$

Do $f(x)=\begin{cases}3x^2+2x & \text{khi } x\ge 0\\ 5-x & \text{khi } x<0\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_{-1}^{0}(5-x)\,dx+\int_{0}^{1}(3x^2+2x)\,dx=\frac{15}{2}.$$

Câu 11. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & \text{khi } x\geq 2\\ x+1 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Khi đó $I=\int_{0}^{1}f(3-2x)dx$ bằng

A. $\frac{41}{2}$. **B.** 21. **C.** $\frac{41}{12}$. **D.** $\frac{41}{21}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=3-2x\Rightarrow dt=-2dx\Rightarrow dx=-\frac{1}{2}dt$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=3\\ x=1\Rightarrow t=1\end{cases}$.

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_{1}^{3}f(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_{1}^{3}f(x)\,dx$$

Do $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & \text{khi } x\geq 2\\ x+1 & \text{khi } x<2\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\left(\int_{1}^{2}(x+1)\,dx+\int_{2}^{3}(x^2-2x+3)\,dx\right)=\frac{41}{12}.$$

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+2x & \text{khi } x\geq \frac{3}{2}\\ x-2 & \text{khi } x<\frac{3}{2}\end{cases}$. Khi đó $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x f(\cos x+1)dx$ bằng

A. $\frac{35}{12}$. **B.** 3. **C.** $\frac{19}{4}$. **D.** $\frac{10}{3}$.

Lời giải:

Chọn A

Đặt $t=\cos x+1\Rightarrow dt=-\sin x dx$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=2\\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\end{cases}$.

$$\Rightarrow I=\int_{1}^{2}f(t)\,dt=\int_{1}^{2}f(x)\,dx$$

Do $f(x)=\begin{cases}x^2+2x & \text{khi } x\geq \frac{3}{2}\\ x-2 & \text{khi } x<\frac{3}{2}\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_1^{\frac{3}{2}}(x-2)\,dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left(x^2+2x\right)dx=\frac{35}{12}.$$

Câu 13. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-x & \text{khi } x\ge 0\\ x & \text{khi } x<0\end{cases}$. Khi đó $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x f(\sin x)dx$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$. **B.** -1. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{4}{3}$.

Lời giải:

Chọn A

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x dx$. Đổi cận $\begin{cases}x=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=-1\\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\end{cases}$.

$$\Rightarrow I=\int_{-1}^{1}f(t)\,dt=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$$

Do $f(x)=\begin{cases}x^2-x & \text{khi } x\ge 0\\ x & \text{khi } x<0\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_{-1}^{0}xdx+\int_0^1\left(x^2-x\right)dx=-\frac{2}{3}.$$

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1 & \text{khi } x\ge 3\\ 2x-1 & \text{khi } x<3\end{cases}$. Khi đó $I=\int_0^2 xf\left(x^2+1\right)dx$ bằng

A. 24. **B.** $\frac{73}{3}$. **C.** $\frac{74}{3}$. **D.** 25.

Lời giải:

Chọn B

Đặt $t=x^2+1\Rightarrow dt=2xdx\Rightarrow xdx=\frac{1}{2}dt$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=2\Rightarrow t=5\end{cases}$.

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_1^5 f(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_1^5 f(x)\,dx$$

Do $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1 & \text{khi } x\ge 3\\ 2x-1 & \text{khi } x<3\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\left(\int_1^3(2x-1)\,dx+\int_3^5\left(x^2+x+1\right)dx\right)=\frac{73}{3}.$$

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x+3 \text{ khi } x<\dfrac{1}{2}\\ x+4 \quad \text{khi } x\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x$.

A. 8. **B.** $\dfrac{17}{4}$. **C.** $\dfrac{13}{2}$. **D.** $\dfrac{21}{5}$.

Lời giải:

Chọn B

Xét $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x$

Đặt $\sin x=t\Rightarrow \cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$

Với $x=0\Rightarrow t=0$

$x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$

$$\Rightarrow I=\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}(3x+3)\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{2}}^1(x+4)\mathrm{d}x=\dfrac{17}{4}.$$

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & \text{khi } x\ge 0\\ 2x^2-x+1 & \text{khi } x<0\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} f(3\cos x-2)\sin x\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{33}{2}$. **B.** $\dfrac{15}{23}$. **C.** 12. **D.** $\dfrac{19}{24}$.

