BÀI TẬP SỐ PHỨC CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI

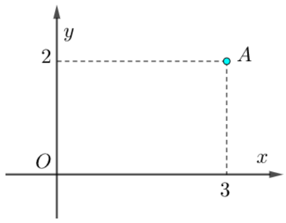
Câu 1. Tính môđun của số phức $z = 3 + 4i$.

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** $\sqrt{7}$.

Câu 2. Số phức liên hợp của số phức $z = i(1-2i)$ có điểm biểu diễn là điểm nào dưới đây?

A. $E(2;-1)$. **B.** $B(-1;2)$. **C.** $A(1;2)$. **D.** $F(-2;1)$.

Câu 3. Điểm A trong hình vẽ bên dưới biểu diễn cho số phức z.



Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. Phần thực là 3, phần ảo là 2.
B. Phần thực là 3, phần ảo là $2i$.
C. Phần thực là -3, phần ảo là $2i$.
D. Phần thực là -3, phần ảo là 2.

Câu 4. Cho số phức $z = 1 + 2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = z + i\overline{z}$ trên mặt phẳng toạ độ?

A. $M(3;3)$. **B.** $Q(3;2)$. **C.** $N(2;3)$. **D.** $P(-3;3)$.

Câu 5. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 + i$. Giá trị của biểu thức $|z_1 + 3z_2|$ là

A. $\sqrt{55}$. **B.** 5. **C.** 6. **D.** $\sqrt{61}$.

Câu 6. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính iz_0.

A. $iz_0 = 3 - i$. **B.** $iz_0 = -3i + 1$. **C.** $iz_0 = -3 - i$. **D.** $iz_0 = 3i - 1$.

Câu 7. Phần thực và phần ảo của số phức liên hợp của số phức $z = 1 + i$ là:
A. Phần thực là 1, phần ảo là -1. **B.** Phần thực là 1, phần ảo là $-i$.
C. Phần thực là 1, phần ảo là i. **D.** Phần thực là 1, phần ảo là 1.

Câu 8. Xác định phần ảo của số phức $z = 18 - 12i$.
A. -12. **B.** 18. **C.** 12. **D.** $-12i$.

Câu 9. Điểm biểu diễn của số phức z là $M(1;2)$. Tọa độ của điểm biểu diễn cho số phức $w = z - 2\overline{z}$ là

A. $(2;-3)$. **B.** $(2;1)$. **C.** $(-1;6)$. **D.** $(2;3)$.

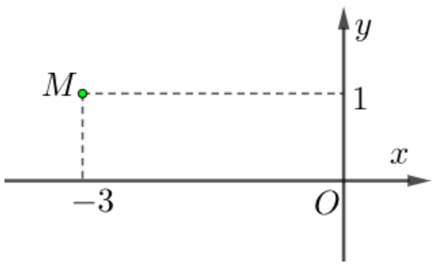
Câu 10. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức $P = (z_1 - 2z_2).\overline{z_2} - 4z_1$ bằng:

A. -10. **B.** 10. **C.** -5. **D.** -15.

Câu 11. Cho số phức $z = (1+i)^2(1+2i)$. Số phức z có phần ảo là:

A. 2. **B.** 4. **C.** -2. **D.** $2i$.

Câu 12. Điểm M trong hình bên là điểm biểu diễn cho số phức



A. $z = 2 - 2i + (-5 + i)$.

B. $z = (1 + 2i) - (4 + i)$.

C. $z = -3i + 1$.
D. $z = -1 - 3i$.

Câu 13. Cho số phức $z = 1 + 2i$. Số phức liên hợp của z là
A. $\overline{z} = -1 + 2i$. **B.** $\overline{z} = -1 - 2i$.
C. $\overline{z} = 2 + i$. **D.** $\overline{z} = 1 - 2i$.

Câu 14. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của số phức $z=\dfrac{(2-3i)(4-i)}{3+2i}$.

A. $(-1;-4)$. **B.** $(1;4)$. **C.** $(1;-4)$. **D.** $(-1;4)$.

Câu 15. Cho số phức $z=a+bi\ \ (a,b\in\mathbb{R})$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. **B.** $\overline{z}=a-bi$. **C.** z^2 là số thực. **D.** $z.\overline{z}$ là số thực.