Lời giải:

Chọn D

Xét $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} f(3\cos x-2)\sin x\mathrm{d}x$

Đặt $3\cos x-2=t\Rightarrow -3\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\Rightarrow \sin x\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3}\mathrm{d}t$

Với $x=0\Rightarrow t=1$

$x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=-\dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow I=\dfrac{1}{3}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^1 f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^0 f(x)\mathrm{d}x+\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(2x^2-x+1\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\int_{0}^{1}\left(2x^2+1\right)\mathrm{d}x=\frac{19}{24}.$$

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \text{khi } x\le 1\\ 2x-2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} f\left(5\sin 2x-1\right)\cos 2x\mathrm{d}x$.

A. $\frac{11}{10}$. **B.** $\frac{43}{31}$. **C.** $\frac{31}{30}$. **D.** $\frac{31}{10}$.

Lời giải:

Chọn C

Xét $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} f\left(5\sin 2x-1\right)\cos 2x\mathrm{d}x$

Đặt $5\sin 2x-1=t\Rightarrow 10\cos 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\Rightarrow \cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{10}\mathrm{d}t$

Với $x=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=-1$

$x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=4$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{10}\int_{-1}^{4} f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{10}\int_{-1}^{4} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{10}\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{10}\int_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{10}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{10}\int_{1}^{4}\left(2x-2\right)\mathrm{d}x=\frac{31}{30}.$$

Câu 18. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x^3-x-5 & \text{khi } x\ge 2\\ 11-x & \text{khi } x<2\end{cases}$. Tính tích phân $\int_{\frac{1}{e}}^{e} f\left(2+\ln x\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

A. $\frac{69}{2}$. **B.** 12. **C.** $\frac{25}{2}$. **D.** 30.

Lời giải:

Chọn A

Xét $I=\int_{1}^{e} f\left(2+\ln x\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

Đặt $2+\ln x=t\Rightarrow \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$

Với $x=\frac{1}{e}\Rightarrow t=1$

$x = e \Rightarrow t = 3$

$$\Rightarrow I = \int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 (11 - x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \left(2x^3 - x - 5\right)\mathrm{d}x = \frac{69}{2}.$$

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{khi } x \le 3 \\ 7 - 5x & \text{khi } x > 3 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^{\ln 2} f\left(3e^x - 1\right)e^x\mathrm{d}x$.

A. $\frac{13}{15}$. **B.** $-\frac{102}{33}$. **C.** $-\frac{94}{9}$. **D.** $\frac{25}{9}$.

Lời giải:

Chọn C

Xét $I = \int_0^{\ln 2} f\left(3e^x - 1\right)e^x\mathrm{d}x$

Đặt $3e^x - 1 = t \Rightarrow 3e^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow e^x\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{d}t$

Với $x = 0 \Rightarrow t = 2$

$x = \ln 2 \Rightarrow t = 5$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3}\int_2^5 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_2^3 \left(1 - x^2\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int_3^5 (7 - 5x)\mathrm{d}x = -\frac{94}{9}.$$

Mức độ 4

Câu 1. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\{\sin x, \cos x\}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình $\sin x - \cos x = 0$ có một nghiệm trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $x = \frac{\pi}{4}$.

Bảng xét dấu

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\sin x - \cos x$		$-$	0	$+$	

Suy ra $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \max\{\sin x, \cos x\} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = (\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - (\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}$.

Câu 2. Tính tích phân $I = \int\limits_0^2 \max\{x^3, x\} dx$.

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{17}{4}$. **C.** $\frac{19}{4}$. **D.** $\frac{11}{4}$.

Lời giải:

Chọn B

Đặt $f(x) = x^3 - x$ ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

.

Dựa vào bảng xét dấu ta có.

$\forall x \in [0;1], f(x) \le 0 \Leftrightarrow x^3 - x \le 0 \Leftrightarrow x^3 \le x \Rightarrow \max\{x^3, x\} = x$.

$\forall x \in [1;2], f(x) \ge 0 \Leftrightarrow x^3 - x \ge 0 \Leftrightarrow x^3 \ge x \Rightarrow \max\{x^3, x\} = x^3$.