Câu 16. Cho hai số phức $z_1=3-i$ và $z_2=4-i$. Tính môđun của số phức $z_1^2+\overline{z}_2$.

A. 12. **B.** 10. **C.** 13. **D.** 15.

Câu 17. Cho số phức z thỏa mãn $(1+z)(1+i)-5+i=0$. Số phức $w=1+z$ bằng

A. $-1+3i$. **B.** $1-3i$. **C.** $-2+3i$. **D.** $2-3i$.

Câu 18. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $z=\left|1-\sqrt{3}i\right|(1+2i)+|3-4i|(2+3i)$.

Giá trị của $a-b$ là

A. 7. **B.** -7. **C.** 31. **D.** -31.

Câu 19. Cho số phức $z_1=3+2i$, $z_2=6+5i$. Tìm số phức liên hợp của số phức $z=6z_1+5z_2$

A. $\overline{z}=51+40i$. **B.** $\overline{z}=51-40i$. **C.** $\overline{z}=48+37i$. **D.** $\overline{z}=48-37i$.

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn $(1+2i)z=(1+2i)-(-2+i)$. Mô đun của z bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Câu 21. Số phức z nào sau đây thỏa $|z|=\sqrt{5}$ và z là số thuần ảo?

A. $z=\sqrt{5}$. **B.** $z=\sqrt{2}+\sqrt{3}i$. **C.** $z=5i$. **D.** $z=-\sqrt{5}i$.

Câu 22. Trong mặt phẳng phức gọi M là điểm biểu diễn cho số phức $z=a+bi$ ($a,b\in\mathbb{R}$, $ab\neq 0$), M' là điểm biểu diễn cho số phức $\overline{z}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M' đối xứng với M qua Oy. **B.** M' đối xứng với M qua Ox.

C. M' đối xứng với M qua đường thẳng $y=x$. **D.** M' đối xứng với M qua O.

Câu 23. Cho hai số phức $z_1=-1+2i$, $z_2=-1-2i$. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2+|z_2|^2$ bằng

A. $\sqrt{10}$. **B.** 10. **C.** -6. **D.** 4.

Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn: $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i$. Hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 25. Biết $z=a+bi\ \ (a,b\in\mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn $(3-2i)z-2i\overline{z}=15-8i$. Tổng $a+b$ là

A. $a+b=5$. **B.** $a+b=-1$. **C.** $a+b=9$. **D.** $a+b=1$.

Câu 26. Cho số phức $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Tìm số phức $w=1+z+z^2$.

A. $2-\sqrt{3}i$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Câu 27. Tính môđun của số phức z thỏa mãn: $3z.\overline{z}+2024(z-\overline{z})=48-2023i.$

A. $|z|=4$. **B.** $|z|=2\sqrt{506}$. **C.** $|z|=17\sqrt{7}$. **D.** $|z|=3$.

Câu 28. Cho số phức $z=a+bi\ \ (a,\ b\in\mathbb{R})$ thỏa $a+(b-1)i=\dfrac{1+3i}{1-2i}$. Giá trị nào dưới đây là môđun của z

A. 5. **B.** 1. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 29. Trong các số phức: $(1+i)^3$, $(1+i)^4$, $(1+i)^5$, $(1+i)^6$ số phức nào là số phức thuần ảo?

A. $(1+i)^3$. **B.** $(1+i)^4$. **C.** $(1+i)^5$. **D.** $(1+i)^6$.

Câu 30. Cho số phức $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{Z}\right)$ thỏa mãn $|z+2+5i|=5$ và $z.\overline{z}=82$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

A. 10. **B.** -8. **C.** -35. **D.** -7.

Câu 31. Cho số phức $z=mi$, $(m\in\mathbb{R})$. Tìm phần ảo của số phức $\frac{1}{z}$?