Ta có: $I = \int\limits_0^2 \max\{x^3, x\} dx = \int\limits_0^1 \max\{x^3, x\} dx + \int\limits_1^2 \max\{x^3, x\} dx$.

Nên $I = \int\limits_0^2 \max\{x^3, x\} dx = \int\limits_0^1 x dx + \int\limits_1^2 x^3 dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 + \frac{1}{4}x^4\Big|_1^2 = \frac{17}{4}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ thỏa mãn $\begin{cases} f(1) = -2\ln 2 \\ f(2) = a + b\ln 3;\ a, b \in \mathbb{Q} \\ x(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x \end{cases}$.

Tính $a^2 + b^2$.

A. $\frac{25}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x$ (1)

Chia cả 2 vế của biểu thức (1) cho $(x+1)^2$ ta được $\frac{x}{x+1}.f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2} f(x) = \frac{x}{x+1}$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1}.f(x)\right]' = \frac{x}{x+1}, \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0;-1\}. \Rightarrow \frac{x}{x+1}.f(x) = \int \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1}.f(x) = x - \ln|x+1| + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{x+1}{x}\left(x - \ln|x+1| + C\right)$$

Mặt khác, $f(1) = -2\ln 2 \Leftrightarrow 2(1 - \ln 2 + C) = -2\ln 2 \Leftrightarrow C = -1$.

Do đó $f(x) = \dfrac{x+1}{x}\left(x - \ln|x+1| - 1\right)$.

Với $x = 2$ thì $f(x) = \dfrac{3}{2}(1 - \ln 3) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}\ln 3$. Suy ra $a = \dfrac{3}{2}$ và $b = -\dfrac{3}{2}$.

Vậy $a^2 + b^2 = \dfrac{9}{2}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases} f(0) = f'(0) = 1 \\ f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y) - 1 \end{cases}$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x-1)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Lấy đạo hàm theo hàm số y

$f'(x+y) = f'(y) + 3x^2 + 6xy$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Cho $y = 0 \Rightarrow f'(x) = f'(0) + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 1 + 3x^2$

$\Rightarrow f(x) = \int f'(x)dx = x^3 + x + C$ mà $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1$. Do đó $f(x) = x^3 + x + 1$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x-1)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^0 \left(x^3 + x + 1\right)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 7$ và $\int\limits_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{7}{4}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_0^1 x^2 f(x)dx = \left[\frac{x^3}{3}f(x)\right]\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3}f'(x)dx$. Suy ra $\int_0^1 \frac{x^3}{3}f'(x)dx = -\frac{1}{3}$.

Hơn nữa ta dễ dàng tính được $\int_0^1 \frac{x^6}{9}\mathrm{d}x = \frac{1}{63}$.

Do đó $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x + 2.21\int_0^1 \frac{x^3}{3}f'(x)\mathrm{d}x + 21^2\int_0^1 \frac{x^6}{9}\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x)+7x^3\right]^2 \mathrm{d}x = 0$.

Suy ra $f'(x) = -7x^3$, do đó $f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C$. Vì $f(1)=0$ nên $C = \frac{7}{4}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{7}{4}\int_0^1 (x^4-1)\mathrm{d}x = \frac{7}{5}$.

Câu 6. Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(1)=1$ và $f(2)=4$. Tính $J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

A. $J = 1+\ln 4$. **B.** $J = 4-\ln 2$. **C.** $J = \ln 2 - \frac{1}{2}$. **D.** $J = \frac{1}{2}+\ln 4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{f'(x)}{x}\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$.

$$J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{x}.f(x)\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}f(2) - f(1) + \left(2\ln x + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 4.$$

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$, $f(-3)-f(3)=0$, $f(0)=\frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4)+f(1)-f(4)$ bằng

A. $\frac{1}{3}\ln 20 + \frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{3}$. **C.** $\ln 80 + 1$. **D.** $\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5} + 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)$

$$f(x)=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C=\begin{cases}\frac{1}{3}\left[\ln(1-x)-\ln(-x-2)\right]+C_1;\ x\in(-\infty;-2)\\ \frac{1}{3}\left[\ln(1-x)-\ln(x+2)\right]+C_2;\ x\in(-2;1)\\ \frac{1}{3}\left[\ln(x-1)-\ln(x+2)\right]+C_3;\ x\in(1;+\infty)\end{cases}$$

Với $f(0)=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{1}{3}\left[\ln(1-0)-\ln(0+2)\right]+C_2=\frac{1}{3}\Rightarrow C_2=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}$

Với $f(-3)-f(3)=0\Rightarrow C_1-C_3=\frac{1}{3}\ln\frac{1}{10}$

Nên $f(-4)+f(1)-f(4)=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}+\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}+C_2+C_1-C_3=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn

$$\begin{cases}f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\ f'(x)=-e^x f^2(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.\\ f(0)=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Tính giá trị của $f(\ln 2)$.

A. $f(\ln 2)=\frac{1}{4}$. **B.** $f(\ln 2)=\frac{1}{3}$. **C.** $f(\ln 2)=\ln 2+\frac{1}{2}$. **D.** $f(\ln 2)=\ln^2 2+\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=-e^x f^2(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=-e^x$ (do $f(x)>0$)

$$\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int -e^x\mathrm{d}x\Rightarrow -\frac{1}{f(x)}=-e^x+C\Rightarrow f(x)=\frac{1}{e^x-C}.$$

Mà $f(0)=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{e^0-C}=\frac{1}{2}\Rightarrow C=-1$.

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{e^x+1}\Rightarrow f(\ln 2)=\frac{1}{e^{\ln 2}+1}=\frac{1}{3}.$$

Câu 9. Cho hai hàm $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\left[1;4\right]$, thỏa mãn $\begin{cases} f\left(1\right)+g\left(1\right)=4 \\ g\left(x\right)=-xf'\left(x\right) \\ f\left(x\right)=-xg'\left(x\right) \end{cases}$ với mọi $x\in\left[1;4\right]$. Tính tích phân $I=\int_1^4\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]dx$.

A. $3\ln 2$. **B.** $4\ln 2$. **C.** $6\ln 2$. **D.** $8\ln 2$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết ta có $f\left(x\right)+g\left(x\right)=-x.f'\left(x\right)-x.g'\left(x\right)$

$$\Leftrightarrow\left[f\left(x\right)+x.f'\left(x\right)\right]+\left[g\left(x\right)+x.g'\left(x\right)\right]=0\Leftrightarrow\left[x.f\left(x\right)\right]'+\left[x.g\left(x\right)\right]'=0$$

$$\Rightarrow x.f\left(x\right)+x.g\left(x\right)=C\Rightarrow f\left(x\right)+g\left(x\right)=\frac{C}{x}$$

Mà $f\left(1\right)+g\left(1\right)=4\Rightarrow C=4\Rightarrow I=\int_1^4\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]dx=\int_1^4\frac{4}{x}dx=8\ln 2$.

Câu 10. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $\left[1;2\right]$ thỏa mãn $f(1)=g(1)=0$ và

$$\begin{cases} \dfrac{x}{(x+1)^2}g(x)+2017x=(x+1)f'(x) \\ \dfrac{x^3}{x+1}g'(x)+f(x)=2018x^2 \end{cases},\ \forall x\in\left[1;2\right].$$

Tính tích phân $I=\int_1^2\left[\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{x+1}{x}f(x)\right]dx$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\frac{3}{2}$. **D.** $I=2$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2}g(x)-\dfrac{x+1}{x}f'(x)=-2017 \\ \dfrac{x}{x+1}g'(x)+\dfrac{1}{x^2}f(x)=2018 \end{cases},\ \forall x\in\left[1;2\right].$

Suy ra:

$$\left[\frac{1}{(x+1)^2}g(x)+\frac{x}{x+1}g'(x)\right]-\left[\frac{x+1}{x}f'(x)-\frac{1}{x^2}f(x)\right]=1\Leftrightarrow\left[\frac{x}{x+1}g(x)\right]'-\left[\frac{x+1}{x}f(x)\right]'=1$$

$$\Rightarrow\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{x+1}{x}f(x)=x+C.$$

Mà $f(1)=g(1)=0\Rightarrow C=-1\Rightarrow I=\int\limits_1^2\left[\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{x+1}{x}f(x)\right]dx=\int\limits_1^2(x-1)dx=\frac{1}{2}.$

Câu 11. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^3+x+2 & \text{khi } x<1\\ x+3 & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(3\sin^2 x-1\right)\sin 2x\mathrm{d}x$.