A. $-\frac{1}{m}$. **B.** $\frac{1}{m}$. **C.** $-\frac{1}{m}i$. **D.** $\frac{1}{m}i$.

Câu 32. Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z thỏa mãn $|z-3+4i|=5$ là

A. Một đường tròn. **B.** Một đường thẳng. **C.** Một đường parabol. **D.** Một đường Elip.

Câu 33. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C, D lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z_1=-1+i$, $z_2=1+2i$, $z_3=2-i$, $z_4=-3i$. Gọi S là diện tích tứ giác $ABCD$. Tính S.

A. $S=\frac{17}{2}$. **B.** $S=\frac{19}{2}$. **C.** $S=\frac{23}{2}$. **D.** $S=\frac{21}{2}$.

Câu 34. Cho số phức z thoả mãn $|z+3-4i|=5$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng toạ độ biểu diễn các số phức z là một đường tròn. Tìm toạ độ tâm I và bán kính R của đường tròn đó.

A. $I(3;-4)$, $R=\sqrt{5}$. **B.** $I(-3;4)$, $R=\sqrt{5}$. **C.** $I(3;-4)$, $R=5$. **D.** $I(-3;4)$, $R=5$.

Câu 35. Cho các số phức z thỏa mãn $|z-i|=5$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=iz+1-i$ là đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

A. $r=22$. **B.** $r=20$. **C.** $r=4$. **D.** $r=5$.

Câu 36. Cho số phức thỏa $|z|=3$. Biết rằng tập hợp số phức $w=\overline{z}+i$ là một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.

A. $I(0;1)$. **B.** $I(0;-1)$. **C.** $I(-1;0)$. **D.** $I(1;0)$.

Câu 37. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|=|z+\overline{z}|=1$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 38. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z-1|=|z+\overline{z}+2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một

A. đường thẳng. **B.** đường tròn. **C.** parabol. **D.** hypebol.

Câu 39. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=-1$. **B.** $P=-5$. **C.** $P=3$. **D.** $P=7$.

Câu 40. Tổng các nghiệm phức của phương trình $z^3+z^2-2=0$ là

A. 1. **B.** -1. **C.** $1-i$. **D.** $1+i$.

Câu 41. Kí hiệu z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $4z^2-16z+17=0$. Trên mặt phẳng tọa độ điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w=(1+2i)z_1-\frac{3}{2}i$?

A. $M(-2;1)$. **B.** $M(3;-2)$. **C.** $M(3;2)$. **D.** $M(2;1)$.

Câu 42. Trên mặt phẳng phức tập hợp các số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $|z+2+i| = |\overline{z} - 3i|$ là đường thẳng có phương trình

A. $y = x+1$. **B.** $y = -x+1$. **C.** $y = -x-1$. **D.** $y = x-1$.

Câu 43. Có bao nhiêu số phức $z = a+bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| = \left|\frac{z-3i}{z+i}\right| = 1$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 44. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+1-3i| = 3\sqrt{2}$ và $(z+2i)^2$ là số thuần ảo?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 45. Số phức $z = a+bi$ (với a, b là số nguyên) thỏa mãn $(1-3i)z$ là số thực và $|\overline{z} - 2 + 5i| = 1$. Khi đó $a+b$ là

A. 9. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 46. Trong tất cả các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+1| = \left|\frac{z+\overline{z}}{2} + 3\right|$, gọi số phức $z = x+yi$ là số phức có mô-đun nhỏ nhất. Tính $S = 2022x + 2023y + 2024$.

A. 2024. **B.** -2020. **C.** 2023. **D.** -2022

Câu 47. Cho số phức z thõa mãn $|z-1+i| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z+2-i|^2 + |z-2-3i|^2$.

A. 18. **B.** $38 + 8\sqrt{10}$. **C.** $18 + 2\sqrt{10}$. **B.** $16 + 2\sqrt{10}$.

Câu 48. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z+2w| = 3$, $|2z+3w| = 6$ và $|z+4w| = 7$. Tính giá trị của biểu thức $P = z.\overline{w} + \overline{z}.w$.

A. $P = -14i$. **B.** $P = -28i$. **C.** $P = -14$. **D.** $P = -28$.

Câu 49. Cho hai số phức z_1, z_2 thoả mãn $|z_1| = 2$, $|z_2| = \sqrt{3}$. Gọi M, N là các điểm biểu diễn cho z_1 và iz_2. Biết $MON = 30°$. Tính $S = |z_1^2 + 4z_2^2|$.

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{7}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 50. Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z-1}{z+3i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z+i| + 2|\overline{z} - 4 + 7i|$.

A. 8. **B.** 20. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $4\sqrt{5}$.

________________**HẾT**________________

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	A	A	A	D	C	A	A	C	D
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	B	D	A	C	C	D	B	D	C
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
D	B	B	D	C	C	A	D	D	B
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A	A	A	D	D	A	C	C	D	B
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	D	B	C	B	B	B	D	C	B

LỜI GIẢI CÂU HỎI VẬN DỤNG CAO

Câu 43. Có bao nhiêu số phức $z=a+bi$ $(a,\, b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right|=\left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right|=1$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\begin{cases}|z-1|=|z-i|\\|z-3i|=|z+i|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)^2+b^2=a^2+(b-1)^2\\a^2+(b-3)^2=a^2+(b+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2a+1=-2b+1\\-6b+9=2b+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$.

Suy ra $z=1+i$. Vậy có một số phức thỏa mãn. $\xrightarrow{\text{Chọn}}\boxed{B}$

Câu 44. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+1-3i|=3\sqrt{2}$ và $(z+2i)^2$ là số thuần ảo?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải:

Giả sử $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$. Ta có: $|z+1-3i|=3\sqrt{2}\Leftrightarrow\boxed{(x+1)^2+(y-3)^2=18}$ (1).

Xét $w=(z+2i)^2=\left[x+(y+2)i\right]^2=\underbrace{x^2-(y+2)^2}_{a}+\underbrace{2x(y+2)}_{b}i$.

Theo giả thiết: w thuần ảo $\Rightarrow x^2-(y+2)^2=0\Leftrightarrow\boxed{\left[\begin{array}{l}x=y+2\\x=-(y+2)\end{array}\right.}$.

$\boxed{\text{Trường hợp 1:}}$ $x=y+2$, thay vào (1) ta được: $2y^2=0\Leftrightarrow y=0\Rightarrow x=2\Rightarrow\boxed{z_1=2}$.

$\boxed{\text{Trường hợp 2:}}$ $x=-(y+2)$, thay vào (1) ta được: $2y^2-4y-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1+\sqrt{5}\\y=1-\sqrt{5}\end{array}\right.$

$\Rightarrow z_2=-3-\sqrt{5}+\left(1+\sqrt{5}\right)i,\ z_3=-3+\sqrt{5}+\left(1-\sqrt{5}\right)i$.

Vậy có 3 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán. $\xrightarrow{\text{Chọn}}\boxed{C}$

Câu 45. Số phức $z=a+bi$ (với a, b là số nguyên) thỏa mãn $(1-3i)z$ là số thực và $\left|\overline{z}-2+5i\right|=1$. Khi đó $a+b$ là

A. 9. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 7.

Hướng dẫn giải:

Xét số phức $w=(1-3i)z=(1-3i)(a+bi)=a+3b+(b-3a)i$.

Theo giả thiết w là số thực nên $b-3a=0 \Rightarrow \boxed{b=3a}$ (1).

Ta lại có: $\left|\overline{z}-2+5i\right|=1 \Leftrightarrow \left|a-2+(5-b)i\right|=1 \Leftrightarrow \boxed{(a-2)^2+(5-b)^2=1}$ (2).

Thế (1) vào (2) ta có: $(a-2)^2+(5-3a)^2=1 \Leftrightarrow 10a^2-34a+28=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \Rightarrow b=6 \\ a=\dfrac{7}{5} \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

Vậy $a+b=2+6=8$. $\xrightarrow{\text{Chọn}} \boxed{B}$

Câu 46. Trong tất cả các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+1|=\left|\dfrac{z+\overline{z}}{2}+3\right|$, gọi số phức $z=x+yi$ là số phức có mô-đun nhỏ nhất. Tính $S=2022x+2023y+2024$.