A. $\frac{21}{4}$. **B.** $\frac{13}{2}$. **C.** $\frac{20}{3}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Lời giải:

Chọn A

Xét $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(3\sin^2 x-1\right)\sin 2x\mathrm{d}x$

Đặt $3\sin^2 x-1=t\Rightarrow 3\sin 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\Rightarrow\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}t$

Với $x=0\Rightarrow t=-1$

$x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=2$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{2}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1}\left(x^3+x+2\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\int\limits_{1}^{2}(x+3)\mathrm{d}x=\frac{21}{4}.$$

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{khi } x\ge 1\\ x^2 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_1^{13}f\left(\sqrt{x+3}-2\right)\mathrm{d}x$.

A. $-\frac{231}{5}$. **B.** $\frac{97}{6}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{113}{3}$.

Lời giải:

Chọn B

Xét $I=\int\limits_1^{13}f\left(\sqrt{x+3}-2\right)\mathrm{d}x$

Đặt $\sqrt{x+3}-2=t\Rightarrow\sqrt{x+3}=t+2\Rightarrow x+3=(t+2)^2\Rightarrow\mathrm{d}x=2(t+2)\mathrm{d}t$

Với $x=1\Rightarrow t=0$

$x = 13 \Rightarrow t = 2$

$$\Rightarrow I = 2\int_0^2 (t+2) f\left(t\right) \mathrm{d}t = 2\int_0^2 (x+2) f\left(x\right) \mathrm{d}x = 2\int_0^1 (x+2) f\left(x\right) \mathrm{d}x + 2\int_1^2 (x+2) f\left(x\right) \mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^1 (x+2)x^2 \mathrm{d}x + 2\int_1^2 (2x-1)(x+2) \mathrm{d}x = \frac{97}{6}.$$

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-4 & \text{khi } x \geq 2 \\ 4-2x & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(3-4\cos^2 x\right)\sin 2x \mathrm{d}x$.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{21}{4}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

Lời giải:

Chọn A

Xét $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(3-4\cos^2 x\right)\sin 2x \mathrm{d}x$

Đặt $3-4\cos^2 x = t \Rightarrow \sin 2x \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\mathrm{d}t$

Với $x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 3$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4}\int_1^3 f\left(t\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 \left(4-2x\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int_2^3 \left(2x-4\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^4+2x^2-1 & \text{khi } x < 1 \\ 3-x^2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_1^{e^4} f\left(\sqrt{4-\ln x}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

A. $\frac{16}{3}$. **B.** 17. **C.** $\frac{11}{6}$. **D.** $\frac{6}{11}$.

Lời giải:

Chọn C

Xét $I = \int_1^{e^4} f\left(\sqrt{4-\ln x}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

Đặt $\sqrt{4-\ln x}=t\Rightarrow 4-\ln x=t^2\Rightarrow \frac{1}{x}\mathrm{d}x=-2t\mathrm{d}t$

Với $x=1\Rightarrow t=2$

$x=e^4\Rightarrow t=0$

$\Rightarrow I=2\int_0^2 t.f\left(t\right)\mathrm{d}t=2\int_0^2 x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=2\int_0^1 x.f(x)\mathrm{d}x+2\int_1^2 x.f(x)\mathrm{d}x$

$=2\int_0^1 x\left(x^4+2x^2-1\right)\mathrm{d}x+2\int_1^2 x\left(3-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{11}{6}.$

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x^2-1 & \text{khi } x<0\\ x-1 & \text{khi } 0\le x\le 2\\ 5-2x & \text{khi } x>2\end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f\left(2-7\tan x\right)\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

A. $\frac{201}{77}$. **B.** $\frac{34}{103}$. **C.** $\frac{155}{7}$. **D.** $\frac{109}{21}$.

Lời giải:

Chọn D

Xét $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f\left(2-7\tan x\right)\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

Đặt $2-7\tan x=t\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{7}\mathrm{d}t$