A. 2024. **B.** -2020. **C.** 2023. **D.** -2022

Hướng dẫn giải:

Gọi $z=x+yi$ $(x,\ y\in\mathbb{R})$. Theo giả thiết: $|x+yi+1|=\left|\dfrac{x+yi+x-yi}{2}+3\right| \Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=(x+3)^2$

$2x+1+y^2=6x+9 \Leftrightarrow \boxed{y^2=4x+8}$ (1).

Mô-đun của z là: $|z|=\sqrt{x^2+y^2}\overset{(1)}{=}\sqrt{x^2+4x+8}=\sqrt{(x+2)^2+4}\ge\sqrt{4}=2$.

Do vậy $|z|_{\min}=2$; khi đó: $x=-2,\ y=0$. Do vậy $S=2022x+2023y+2024=-2020$. $\xrightarrow{\text{Chọn}} \boxed{B}$

Câu 47. Cho số phức z thõa mãn $|z-1+i|=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z+2-i|^2+|z-2-3i|^2$.

A. 18. **B.** $38+8\sqrt{10}$. **C.** $18+2\sqrt{10}$. **B.** $16+2\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải:

Lưu ý: Giả sử z có điểm biểu diễn là M, khi đó:

1) $\left|z-(a+bi)\right|=MN$ với $N(a;b)$.

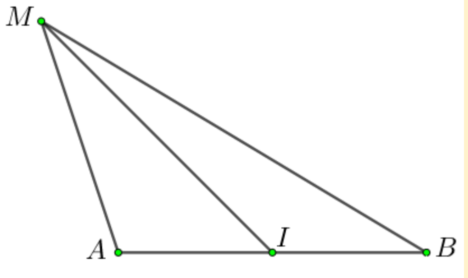
2) $\left|z-(a+bi)\right|=c$ (với $c>0$) là phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$, bán kính $r=c$.

3) Xét tam giác MAB với I là trung điểm AB, ta có:

$$MA^2+MB^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$$

$$=2MI^2+2\overrightarrow{MI}\left(\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}}_{=\vec{0}}\right)+IA^2+IB^2$$

$$=2MI^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2=2MI^2+\frac{AB^2}{2}.$$



4) Bất đẳng thức ***Cauchy-Schwarz***:

Với hai cặp số $(a;x)$, $(b;y)$, ta có: $\boxed{|ax+by|\le\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}=\dfrac{x}{y}$ (điều kiện mẫu khác 0).

☺ Cách giải 1: Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z. Gọi $I(1;-1)$, $A(-2;1)$, $B(2;3)$ lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $1-i$; $-2+i$; $2+3i$. Khi đó, ta có:

$|z-1+i|=2 \Leftrightarrow \left|\underset{M}{z}-\underset{I}{(1-i)}\right|=2 \Leftrightarrow MI=2$; nghĩa là M thuộc đường tròn (C) có tâm $I(1;-1)$, $R=2$.

Ta có $P=|z+2-i|^2+|z-2-3i|^2=\left|\underset{M}{z}-\underbrace{(-2+i)}_{A}\right|^2+\left|\underset{M}{z}-\underbrace{(2+3i)}_{B}\right|^2=MA^2+MB^2$. ***(Xem mục Lưu ý).***

Gọi $E(0;2)$ là trung điểm của AB, ta có: $P=2ME^2+\dfrac{AB^2}{2}$. ***(Xem mục Lưu ý).***

Ta thấy AB không đổi, do đó P có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi ME có giá trị lớn nhất.

Nhận thấy : $IE=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}>2=R$ nên nên điểm E nằm ngoài đường tròn (C).

Ta có: $(ME)_{\max}=IE+R=2+\sqrt{10}$.

Vậy $P_{\max}=2\left((ME)_{\max}\right)^2+\dfrac{AB^2}{2}=2\left(2+\sqrt{10}\right)^2+10=38+8\sqrt{10}$. $\xrightarrow{\text{Chọn}}$ **B**

☺ Cách giải 2: Giả sử $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$. $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z.

Từ giả thiết: $|z-1+i|=2$, suy ra $M\in(C_1)$ có tâm $I_1(1;-1)$ và bán kính $R_1=2$.

Khi đó: $|z-1+i|=2 \Leftrightarrow \boxed{(x-1)^2+(y+1)^2=4 \Leftrightarrow x^2+y^2=2x-2y+2}$ (1).