Với $x=-\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=9$

$x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=-5$

$\Rightarrow I=\frac{1}{7}\int_{-5}^{9} f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{7}\int_{-5}^{9} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\int_{-5}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{7}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{7}\int_2^9 f(x)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{7}\int_{-5}^{0}\left(2x^2-1\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{7}\int_0^2\left(x-1\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{7}\int_2^9\left(5-2x\right)\mathrm{d}x=\frac{109}{21}.$

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-x & \text{khi } x\ge 0\\ x & \text{khi } x<0\end{cases}$. Khi đó $I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xf\left(\sin x\right)dx+2\int_0^2 f\left(3-2x\right)dx$ bằng

A. $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** 3. **D.** $\frac{10}{3}$.

Lời giải:

Chọn D

Ta có: $I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xf\left(\sin x\right)dx+2\int_0^2 f\left(3-2x\right)dx=I_1+I_2$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\end{cases}$.

$\Rightarrow I_1=2\int_0^1 f\left(t\right)dt=\int_{-1}^1 f\left(t\right)dt=\int_{-1}^1 f\left(x\right)dx$

Do $f(x)=\begin{cases}x^2-x & \text{khi } x\ge 0\\ x & \text{khi } x<0\end{cases}$

$\Rightarrow I_1=\int_{-1}^0 xdx+\int_0^1\left(x^2-x\right)dx=-\dfrac{2}{3}$.

Đặt $t=3-2x\Rightarrow dt=-2dx\Rightarrow dx=-\dfrac{1}{2}dt$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=3\\ x=2\Rightarrow t=-1\end{cases}$.

$\Rightarrow I_2=\int_{-1}^3 f\left(t\right)dt=\int_{-1}^3 f\left(x\right)dx$

Do $f(x)=\begin{cases}x^2-x & \text{khi } x\ge 0\\ x & \text{khi } x<0\end{cases}$

$\Rightarrow I_2=\left(\int_{-1}^0 xdx+\int_0^3\left(x^2-x\right)dx\right)=4$.

Vậy $I=I_1+I_2=\dfrac{10}{3}$

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}4x & \text{khi } x>2\\ -2x+12 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$. Tính tích phân

$I=\int_0^{\sqrt{3}}\dfrac{x.f\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx+\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^{2x}.f\left(1+e^{2x}\right)dx$

A. 84. **B.** 83. **C.** 48. **D.** –84.

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $I=\int_0^{\sqrt{3}}\dfrac{x.f\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx+\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^{2x}.f\left(1+e^{2x}\right)dx=I_1+I_2$

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow 2tdt=2xdx\Rightarrow xdx=tdt$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=\sqrt{3}\Rightarrow t=2\end{cases}$.

$\Rightarrow I_1 = \int_1^2 f(t)dt = \int_1^2 f(t)dt = \int_1^2 f(x)dx$

Do $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } x > 2 \\ -2x+12 & \text{khi } x \le 2 \end{cases}$

$\Rightarrow I_1 = \int_1^2 (-2x+12)dx = 9$.

Đặt $t = 1 + e^{2x} \Rightarrow dt = 2e^{2x}dx \Rightarrow e^{2x}dx = \frac{1}{2}dt$. Đổi cận $\begin{cases} x = \ln 2 \Rightarrow t = 5 \\ x = \ln 3 \Rightarrow t = 10 \end{cases}$.

$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}\int_5^{10} f(t)dt = \frac{1}{2}\int_5^{10} f(x)dx$

Do $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } x > 2 \\ -2x+12 & \text{khi } x \le 2 \end{cases}$

$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}\int_5^{10} 4x = 75$.

Vậy $I = I_1 + I_2 = 84$

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^3 - x & \text{khi } x \ge 1 \\ -3x+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Biết $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}dx + \int_0^{\sqrt{\sqrt{e}-1}} \frac{x.f\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)}{x^2+1}dx = \frac{a}{b}$

với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của tổng $a+b$ bằng

A. 69.　　**B.** 68.　　**C.** 67.　　**D.** 66.

Lời giải:

Chọn A

$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}dx + \int_0^{\sqrt{\sqrt{e}-1}} \frac{x.f\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)}{x^2+1}dx = I_1 + I_2$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$. Đổi cận $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \sqrt{3} \end{cases}$.