Ta có: $P=|z+2-i|^2+|z-2-3i|^2=(x+2)^2+(y-1)^2+(x-2)^2+(y-3)^2$.

Suy ra

$P=2x^2+2y^2-8y+18\overset{(1)}{=}2(2x-2y+2)-8y+18=4x-12y+22=\boxed{4(x-1)-12(y+1)+38}$.

Theo bất đẳng thức ***Cauchy-Schwarz*** :

$$|4(x-1)-12(y+1)|\le\sqrt{\left[4^2+(-12)^2\right]\left[\underbrace{(x-1)^2+(y+1)^2}_{=4}\right]}=8\sqrt{10}.$$

$\Leftrightarrow -8\sqrt{10}\le 4(x-1)-12(y+1)\le 8\sqrt{10} \Leftrightarrow -8\sqrt{10}+38\le P\le 8\sqrt{10}+38$. Do đó $P_{\max}=38+8\sqrt{10}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{x-1}{y+1}=\dfrac{-4}{12}\\ 4x-12y+22=38+8\sqrt{10}\end{cases}$. $\xrightarrow{\text{Chọn}}$ **B**

(Học sinh có thể giải tìm x, y bằng phương pháp thế hoặc dùng máy tính bỏ túi).

Câu 48. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z+2w|=3$, $|2z+3w|=6$ và $|z+4w|=7$. Tính giá trị của biểu thức $P=z.\overline{w}+\overline{z}.w$.

A. $P=-14i$. **B.** $P=-28i$. **C.** $P=-14$. **D.** $P=-28$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $|z+2w|=3 \Leftrightarrow |z+2w|^2=9 \Leftrightarrow (z+2w).\left(\overline{z+2w}\right)=9 \Leftrightarrow (z+2w).\left(\overline{z}+2\overline{w}\right)=9$

$\Leftrightarrow z.\overline{z}+2\left(\underbrace{z.\overline{w}+\overline{z}.w}_{=P}\right)+4w.\overline{w}=9 \Leftrightarrow \boxed{|z|^2+2P+4|w|^2=9}$ (1);

$|2z+3w|=6 \Leftrightarrow |2z+3w|^2=36 \Leftrightarrow (2z+3w).\left(2\overline{z}+3\overline{w}\right)=36 \Leftrightarrow \boxed{4|z|^2+6P+9|w|^2=36}$ (2);

$|z+4w|=7 \Leftrightarrow (z+4w).(\bar{z}+4\bar{w})=49 \Leftrightarrow \boxed{|z|^2+4P+16|w|^2=49}$ (3).

Giải hệ phương trình gồm (1), (2), (3) ta có: $\begin{cases} |z|^2=33 \\ P=-28 \\ |w|^2=8 \end{cases}$. Vậy $\boxed{P=-28}$. $\xrightarrow{\text{Chọn}} \boxed{D}$

Câu 49. Cho hai số phức z_1, z_2 thoả mãn $|z_1|=2$, $|z_2|=\sqrt{3}$. Gọi M, N là các điểm biểu diễn cho z_1 và iz_2. Biết $\widehat{MON}=30°$. Tính $S=|z_1^2+4z_2^2|$.

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{7}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

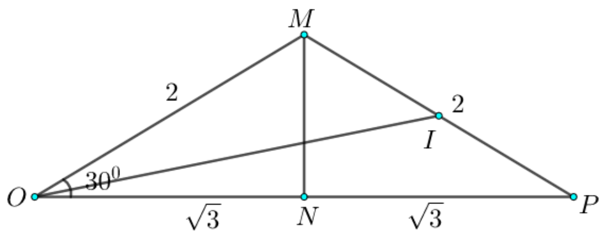
Nhận xét: Từ giả thiết, ta có: $OM=|z_1|=2$, $ON=|iz_2|=|i|.|z_2|=\sqrt{3}$.

Ta có $S=|z_1^2+4z_2^2|=|z_1^2-(2iz_2)^2|=|z_1-2iz_2|.|z_1+2iz_2|$

Gọi P là điểm biểu diễn của số phức $2iz_2$, suy ra $OP=|2iz_2|=2|iz_2|=2ON=2\sqrt{3}$ hay N là trung điểm OP.