$\Rightarrow I_1 = \int_1^{\sqrt{3}} f(t)dt = \int_1^{\sqrt{3}} f(x)dx$

Đặt $t=\ln\left(x^2+1\right)\Rightarrow dt=\frac{2x}{x^2+1}dx\Rightarrow\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}dt$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\x=\sqrt{\sqrt{e}-1}\Rightarrow t=\frac{1}{2}\end{cases}$.

$$\Rightarrow I_2=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}f\left(t\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}f\left(x\right)dx$$

Do $f(x)=\begin{cases}2x^3-x & \text{khi } x\geq 1\\-3x+2 & \text{khi } x<1\end{cases}$

$$\Rightarrow I=I_1+I_2=\int_1^{\sqrt{3}}\left(2x^3-x\right)dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-3x+2\right)dx=\frac{53}{16}\Rightarrow a=53,b=16.$$

Vậy $a+b=69$

Câu 19. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+2 & \text{khi } 0\leq x<2\\-x+7 & \text{khi } 2\leq x<5\end{cases}$. Biết $I=\int_1^{e^2}\frac{f\left(\ln x\right)}{x}dx+\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{6}}x.f\left(\sqrt{x^2+1}\right)dx=\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của hiệu $a-b$ bằng

A. 77 . **B.** 67 . **C.** 57 . **D.** 76 .

Lời giải:

Chọn A

$$I=\int_1^{e^2}\frac{f\left(\ln x\right)}{x}dx+\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{6}}x.f\left(\sqrt{x^2+1}\right)dx=I_1+I_2$$

Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$. Đổi cận $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=0\\x=e^2\Rightarrow t=2\end{cases}$.

$$\Rightarrow I_1=\int_0^2 f\left(t\right)dt=\int_0^2 f\left(x\right)dx$$

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow 2tdt=2xdx\Rightarrow xdx=tdt$. Đổi cận $\begin{cases}x=\sqrt{3}\Rightarrow t=2\\x=2\sqrt{6}\Rightarrow t=5\end{cases}$.

$$\Rightarrow I_2=\int_2^5 t.f\left(t\right)dt=\int_2^5 x.f\left(x\right)dx$$

Do $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+2 & \text{khi } 0\leq x<2\\-x+7 & \text{khi } 2\leq x<5\end{cases}$

$$\Rightarrow I=I_1+I_2=\int_0^2\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx+\int_2^5 x.\left(-x+7\right)dx=\frac{79}{2}\Rightarrow a=79,b=2.$$

Vậy $a-b=77$

Câu 20. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & \text{khi } x\ge 0 \\ 2x-3 & \text{khi } x<0 \end{cases}$. Biết $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x-1)\cos x\,dx+\int\limits_e^{e^2}\frac{f(\ln x)}{x}dx=\frac{a}{b}$

với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của tích $a+b$ bằng

A. 305. **B.** -305. **C.** 350. **D.** -350.

Lời giải:

Chọn B

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x-1)\cos x\,dx+\int\limits_e^{e^2}\frac{f(\ln x)}{x}dx=I_1+I_2$

Đặt $t=2\sin x-1\Rightarrow dt=2\cos xdx\Rightarrow \cos xdx=\frac{dt}{2}$. Đổi cận $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=-1 \\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1 \end{cases}$.

$\Rightarrow I_1=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(t)dt=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$

Do $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & \text{khi } x\ge 0 \\ 2x-3 & \text{khi } x<0 \end{cases}$

$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^{0}(2x-3)dx+\int\limits_{0}^{1}\left(x^2+x+1\right)dx\right)=-\frac{13}{12}$.

Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$. Đổi cận $\begin{cases} x=e\Rightarrow t=1 \\ x=e^2\Rightarrow t=2 \end{cases}$.

$\Rightarrow I_2=\int\limits_1^2 f(t)dt=\int\limits_1^2 f(x)dx$

Do $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & \text{khi } x\ge 0 \\ 2x-3 & \text{khi } x<0 \end{cases}$

$\Rightarrow I=\int\limits_1^2\left(x^2+x+1\right)dx=\frac{29}{6}$.

$\Rightarrow I=I_1+I_2=-\frac{377}{72}\Rightarrow a=-377, b=72$

Vậy $a+b=-305$