Ta có: $|z_1-2iz_2|.|z_1+2iz_2|=|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}|.|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}|$

$=|\overrightarrow{PM}|.|2\overrightarrow{OI}|=2PM.OI$ với I là trung điểm MP.



Xét tam giác OMP với $\widehat{MOP}=\widehat{MON}=30°$, áp dụng định lí Cô-sin, ta có $MP=\sqrt{OM^2+OP^2-2OM.OP.\cos 30^0}$

$=\sqrt{4+12-2.2.2\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \boxed{MP=2}$.

Tam giác OMP có trung tuyến OI nên $OI^2=\dfrac{OM^2+OP^2}{2}-\dfrac{MP^2}{4}=7 \Rightarrow \boxed{OI=\sqrt{7}}$.

Vậy $S=2PM.OI=2.2.\sqrt{7}=4\sqrt{7}$. $\xrightarrow{\text{Chọn}} \boxed{C}$

Câu 50. Cho số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z-1}{z+3i}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z+i|+2|\bar{z}-4+7i|$.

A. 8. **B.** 20. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $4\sqrt{5}$.

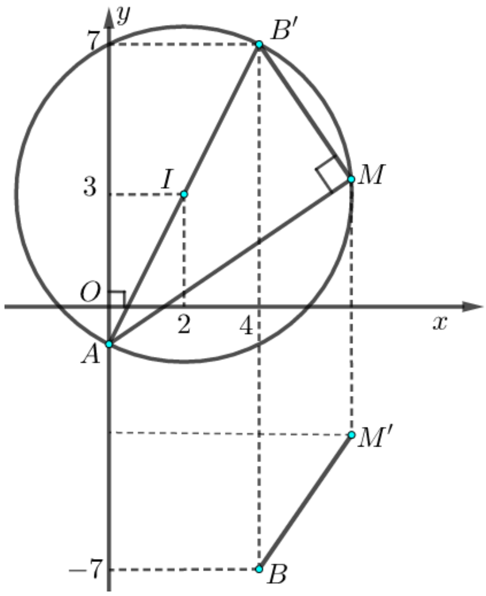
Hướng dẫn giải:

Gọi $z=x+yi$ với $x, y\in\mathbb{R}$; $M(x;y)$, $M'(x;-y)$ lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z, $\bar{z}$.

Ta có: $\left|\dfrac{z-1}{z+3i}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}|z-1|=|z+3i| \Leftrightarrow \sqrt{2}|(x-1)+yi|=|x+(y+3)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y+3)^2} \Leftrightarrow 2x^2-4x+2+2y^2=x^2+y^2+6y+9$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-6y-7=0 \Leftrightarrow \boxed{(x-2)^2+(y-3)^2=20}$.



Như vậy, tập hợp điểm M là đường tròn (C) tâm $I(2;3)$ và bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

$P = |z+i| + 2|\bar{z} - 4 + 7i| = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}| + 2|\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OB}|$ với $A(0;-1)$, $B(4;-7)$. Suy ra $\boxed{P = AM + 2BM'}$.

Vì M' đối xứng với M qua Ox nên ta cần gọi điểm $B'(4;7)$ đối xứng với B qua Ox, khi đó $M'B = MB'$. Do đó: $\boxed{P = AM + 2MB'}$.

Ta lại có $A(0;-1)$, $B'(4;7)$ thuộc đường tròn (C) và $AB' = 4\sqrt{5} = 2R$, vì vậy AB' là đường kính của đường tròn $(C) \Rightarrow MA^2 + MB'^2 = AB'^2 = 80$.

Do đó: $P = \underbrace{MA + 2MB' \le \sqrt{\left(1^2 + 2^2\right)\left(\underbrace{MA^2 + MB'^2}_{=80}\right)}}_{Cauchy-Shwart} = 20$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} MB' = 2MA \\ MA^2 + MB'^2 = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MA = 4 \\ MB' = 8 \end{cases}$. Vậy $\max P = 20$. $\xrightarrow{Chọn} \boxed{B}$